目　　錄

第 一 章

集的一般概念

1. 集 凡可以供吾人思考的，並且能够辨别彼此的，叫做個體，總括某些個體成一整體，我們稱之爲集. 集的理論創自德人康妥[1]，從十九世紀末葉，逐漸發展；到了今日，集論不但成爲數學的一分科，並且是全部數學的基礎. 本章敍述集論的梗概，用做探討實函數的準備.

例如中國人民的全體是一集. 從 1 到 100 的一百個自然數成一集. 又如定圓内的一切点的全部，也是一集. 构成集的个体，称爲集的元素；上述第一個集的元素是中國人民，第二個集的元素是自然數，第三個集的元素是點.

有兩集 A 和 B，假如它們所含的元素完全相同，那末說兩集相同，用記號

$$A = B$$

表示 A 和 B 相同. 假如 a 是 A 的一個元素，那末說，A 含有 a，或是說，a 屬於 A，記號是

$$a \in A.$$

假如 A 中任何元素都屬於 B，那末說 A 是 B 的一部分，或是說 A 是 B 的一個子集，用記號

$$A \subseteq B$$

來表示. 假如 A 是 B 的一個子集，但 B 至少有一元素不屬於 A，那末說，A 是 B 的一個眞子集，用

$$A \subset B \quad 或 \quad B \supset A$$

---

1)康妥(George Cantor，1845—1918)的父親是丹麥人，他的誕生地是列寧格勒.

來表示．例如中國人民的全體是 B，上海市人民的全體是 A；那末 $A \subset B$．

不含元素的集稱爲空集．例如滿足 $x^2+1=0$ 的實數 x 是一空集．空集用記號 0 表示，所以

$$A=0$$

的意義是：A 是空集．空集是任何集的子集．

2. **映照** 假如對於兩集 A 和 B，有方法 φ，使 B 的任一元素 b，對應着 A 的唯一元素 a_b，那末說，用表示法(映照法) φ 將 B 的元素 b 表示(映照)於 A 的元素 a_b．稱 a_b 是 b 的像，b 是 a_b 的原像．記號

$$\sum_{b \in B} a_b$$

表示像 a_b 的全體(的集)，稱爲 B 在 A 上的像，這個像是從映照法 φ 得到的．

上面"唯一"的意義是指一個元素只有一個像．當 B 中元素 b 與 b' 相異時(寫做 $b \neq b'$)，

$$a_b \neq a_{b'}$$

成立．就是說：相異的元素對應於不同的像，此時稱 φ 具有單調性．具有單調性的 φ 將 B 映照於 A，假如 B 的像與 A 相同，就是說：

$$A=\sum_{b \in B} a_b$$

成立的時候；稱 A 和 B 成一一對應，φ 是它們的對應法．此時，A 的任一元素 a，必有它的原像 b_a；所以 A 也映照於 B，這是 φ 的逆映照，用 φ^{-1} 來記它．我們寫着

$$\varphi(B)=A,\ \varphi^{-1}(A)=B;$$

$$a_b=\varphi(b),\ b=\varphi^{-1}(a_b).$$

A 和 B 的一一對應，就是有單調的 φ 能使上面最初兩關係成立的意思；或是說 A 的元素和 B 的元素，可以設法使他們兩兩相對．我們用記號

$$A \sim B$$

表示 A 和 B 可成一一對應;此時稱 A 與 B 對等. 例如

A 是 1, 2, 3, 4 四個自然數;

B 是紅,黃,黑,白四個球;

C 是東,南,西,北四個概念;

容易明白 $A\sim B$, $B\sim C$, $A\sim C$. 又如

A 是自然數的全體:1, 2, 3, 4, …,

B 是偶數的全體: 2, 4, 6, 8, …,

C 是奇數的全體: 1, 3, 5, 7, …,

也容易明白三集 A, B, C 是兩兩對等的. 但是應該注意的是

$$B \subset A \quad 和 \quad B \sim A$$

可以同時成立. 就是說:有些集可以和它的一個眞子集對等.

3. 有限集和無限集 在說明有限集和無限集的意義之前,先證明下面的

補助定理 設 n 和 n' 都是自然數, $n' < n$, 又設 M_n 是最初 n 個自然數的集. 假如集 A 對等於 M_n, 則 A 不能對等於 $M_{n'}$.

證明 我們用數學歸納法來證明 M_n 和 $M_{n'}$ 不是對等的. 顯然, M_2 不與 M_1 對等.

設 k 是一個自然數. 在 M_k 不與它的任何眞子集對等的假設下來證明 M_{k+1} 也是如此就够了. 假如有 M' 適合於

$$M' \subset M_{k+1} \quad 和 \quad M' \sim M_{k+1} \tag{1}$$

那末 M_{k+1} 的元素 $k+1$ 必對應於 M' 的某一元素 l. 這個元素 l 不會是 $k+1$, 假如 l 是 $k+1$, 那末從 M_{k+1} 和 M' 分別除去 $k+1$ 和 l, 而得 M_k 和 M'' 從(1)得着

$$M'' \subset M_k, \quad M_k \sim M''. \tag{2}$$

然而由假設, M_k 不和它的任何眞子集對等,所以(2)不成立. 這就是說: l 不等於 $k+1$. l 旣不等於 $k+1$, 可能 M' 並不含有 $k+1$, 是必

$$M' \subseteq M_k.$$

此時從 M_{k+1} 除去 $k+1$, 從 M' 除去 l 而得 M'', 又得着不可以同時成立的兩關係(2). 這樣說來, $k+1$ 必屬於 M'_0 M' 中的 $k+1$ 應該對應於 M_{k+1} 中的某元素 ν. 現在變更對應的情況如下:

使 M_{k+1} 中的 $k+1$ 與 M' 中的 $k+1$ 相對應,

使 M_{k+1} 中的 ν 與 M' 中的 l 相對應.

其餘諸元素間的對應都仍其舊.

如是仍不失 M_{k+1} 和 M' 的對應關係,但是這樣的一一對應的不可能實現,已詳於上文,所以(1)是不能成立的. 補助定理證畢.

于是, 当 $A \sim M_n$ 時,A 不能再與其它的 $M_{n'}$ 對等,稱這個自然數 n 爲 A 的計數,或是 A 的元數個數.

集有兩種:有 M_n 與之對等的集,無 M_n 與之對等的集,前者謂之有限集,後者謂之無限集. 從這個定義就得着

定理 可與其眞子集對等的集一定是無限集.

4. 可列集與不可列集 可列集有無限的和有限的:有限集都是可列集. 空集也算是可列集,可與自然數集(就是自然數的全體)

$$N: 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$$

成一一對應的無限集叫它做可列無限集.

定理 1. 無限集必含有一個可列無限子集.

證明 設 A 是一無限集. 從 A 中取一元素 a_0. 除 a_0 而外, A 中必有元素 a_1,否則發生

$$A \sim M_1$$

的矛盾. 設 k 是一自然數,A 中取出元素 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_k$ 後必餘有元素 a_{k+1},否則發生無限集 A 對等於 M_{k+1} 的矛盾.

所以 A 含有如下的無限可列子集:

$$A_1: a_1, a_2, a_3, \cdots$$

定理證畢.

有限集不能與其眞子集對等,已詳於前節. 那末,無限集是否

一定對等於其某一眞子集呢？

定理 2. 無限集必對等於它的一個眞子集.

證明　設 A 是一無限集，它必含有可列子集 A_1 如定理 1 所示.

設 A_1 的元素是 $a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots$. 從 A 除去 a_1，得 A 的眞子集 B，證明 $A \sim B$ 就够了. 令 A_1 的元素 a_n 對應於 B 的元素 a_{n+1}，A 中不屬於 A_1 的元素 a 使它對應於 B 中的 a. 于是成立着 A 和 B 的一一對應. 而定理證明完畢.

由前節的定理和本節定理 2，我們斷言：無限集的特徵是有眞子集和它對等.

現在舉出可列集的若干實例：

(1) 自然數對 $(m, n)(m, n=1, 2, \cdots)$ 的全體 M 是可列的.

事實上，記 $a_1=(1,1)$，$a_2=(2,1)$，$a_3=(1,2)$，$a_4=(3,1)$，

$$a_5=(2,2),\ a_6=(1,3),$$

$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$

時，就可以了解 $M \sim N$，N 表示自然數的集. 把一切自然數對列成一表，更是一目了然的可以明白 $M \sim N$：

$$\begin{array}{llll} (1,1) & (1,2) & (1,3) & \cdots \\ (2,1) & (2,2) & \cdots\cdots\cdots & \\ (3,1) & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \end{array}$$

(2) 可列無限集 A 的任一無限子集 B 是可列的.

爲什麼呢？ 記 A 的一切元素爲 $a_1, a_2, \cdots$；那麽，B 的一切元素的形式可以記作

$$a_{\nu_1}, a_{\nu_2}, a_{\nu_3}, \cdots.$$

此地 $1 \leqslant \nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \cdots$，由是可知 B 是可列的.

(3) 有理數的全體是可列的.

因爲正有理數 $m/n\,(m>0,\ n>0)$ 的全體和自然數對的集 N 成一一對應，所以一切正有理數成一可列集

$$p_1, p_2, p_3, \cdots.$$

從而,有理數的全體

$$R: 0, p_1, -p_1, p_2, -p_2, \cdots$$

也是可列的.

定義 設 $A, B, C, \cdots$ 都是集,以這些集的元素全體所成的集稱爲 $A, B, C, \cdots$ 的和集,這個和集用記號

$$A + B + C + \cdots$$

來表示. 簡寫和集 $A_1 + A_2 + \cdots + A_k$ 做 $\sum_{\nu=1}^{k} A_\nu$. 又簡寫 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 做 ΣA_n.

假如 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ 都是可列集;那末,由(1)的證法知道和集 ΣA_n 也是可列的,因爲只要把 A_n 的一切元素記成

$$(n, 1), (n, 2), (n, 3), \cdots, (n, m), \cdots$$

就明白了. 簡單地說:

(4) 可列無限個(或有限個)可列集的和集是可列的.

有理數是代數數. 代數數未必是有理數,這就是說:整數係數 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 的方程

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$
$$(a_0 \neq 0)$$

的根未必是有理數. 正整數

$$H = n + |a_0| + \cdots + |a_n|$$

稱爲上記方程的高. 對於一定的 H,只有有限個方程以 H 爲高的,每個方程的一切根都是代數數;記這些代數數的全體爲 A_n, A_n 是一有限集. 由(4),和集

$$A_1 + A_2 + A_3 + \cdots$$

是一可列集. 我們達到了下述的結果:

(5) 代數數的全體是可列的.

然則任何無限集都是可列的嗎? 不然,不可列的集是存在的.

舉例於下:

設 X 是十進位小數的全體,那末 X 的元素的一般形式是

$$0.\ a_1\ a_2\ a_3\ a_4\cdots$$

a_k 是十個數字 $0, 1, \cdots, 9$ 中的一個($k = 1, 2, \cdots$). 假如 X 是可列的,那末 X 的元素的全部可以寫成

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_k, \cdots.$$

X_k 的形式是 $0.\ a_{k1}\ a_{k2}\ a_{k3}\cdots a_{kn}\cdots$,而 a_{kn} ($n = 1, 2, \cdots$)是

$$0, 1, 2, \cdots, 9$$

十個數字中的一個. 我們現在定義一個小數 $0.\ b_1\ b_2\cdots b_k\cdots$. 對於任一 k,假如 a_{kk} 是 1,那末 b_k 是 2; 假如 a_{kk} 不是 1,那末 b_k 是 1. 這個小數 $0.\ b_1\ b_2\ b_3\cdots$, 決不是一個 x_k; 因爲

$$a_{kk} \neq b_k\ (k = 1, 2, \cdots)$$

的緣故. 但是由定義,

$$0.\ b_1\ b_2\ b_3\cdots \in X.$$

兩結果不相容,所以 X 不是可列的.

5. 計數的拓廣 設 n 是一個自然數. 一切以 n 做計數的有限集, 都是對等的:計數又名個數, 個數相同的兩集是對等的. 現在拓廣計數的意義於無限集.

定義 對等的兩集,稱爲兩集有同勢; 不對等的兩集,稱其勢相異. 有限集的勢就是計數. 空集的勢是零. 與自然數集 N 同勢的集,記它的勢做 $\aleph_0$.

所以可列無限集的勢是 $\aleph_0$.

定義 記一切十進位小數的集(就是前節的 X)的勢做 $\aleph$.

由前節知 $\aleph_0$ 和 $\aleph$ 是相異的兩個勢.

定義 暫用 α, β, γ 等文字做勢的記號. 兩勢 α 和 β 相同的記號是

$$\alpha = \beta.$$

假如 A 對等於 B 的某眞子集. 而 B 不與 A 對等,稱爲 A 的勢小

於 B 的勢;或是說 B 的勢大於 A 的勢. 設 A 的勢是 α, B 的勢是 β; 那末不等式

$$\alpha<\beta \quad 或 \quad \beta>\alpha$$

表示這些或大或小的關係. 從這個定義. 我們就知道:

設 n 是有限集(而不是空集)的勢. 那末.

$$O<n<\aleph_0<\aleph.$$

無限集必含有可列無限集(§4,定理 1),所以在無限集的勢當中,以 $\aleph_0$ 爲最小. 現在證明

定理 1. 沒有最大的勢. (所以有大於 $\aleph$ 的勢).

證明 假如定理不成立,那末有集 A,其勢 α 是最大的. A 的子集的全體成一集 T, T 的元素都是 A 的子集;記 T 的勢爲 β, 只要導出

$$\alpha<\beta$$

的矛盾來就好了. 明顯地,我們只要證明 $\alpha\neq\beta$ 好了. 假如 $\alpha=\beta$, 那末, $A\sim T$;必有對應法使 A 的任一元素 a 對應於 T 的唯一元素 t_a,兩關係

$$a\in t_a \quad 與 \quad a\bar{\in} t_a \quad (就是: a 不屬於 t_a)$$

必有一個且只有一個成立. 第一個關係,不會對於 A 的一切元素 a 都成立: 因爲任取 A 的兩元素 a 和 b 組成 A 的一個子集 t, t 中只有 a 和 b. 假如第二關係沒有成立的話 T 的元素 t 必對應於 A 的一個元素,此元素非 a 即 b, 我們可以假定它是 a, 然而,光是 a 也是 A 的一個子集——記它做(a), $(a)\in T$ 元素 a 既對應於 t,又對應於(a),這是不可能的事.

由是可知 A 中必有元素 a 適合於 $a\bar{\in} t_a$,記這種 a 的全體做 t^*, t^* 屬於 T, A 中必有元素 a^* 與 t^* 對應. 兩關係

$$a^*\in t^* \quad 與 \quad a^*\bar{\in} t^*$$

必有一個且只有一個成立. 若 $a^*\in t^*$, 則由 t^* 的構成, t^* 中的 a^* 必滿足

$$a^* \bar{\in} t_{a^*},$$

但是 t_{a^*} 就是 t^*，所以得着 $a^* \bar{\in} t^*$ 的衝突、又假如 $a^* \bar{\in} t^*$，那末不屬於 t^* 的元素 a^* 必滿足

$$a^* \in t_{a^*},$$

因爲 $t_{a^*} = t^*$．又遇着衝突 $a^* \in t^*$．路路都說不通，所以 A 是不存在的，定理 1 由是證畢．

系 假如 A 是一集，那末，A 的子集全體的勢，大於 A 的勢．

定義 設 $A, B, C, \cdots$ 都是集；這些集所公有的元集，言其全體，叫做這些集的通集，用記號：

$$A \cdot B \cdot C \cdots$$

表示．$A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \cdots \cdot A_n$ 也寫作 $\prod_{k=1}^{n} A_k$．可列無限個集 $A_1, A_2, A_3 \cdots$ 的通集寫做

$$\prod_{n=1}^{\infty} A_n \quad 或 \quad \prod A_n.$$

定義 設 A 的勢是 α，B 的勢是 β，若 A 與 B 不相交（即通集 $A \cdot B$ 是空集）則定和集 $A + B$ 的勢爲 $\alpha + \beta$．

從這個定義就知道兩關係

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha, \ (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma).$$

都成立．第一個關係，叫做勢的加法交換律；第二個關係叫做勢的加法結合律．

定義 將 A 的元素 a 和 B 的元素 b，配成 $(a \cdot b)$．'元素對' (a, b) 的全體，稱爲 A 和 B 的配集．若 A 的勢是 α，B 的勢是 β，則 A 和 B 之配集的勢是 $\alpha \cdot \beta = \alpha\beta$．

將 (a, b) 對應於 (b, a)，就知道 A 和 B 的配集對等於 B 和 A 的配集．所以關於勢的乘法，交換律

$$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$$

是成立的．結合律 $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ 和分配律

$$(\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma$$

的成立,依加法和乘法的定義,不難證明.

例如 A 的元素是 x 和 y, 其勢是 2; B 的元素是 a, b, c, 其勢是 3. A 和 B 的配集的諸元素是

$$(x, a), (x, b), (x, c),$$

$$(y, a), (y, b), (y, c),$$

其勢是 $6=2\times 3$. 由是可知勢的乘法定義無害於計數的乘法.

定義 設 A 是勢爲 α 的集, B 是勢爲 β 的集. 以 A 的元素代 B 的一切元素,稱所得的集爲以 A 蓋 B 的一蓋集,用蓋集做元素,這些元素的全部成一集,定這個集的勢是 $\alpha\beta$.

例如 $A=(1, 2, 3)$, $B=(a, b)$; A 的勢是 3, B 的勢是 2. 以 A 蓋 B 的一切蓋集

(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), 其勢都是 2. 蓋集的數凡 9, 就是 3^2. 從這個例子,可以推知勢的乘冖[1],是計數乘冖的拓廣.

勢的指數律是:

$$\alpha^{\beta+\gamma}=\alpha^{\beta}\cdot\alpha^{\gamma},$$

$$\alpha^{\beta\gamma}=(\alpha^{\beta})^{\gamma},\quad (\beta\gamma)^{\alpha}=\beta^{\alpha}\cdot\gamma^{\alpha}.$$

這些等式,都可從定義忠實地證出. 若 $\beta\geqq\gamma$, 那末

$$\alpha+\beta\geqq\alpha+\gamma,$$

$$\alpha\cdot\beta\geqq\alpha\cdot\gamma\cdot\alpha^{\beta}\geqq\alpha^{\gamma}\cdot\beta^{\alpha}\geqq\gamma^{\alpha}.$$

这些都是容易明白的关系.

6. $\aleph_0$ 和 $\aleph$. 設 n 是一自然數,那末

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, 1, 2, 3, 4, \cdots$$

是一可列無限集. 由加法的定義,得着

$$\aleph_0+n=\aleph_0. \tag{1}$$

以自然數的集 N: 1, 2, 3, … 蓋兩個元素的集 (x, y) 得着種種的

1) "冖"這是冪字的古寫,並非簡寫.

自然數對 (m, n)，這些 (m, n) 的全體 B，其勢是 $\aleph_0^2$，但 B 是可列的，所以得着如下的等式：

$$\aleph_0^2 = \aleph_0.$$

由是易知

$$n\aleph_0 = \aleph_0 = \aleph_0^2 = \aleph_0^n \ (n = 1, 2, \cdots). \tag{2}$$

設 $x_1, x_2, \cdots x_n$ 都是有理數，固定 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的順序稱 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 n (度)維空間中之一有理點．由(2)，知 n 維空間的一切有理點是可列的．

在十進位小數中，第 n 位以后的数字都是 0 的，或者都是9的，不過有限個，它們的全體記作A_n，和集

$$Y = A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \cdots$$

是可列的．從一切小數的集 X 除去 Y，得着 Z，Z 的元素都是無限小數，它的有效數字（就是不等於 0 的數字）的個數，不是有限的．

設 $x = 0、a_1 a_2 \cdots$ 和 $y = 0、b_1 b_2 \cdots$ 是兩個無限小數．假如

$$a_1 = b_1, \cdots, a_k = b_k, a_{k+1} > b_{k+1},$$

那末 $y < x$．當 $a_1 = a_2 = \cdots = 9$ 時，x 是 1．

若 x 是 Z 的元素，那末，

$$0 < x < 1.$$

x 是一循環小數的時候，它是 Z 的有理點，這是容易明白的．假如 x 是不循環小數，吾人叫 x 是 Z 的一個無理點．簡稱 Z 爲區間，用記號 $Z = (0, 1)$表示它．然則 Z 的無理點的全部，成一個什麽勢的集呢？要答這個問題，先證

補助定理 加可列集於一無限集，其勢不變．

證明 設 α 是一無限集 A 的勢，我們要證

$$\alpha + \aleph_0 = \alpha.$$

事實上，由 §4 的定理 1，A 必含有可列無限子集 A_1．設

$$A = A_1 + A_2, \ A_1 \cdot A_2 = 0.$$

假如 A_2 的勢是 β，那末，$\alpha = \aleph_0 + \beta$. 所以，利用(2)，

$$\alpha + \aleph_0 = 2\aleph_0 + \beta = \aleph_0 + \beta = \alpha,$$

又設 n 是一自然數，那末，利用(1)和加法的規律，

$$\alpha + n = (\aleph_0 + \beta) + n = (\aleph_0 + n) + \beta = \aleph_0 + \beta = \alpha,$$

所以加入可列集——不問有限或無限——於無限集，其勢不變. 定理證畢.

話又說回來，$X = Y + Z$. 已知 X 的勢是 $\aleph$，Y 的勢是 $\aleph_0$，假如 Z 的勢是 α，那末，利用補助定理，從

$$\alpha + \aleph_0 = \aleph$$

得着 $\alpha = \aleph$，換句話說，區間 $(0, 1)$ 中無理點的全體(是不可列的)其勢是 $\aleph$.

設 n 和 m 是兩個整數，x 和 y 是兩個無限小數. 設

$$a = n + x,\ b = m + y,\ a < b,$$

從 $x = \dfrac{y - a}{b - a}$，知區間$(0, 1)$和區間(a, b)(就是適合 $a < y < b$ 的一切 y)中的點成一一對應. 所以任何區間中的點的全體，其勢是 $\aleph$. 但是有理點的集是可列的，所以任何區間中的無理數的全體，其勢是 $\aleph$. 設 $-1 < y < 1$，從

$$x = \frac{y}{1 - |y|},$$

知道實數(有理數或無理數都稱實數，此外無實數)的全體成一勢是 $\aleph$ 的集. 又稱 $\aleph$ 為連續點集的勢.

無理數未必是代數數，因為代數數的全體是可列的，無理數的全體是不可列的. 無理數不是代數數的時候，叫它做超越數. 由是知道：

超越數的全體具有連續點集的勢.

數學發展到十九世紀的初葉，還沒有明確超越數的存在，1844

年，法人劉維爾[1]才證得超越數是存在的．殊不知三十年後，康妥發表超越數是多得出奇，其勢是 $\aleph$．

稱 $[a, b]$ 为一闭区间；称适合于 $a < x < b$ 的一切 x 的集爲開區間，它的記號是 (a, b)．又記號 $[a, b)$ 和 $(a, b]$ 分別表示適合

$$a \leqslant x < b \quad 和 \quad a < y \leqslant b$$

的 x 全體和 y 全體，都稱爲半閉區間．點集

$$[a, b], [a, b), (a, b], (a, b)$$

的勢都是 $\aleph$，所以從

$$[0, n] = [0, 1) + [1, 2) + [2, 3) + \cdots + [n-1, n]$$

得

$$n\aleph = \aleph, \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots). \tag{3}$$

又從

$$[0, \infty] = [0, 1) + [1, 2) + \cdots$$

得

$$\aleph_0 \aleph = \aleph. \tag{4}$$

从(4)和(2)得

$$\aleph_0^n \aleph = \aleph, (n = 1, 2, 3, \cdots). \tag{5}$$

正方形 $0 < x < 1, 0 < y < 1$ 中點 (x, y) 的集，其勢爲何？要解決這個問題，以十進法無限小數[2]表示正方形的任一點 (x, y) 的 x 和 y：

$$x = 0.a_1 a_2 a_3 \cdots,$$
$$y = 0.b_1 b_2 b_3 \cdots.$$

使小數 $z = 0.a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 \cdots$ 對應於 (x, y)，那末，正方形的點集和區間 $(0, 1)$ 成了一一對應、所以正方形的點集，其勢是 $\aleph$．

平面上的點的全體，可以看做可列無限個正方形

$$m \leqslant x < m+1, \ n \leqslant y < n+1,$$
$$(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

1) 劉維爾 (J. Liouville) (1809—1882)，是創辦法國數學家雜誌 "Journal de Mathematiques" 的，現在往往簡稱這個雜誌是劉維爾期刊．

2) 例如以 0.82999… 代替 0.83 等等，可使 x 和 y 都變成眞正的無限小數．

所組成,故由 $\aleph_0 \cdot \aleph = \aleph$,知:

平面上點的全點,其勢是 $\aleph$.

但是這個平面點集,也可以看做$(-\infty, \infty)$蓋(x, y)的蓋集全體,所以得着 $\aleph^2 = \aleph$. 因之

$$\aleph^n = \aleph, \quad (n = 1, 2, \cdots). \tag{6}$$

當 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 都是有理數或無理數時,稱$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$爲 n 維空間中之一點; x_ν 是這個點的第 ν 坐標. 從(6)知:

n 維空間中的點$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,其全體成一勢爲 $\aleph$ 的集.

乘方 $2^{\aleph_0}$ 具有怎樣的勢? 設 A 是由"保留"和"除去"兩種手續所成的集, A 的勢是 2,以 A 蓋自然數集

$$N: 1, 2, 3, \cdots$$

得着種種自然數的集,都是 N 的子集. 以這些子集做元素,其全體成一集 B, B 的勢是 $2^{\aleph_0}$,現在證明

$$2^{\aleph_0} = \aleph.$$

設 $A^* \sim A$, A^* 的元素是 0 和 1. 以 A^* 蓋 N,得蓋集

$$a_1, a_2, a_3, \cdots,$$

其中的 a_n 或是 0 或是 1. 由是作成級數

$$\frac{a_1}{2^1} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \cdots.$$

這些級數的全體,成一勢是 $2^{\aleph_0}$ 的集 S, S 中任一元素是區間$[0,1]$中的一數. 反過來說, $[0, 1]$ 中的任一數 x, 必可寫成上記形式的級數:因爲當 $x > \frac{1}{2}$ 時, a_1 爲 1;若不然,則 a_1 等於 0; 又 $a_2, a_3, \cdots$都可依此法順次決定. $[0, 1]$的勢是 $\aleph$,所以 S 的勢是 $\aleph$. 就是說: $2^{\aleph_0}$ 等於 $\aleph$,由勢的指數律和 $\aleph_0$ 的性質,

$$2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = \aleph^{\aleph_0}.$$

故得

$$\aleph = 2^{\aleph_0} = \aleph^{\aleph_0}. \tag{7}$$

設 k 是大於 2 的一個自然數,那末

$$2^{\aleph_0} \leqslant k^{\aleph_0} \leqslant \aleph_0^{\aleph_0} \leqslant \aleph^{\aleph_0}.$$

由(7),上式兩端都等於 $\aleph$,所以

$$k^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} = \aleph \quad (k = 2, 3, 4, \cdots). \tag{8}$$

設 $x_1, x_2, \cdots$ 都是$(-\infty, \infty)$中的數,稱

$$(x_1, x_2, x_3, \cdots)$$

是一可列無限維空間中的一點,這個空間就是這些點的全體. 由(7),可列無限維空間所成的點集,其勢是 $\aleph$.

以全區間$(-\infty, \infty)$蓋區間(a, b): $a < x < b$,得種種的蓋集. 任一蓋集叫做區間(a,b)上所定義的一個實函數,這些函數的全體的勢是 $\aleph^{\aleph}$, 這個勢是大於 $\aleph$ 的. 爲什麽呢?

區間$[0, 1]$是一點集. 這個點集的子集,可以看做用"取"和"去"兩種手續蓋$[0, 1]$而得的,所以這些子集全體的勢是$2^{\aleph}$. 由§5 中定理1 的系,

$$2^{\aleph} > \aleph.$$

由(7)和指數律, $\aleph^{\aleph} = (2^{\aleph_0})^{\aleph} = 2^{\aleph_0 \aleph} = 2^{\aleph}$. 所以

$$\aleph^{\aleph} > \aleph. \tag{9}$$

然則有勢大於 $\aleph$ 而小於 $\aleph^{\aleph}$ 的麽? 又有勢居 $\aleph_0$ 和 $\aleph$ 之間的麽? 這些都還是沒有解決的問題,後者就是所謂連續點集的問題. 康妥豫期 $\aleph_0$ 與 $\aleph$ 之間無勢, 因而世人謂之康妥的假設, 或稱連續集的假設, 從康妥的假設所導出的種種結果, 未曾發生過衝突; 有些命題,如果不用這個假設,簡直有束手無策的窘態.

7. 勢的比較 要比勢的大小,先證

褒斯坦的定理[1] 設有A, B兩集, A對等於B的某一子集, B也對等於A的某一子集,那末A與B對等.

證明 設 $B \sim A_1 \subseteq A$, $A \sim B_1 \subseteq B$. 假如

$$A_1 = A \quad \text{或是} \quad B_1 = B,$$

那末,定理無待證明. 所以在

1) 褒斯坦(F. Bernstein)是德國的數學家.

$$B \sim A_1 \subset A, \quad A \sim B_1 \subset B$$

的假設下,證明 $A \sim B$ 好了. B 旣與 A_1 對等, B 的眞子集 B_1 必與 A_1 的一眞子集 A_2 對等,所以

$$A \sim A_2 \subset A_1 \subset A. \tag{1}$$

由是導出 $A \sim A_1$ 好了. A 旣與 A_2 對等, A 的眞子集 A_1 必與 A_2 的一眞子集 A_3 對等,所以

$$A_1 \sim A_3 \subset A_2 \subset A_1. \tag{2}$$

上面從(1)導出(2),所以從(2)可得 $A_2 \sim A_4 \subset A_3 \subset A_2$. 順次進行,得着

$$A = A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \cdots, \quad A_k \sim A_{k+2} \quad (k = 0, 1, \cdots).$$

設 $A_0, A_1, A_2, \cdots$ 的通集是 D,那末,

$$A = D + (A_0 - A_1) + (A_1 - A_2) + \cdots. \tag{3}$$

爲什麼呢? A 中的元素 a, 若是不在 D 中, 那末, a 不爲一切 A_k $(k=0, 1, 2, \cdots)$所共有,所以一定有最初的 A_k 不含有 a. 就是說

$$a \in A_0, \ a \in A_1, \ \cdots, \ a \in A_{k-1}, \ a \bar{\in} A_k.$$

因之 $a \in A_{k-1} - A_k$, 自然(3)的右方的和集是含在 A 中的,所以(3)是眞的.

和集 $D + \Sigma(A_{k-1} - A_k)$ 的任何兩項的通集是空的: 因爲 $A_{k-1} - A_k$ 不含 A_k 的元素,而 D 的元素必屬於 A_k,所以

$$D \cdot (A_{k-1} - A_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots). \tag{i}$$

又 $A_{k-1} - A_k$ 不含 A_k 的元素, $A_k - A_{k+1}$ 光是含有 A_k 的元素, 所以$(A_{k-1} - A_k) \cdot (A_k - A_{k+1}) = 0$,由是注意 $A_k \supset A_{k+1}$,得着

$$(A_k - A_{k+1}) \cdot (A_{k'} - A_{k'+1}) = 0 \quad (k \neq k'). \tag{ii}$$

由(i)和(ii),知所述的事情是對的.

同樣可以證明下記的第一等式, 等式右邊的任何兩項無公共元集:

$$\begin{array}{l} A_1 = D^* + (A_1 - A_2) + (A_2 - A_3) + (A_3 - A_4) + (A_4 - A_5) + \cdots, \\ \quad\ | \qquad\qquad\qquad\qquad\quad | \qquad\qquad\qquad\qquad\quad | \\ A_0 = D + (A_0 - A_1) + (A_1 - A_2) + (A_2 - A_3) + (A_3 - A_4) + \cdots. \end{array}$$

如直綫所示：$D\sim D$，$A_0-A_1\sim A_2-A_3$，$A_1-A_2\sim A_1-A_2,\cdots$。從此可以明白 $A_0\sim A_1$。這就是說：$A\sim B$。證明完畢。

兩集 A,B 間的關係，不出下列互相排斥的四種情形之一：

(1) A 對等於 B 之一子集，B 也對等於 A 之一子集。

(2) A 對於 B 之一子集，B 不對等於 A 的任何子集。

(3) A 不對等於 B 的任何子集，B 對等於 A 之一子集。

(4) A 不對等於 B 的任何子集，B 也不對等於 A 的任何子集。

設 A,B 的勢是 α,β。由優斯坦定理，當

(1) 成立時，$\alpha=\beta$；

(2) 成立時，由定義 $\alpha<\beta$，

(3) 成立時，由定義 $\alpha>\beta$；

(4) 成立時，三個關係 $\alpha=\beta$，$\alpha<\beta$，$\alpha>\beta$ 都不成立。假如兩集 A,B 中有一個是有限集，那末自然(4)不會發生。假如兩者都是無限集，那末無法知(4)决定地不發生，此時無法"比勢"——比較兩集的勢。

假如 α,β,γ 都是勢；那末，

$$\alpha<\beta,\ \beta<\gamma \quad \text{含有} \quad \alpha<\gamma;$$

$$\alpha\leqslant\beta,\ \alpha\geqslant\beta \quad \text{含有} \quad \alpha=\beta.$$

下文對於(4)的情況，我们将深入探討。現在先講有序集的性質以作準備。

8. **有序集　序相**　有理數 $r_1,r_2,\cdots$ 的全體 R 是可列的，

$$R:\ r_1,r_2,r_3,\cdots.$$

兩有理數之間，必有其它的有理數；所以兩有理數間有無數的有理數。因之上述的 $r_1,r_2,r_3,\cdots$ 决非順大小的次序排列的。依大小的順序排列 R 中一切有理數是不可能的事。自然數的集，寫成

$$N:\ 1,2,3,\cdots$$

的時候，有"小者居左"的順序。所以 R 和 N，雖然對等；假如加入大小的順序概念於其間，那末 N 和 R 就有差别了。

順序的概念,可以抽象地來定义它:設 A 是一集,a 和 b 是 A 的任意兩元素. 對於 a 和 b 有一種關係"$\prec$"可說:

$$a \prec b \quad 或是 \quad b \prec a$$

兩者有一個且只有一個成立,所以此關係具有非對稱性. 又假定此關係有傳遞性:

$$a \prec b \quad 和 \quad b \prec c \quad 含有 \quad a \prec c.$$

這種集 A 叫做**有序集**. 總括地說:對於 A 存在着一個關係,此關係具有傳遞性和非對稱性,而且是 A 的任何兩元素所公有的時候,A 是一有序集.

關係 $a \prec b$ 可讀做"a 在 b 後"或"b 在 a 前"a 在 b 前時,a 不在 b 後,這就是非對稱. a 在 b 前,又 b 在 c 前的時候,a 必在 c 前;這就是傳遞性.

從同一集,可得種種不同的有序集. 例如

$$\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots$$

和 $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \cdots$ 是相異兩有序集. 相同兩有序集,不但兩集所含的元素相同,任何兩元素間的關係在兩集中也須相同.

就是說,順序不相同的兩集,是相異的兩有序集.

設 $A \sim B$, A 和 B 都是有序集. A 中元素 a, a' 順次對應於 B 的元素 b, b'. 假如

$$a \prec a' \quad 和 \quad b \prec b'$$

都成立,並且常成立(就是對於任何 a, a', b, b' 成立);那末說 A 和 B 成**相似對應**, A 和 B 是**相似的兩有序集**,記號是

$$A \simeq B.$$

定義 稱相似的兩有序集,有同一**序相**. 計數相同的兩有限有序集,用它們的計數做它們的序相.

所以每一自然數 n,具有兩種意義:一是計數,記集中所含元素的個數;一是序相,記有序集的最後元素,這就是末尾元素的號

碼. 對於自然數的有序集

$$N: 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$$

用“小者居左”做順序的時候,記它的序相是 ω. 逆其順序(小者居右),又得一有序集:

$$N^*: \cdots, n, \cdots, 3, 2, 1.$$

用 ω^* 表示它的序相.

有序集 A 具有元素 a 居其他一切元素之後的話,稱 a 是 A 的首元素. 序相爲 ω 的集必有首元素. 又若有序集 B 有元素 b 居其他一切元素之前,稱 b 是 B 的末元素. 序相爲 ω^* 的集必有末元素. N 有首元素而無末元素, N^* 有末元素而無首元素,所以 N 和 N^* 不相似,因之 ω 和 ω^* 不相同,用記號

$$\omega \neq \omega^*$$

表示它.

定義 從有序集 A 和 B,作另一有序集 $A+B$: 使 A 的任一元素居 B 的任一元素之後, A 中元素的順序和 B 中元素的順序不變,假如 A, B 的序相是 x, y,那末定 $A+B$ 的序相是 $x+y$.

有序集 $1, 2, 3, \cdots, 0$ 具有首元素 1. 末元素 0 序相是 $\omega+1$. 序相是 ω 的集,並無末元素,所以

$$\omega+1 \neq \omega.$$

有序集 $0, 1, 2, 3, \cdots$ 的序相是 ω 也是 $1+\omega$. 所以

$$1+\omega=\omega$$

同樣可知 $\omega+n \neq \omega, n+\omega=\omega \; (n=1, 2, 3, \cdots)$,

$$\omega^*+n=\omega^*, n+\omega^* \neq \omega^*.$$

有序集 $\cdots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots$ 的序相是 $\omega^*+\omega$,它沒有首元素,也沒有末元素. 但是有序集

$$1, 2, 3, \cdots, -3, -2, -1$$

具有首元素 1 和末元素 -1,序相是 $\omega+\omega^*$. 所以

$$\omega^*+\omega \neq \omega+\omega^*.$$

一般地說序相的加法是不服從交換律的. 然而對於序相的加法,結合律

$$(x+y)+z=x+(y+z)$$

是成立的.

有理數的全體,以其自然順序——小者居左的順序——做順序,成一有序集 R,記 R 的序相為 η.

設 a, b, c 都是有序集 A 的元素,當 $a \prec b, b \prec c$ 時,稱 b 在 a 與 c 之間.

定理 設 A 是一無首元素和末元素的可列有序集. 假如 A 的任何兩元素間必有 A 的元素,那末 A 的序相是 η.

證明 R 和 A 都是可列集;它們的一切元素可以寫成敍列如下:

$$R: r_1, r_2, r_3, \cdots,$$
$$A: a_1, a_2, a_3, \cdots.$$

現在用下法將 R 相似對應於 A 的有序子集 A^*. 先將 r_1 對應於 a_1. 假如 R 中的 n 個元素

$$R_n: r_2, r_3, \cdots, r_n$$

已經順次對應於 A 的元素

$$A_n^*: a_1=a_{\nu_1}, a_{\nu_2}, \cdots, a_{\nu_n},$$

那末, r_{n+1} 的對應元素,用下法決定它. 將 R_n 中的元素用"小者居左"的方法列成

$$\bar{r}_1 \prec \bar{r}_2 \prec \cdots \prec \bar{r}_n, \quad (\text{此地的} \prec \text{即} <).$$

那末 r_{n+1} 適合下記三關係

$$(\text{i})\ r_{n+1}<\bar{r}_2, \quad (\text{ii})\ \bar{r}_\nu<r_{n+1}<\bar{r}_{\nu+1}, \quad (\text{iii})\ \bar{r}_n<r_{n+1}$$

之一. 將 A_n^* 排成 A 中的順序: $\bar{a}_1 \prec \bar{a}_2 \prec \cdots \prec \bar{a}_n$. 假如(i)成立,那末,設適合於 $a_\nu \prec \bar{a}_1$ 的 ν 中,其最小的是 ν_{n+1},以 $a_{\nu_{n+1}}$ 做 r_{n+1} 的對應元素. 假如(ii)成立,那末,於適合 $\bar{a}_\nu \prec a_\nu \prec \bar{a}_{\nu+1}$ 的 a_ν,取其添數 ν 最小的,記做(r_{n+1} 的對應元素) $a_{\nu_{n+1}}$. 同樣(iii)成

立的話，用此法得唯一的 $a_{\nu_{n+1}}$. 上述的 a_ν 必然存在；因爲 A 無首元素，無末元素，且任何兩元素之間，必有其它元素的緣故. 如是，由數學歸納法，R 中的任一元素 r_n 對應於 A 的一元素 a_{ν_n}. 這些 a_{ν_n} 的全體，成 A 的一子集 A^*，它的元素是

$$a_{\nu_1}, a_{\nu_2}, a_{\nu_3}, \cdots.$$

保留 A 中順序於 A^*，A^* 是 A 的有序子集. 由 A^* 的作法，知 A^* 與 R 相似. 證明 A^* 就是 A 好了. 因 A^* 爲 A 的子集，證明 A 的一切元素都在 A^* 中好了.

現在用數學歸納法證明一切 a_n 都屬於 A^*. a_1 就是 a_{ν_1}，所以 $a_1 \in A^*$. 從假設

$$a_1 \in A^*, a_2 \in A^*, \cdots, a_n \in A^*$$

導出 $a_{n+1} \in A^*$，就好了. n 個元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的形式既然都是 a_{ν_λ} 所以取 λ 足够的大，它們(就是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$)都在

$$A_\lambda^*: a_{\nu_1}, a_{\nu_2}, \cdots, a_{\nu_\lambda}$$

的裏面了. 設這些 λ 個元素的順序是 $\bar{a}_1 \prec \bar{a}_2 \prec \cdots \prec \bar{a}_\lambda$. 假如 a_{n+1} 也在 A_λ^* 中，那末沒有事情可以證明了. 假如不然，下面的三個關係.

$$\text{(i) } \bar{a}_{n+1} \prec \bar{a}_1, \quad \text{(ii) } \bar{a}_\nu \prec a_{n+1} \prec \bar{a}_{\nu+1}, \quad \text{(iii) } \bar{a}_\lambda \prec a_{n+1}.$$

必有一個成立. 自然，$1 \leqslant \nu < \lambda$.

對應於 A_λ^* 中元素的有理數全部是 R_λ，將 R_λ 中元素列成自然順序

$$\bar{r}_1 \prec \bar{r}_2 \prec \cdots \prec \bar{r}_\lambda.$$

適應於(i)，(ii)，(iii)(其中只有一個成立)，考察三個關係

$$(1)\ r_\mu < \bar{r}_1, \quad (2)\ \bar{r}_\nu < r_\mu < \bar{r}_{\nu+1}, \quad (3)\ \bar{r}_\lambda < r_\mu$$

的一個. 適合這一個關係的 r_μ ($\mu > \lambda$)，自然有無數，設其最小添數 μ 是 s，a_{ν_s} 是對應於 r_s 的元素是屬於 A^* 的. 所以證明

$$\nu_s = n + 1$$

就好了. s 個有理數

$$r, r_2, \cdots, r_n, \cdots, r_\lambda, \cdots, r_s$$

中的最初 λ 個對應元素的全體是 A_λ^*, A_λ^* 含有

$$a_1, a_2, \cdots, a_n.$$

又因 s 是最小的 μ,所以 $r_{\lambda+1}, r_{\lambda+2}\cdots, r_{s-1}$ 都不適合(i),(ii),(iii),中實際所要的一個關係,這個關係為 r_s 所滿足,而對應於這個關係的(i),(ii),(iii)中的一個關係為 a_{n+1} 所滿足,並且 $n+1$ 是最小的添數,所以 a_{n+1} 對應於 r_s, $n+1$ 等於 v_s. 定理證明完畢.

用序相的理論,研討勢的大小,還要先說特種的序相.

9. 良序集 任一子集(保留其元素間的順序)都有首元素的有序集,稱為良序集. 例如自然數集

$$N: 1, 2, 3, \cdots.$$

以其自然順序做順序時,成一良序集. 良序集的子集也是良序集.

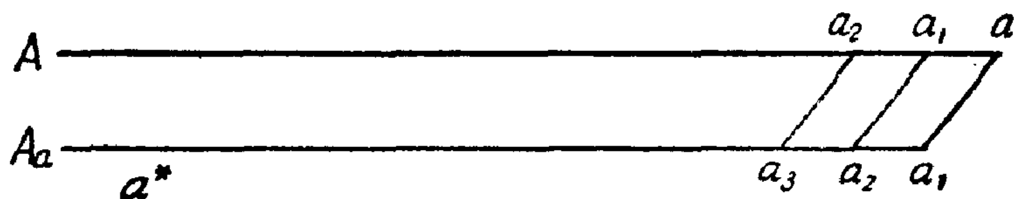
設 A 是一良序集, $a \in A$, 在 a 的前面還有 A 的元素時,這些元素的全體是 A 的一個有序子集;這個子集有首元素 a',稱 a' 適在 a 前. 又設 $A_1 \subset A$, 在 A_1 的一切元素之前尚有 A 的元素時,這些元素中,必有首元素,稱此首元素為適居 A_1 前的元素. 設 $a \in A$, 居 a 後的 A 中一切元素所成之有序集 A_a, 稱為由元素 a 所截成之一節,而 a 不在 A_a 中. a 為首元素時, A_a 是空集.

定理 1. 良序集與其任何一節,決不相似.

證明 假如良序集 A 與其一節 A_a 相似,那末, A 的元素 a 對應於 A_a 的元素 a_1 A 的元素 a_1 對應於 A_a 的元素 a_2, A 的元素 a_2 對應於 A_a 的元素 a_3 $\cdots$. 這些元素的順序是

$$\cdots \prec a_3 \prec a_2 \prec a_1 \prec a$$

這些元素 $a, a_1, a_2, a_3, \cdots$ 必無首元素. 假如它們有首元素 a^*,



那末，A 的 a^* 應該對應於居 a^* 後的某元素，但是 a^* 的後面，並沒有元素，所以這是不會有的事，由是可知 A 不能與 A_a 相似.

系　良序集的任何兩節決不相似.

定理 2.　假如良序集 A 和它的一個子集 A_1 相似，A 中的 a 對應於 A_1 中的 a_1 的話，那末 a_1 必不居 a 之後.

證明　假如定理不成立：$a_1 \prec a$，那末 A 的 a_1 對應於 A_1 的 a_2，$a_2 \prec a_1$. 由是得到

$$\cdots \prec a_3 \prec a_2 \prec a_1 \prec a.$$

這些元素 a_ν 的全體，無首元素，有背於 A 的良序性. 定理證畢.

定理 3.　設 A 和 B 是兩個良序集，那末下列三種情形，必有一種且只能有一種實現：

(1)　A 與 B 相似，(2) A 與 B 的一節相似，(3) B 與 A 的一節相似.

證明　A 和 B 之間的關係不出下面四種情形，這些情形是兩兩互相排斥的.

(i)　A 的任一節與 B 的一節相似，B 的任一節也與 A 的一節相似.

(ii)　A 的任一節與 B 的一節相似，B 有一節不與 A 的任何節相似.

(iii)　A 有一節不與 B 的任何節相似，B 的任一節必與 A 的一節相似.

(vi)　A 有一節不與 B 的任何節相似，B 有一節不與 A 的任何節相似.

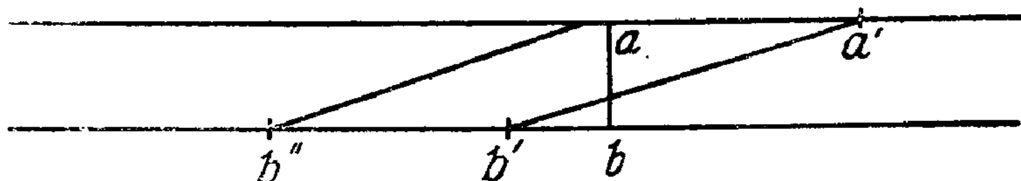
假如 (i) 成立，那末對於 A 的任一元素 a，B 必有元素 b 適合於

$$A_a \simeq B_b$$

此種 b 不能有兩個(定理 1 的系). 將 A 與 B 交換，此理也成立. 如是，任一 a 對應於唯一的 b，任一 b 對應於唯一的 a，所以

$$A \sim B.$$

設 a 和 a' 是 A 的任意兩元素，它們分別對應於 B 中的元素 b 和 b'. 假如 a' 在 a 之前,那末 b' 必在 b 之前. 爲什麼呢? 假如 b' 在 b 之後，



那末從 $A_{a'} \simeq B_{b'}$, $A_{a'}$ 中的 a 必對應於 $B_{b'}$ 中唯一的元素 b''，並且

$$b'' \prec b' \prec b, \quad A_a \simeq B_{b''},$$

然而 $A_a \simeq B_b$,故 $B_b \simeq B_{b''}$. 這是不可能的事(定理 1). 所以(i)成立的時候,A 必與 B 相似.

假如(ii)成立,那末有 B_b 不與 A 的任何一節相似. 設此種 b 的首元素是 b_0,那末,B 的元素 b', b'' 適合

$$b' \prec b_0 \prec b''$$

時，$B_{b'}$ 可與 A 的一節相似，而 $B_{b''}$ 和 B_{b_0} 不與 A 的任何一節相似. 又 A 的任何一節 A_a 必與 B 的一節 B_b 相似,此 b 必居 b_0 的後,由(i),知道

$$A \simeq B_{b_0}.$$

假如(iii)成立,則與(ii)同樣,知有 a_0 適合於 $A_{a_0} \simeq B$.

(iv) 是不會實現的:假如(iv)成立，那末有不與 A 的任何一節相似的 B_b,也有不與 B 的任何一節相似的 A_a. 此種 a 有首元素 a_0,此種 b 有首元素 b_0;而 A_{a_0} 和 B_{b_0} 不會含有這種元素,由(i),必須

$$A_{a_0} \simeq B_{b_0}$$

這個關係不與 a_0 和 b_0 的意義相容，所以(iv)是不會發生的. 證明完畢.

定義　稱良序集的序相爲序數．設 x, y 是良序集 A, B 的序數，當

(i)　$A \simeq B$ 時，定 $x = y$；

(ii)　$A \simeq B_b$ 時，定 $x < y$；

(iii)　$A_a \simeq B$ 時，定 $x > y$.

由定義(ii)和(iii)．知道 $x < y$ 和 $y > x$ 的意義相同．有限有序集必是良序集，它的序數就是自然數．空集的序數是 0．無限良序集的序數，稱爲超限序數，ω 是一超限序數．超限序數簡稱爲超限數，由定義和定理 3 得下述的

定理 4.　設 x 和 y 是兩個序數，那末三個關係

$$x = y,\ x < y,\ x > y$$

必有一個並且只有一個成立．

定理 5.　序數的大小有傳遞性：$x < y$ 和 $y < z$ 含有 $x < z$.

上文已言勢的比較，是不容易說的．但是

定理 6.　兩良序集的勢，是可以比較的．

證明　設 A, B 是兩良序集；α, β 是它們的勢；x, y 是它們的序數．

若　$x = y$，那末，$A \simeq B$，所以 $\alpha = \beta$.

若　$x < y$，那末，$A \simeq B_b \subset B$，此時 $\alpha \leqslant \beta$.

若　$x > y$，那末有 $A_a \subset A$ 且 $A_a \simeq B$，此時 $\alpha \geqslant \beta$.

定理證畢．

系　若　$\alpha < \beta$，則必 $x < y$.

例如　　$1 \prec 2 \prec 3 \prec \cdots \prec a_1 \prec a_2 \prec \cdots \prec a_n$

成一可列良序集，序數是 $\omega + n$．由定義，

$$\omega < \omega + 1 < \omega + 2 < \cdots < \omega + n.$$

所以同勢的良序集，它們的序數未必相等．

10.　超限數　超限歸納法　下文說“序數的集”，指的是以序數爲元素的有序集，它的順序是小者居左的，就是說：以自然順序

做順序的有序集.

定理 1. 設 x 是一序數, X 是小於 x 的一切序數所成的集. 那末, X 是一良序集, 它的序數是 x.

證明 設 A 是以 x 做序數的一個良序集, 證明 X 與 A 相似好了. 設 a 是 A 的一個元素, 那末 A_a 的序數 y 小於 x; 因之 y 屬於 X. 今以 y 對應於 a.

假如 $y \in X$, 那末, $y < x$. 由於 x 是 A 的序數, 所以序數爲 y 的良序集必與 A 的一節 A_a 相似; 此種元素 a 不會有兩個, 所以 A 與 X 相似. 定理證明完畢.

定理 2. 對於任一序數 x, 必有適在 x 前的序數, 這序數就是 $x+1$.

證明 設 X 是小於 x 的一切序數的集, 添加 x 於 X 之前. 成序數爲 $x+1$ 的集 X^*, 這是定理 1 的結果. 因 X^*_x 就是 X, 所以

$$x < x+1.$$

設 $y < x+1$, 那末 X^* 必有序數是 y 的一節 X^*_y. 假如 X^*_y 是 X, 那末 y 等於 x. 假如不然, 那末 X^*_y 一定是 X 的一節, 此時 $y < x$. 總而言之: $y < x+1$. 所以 x 和 $x+1$ 之間, 必無序數介在其間. 就是說: $x+1$ 是適在 x 前的序數.

定理 3. 任一序數集, 必有適在其前的一個序數.

證明 設 Y 是序數的集, y 是 Y 的一序數, (y) 是小於 y 之一切序數的集. 和集

$$X = \sum_{y \in Y} (y)$$

是一良序集, 爲什麼呢? 假如 X 有一個沒有首元素的子集 X^*, 那末從 X^* 任取一數 y, 通集 $(y) \cdot X^*$ 也不會有首元素; 因之 (y) 沒有首元素. 此結果與定理 1 不相容.

X 既然是一良序集, 它有序數 x. 設 $y^* \in X$, 那末 Y 中有 y 適合

$$y^* \in (y) \subseteq X.$$

然由定理 1, x 是(x)的序數,所以 $y^* < y \leqslant x$. 就是說: X 中任一序數 y^* 小於 x.

其次我們證明: $z < x$ 的話, X 中必有 y 大於或等於 z. 假如不然, 那末 X 中任何 y 都小於 z. 因此 X 的任一節相似於(z)的某一節. 由是得着矛盾 $x \leqslant z$. 所以序數 x 適在 Y 之前. 定理證畢.

從定理 3 的證明, 我們知道 Y 是 X 的子集; X 是良序集, 所以 Y 也是良序集. 這就是證明

定理 4. 序數的集,一定是良序集.

定理 5. 良序集的序數必不小於它的任一子集的序數.

證明 設 A 是一良序集, $A^* \subset A$, A 和 A^* 的序數分別是 x 和 x^*.

現在要證 $x^* \leqslant x$. 由定理 1,不妨假設 A 是(x). 假如 $x^* > x$, 那末 x 必在(x^*)之中; 因之(x)是(x^*)的一節$(x^*)_x$. 現在 $A = (x^*)_x$ 的子集 A^* 與(x^*)相似,由這個相似關係,後者的一個元素 x 映照於前者的一個元素 x'. 由 §9 的定理 2, $x' \geqslant x$, 這是不可能的事. 證明完畢.

一切有限序數所成的有序集

$$(\omega):\ 0, 1, 2, 3, \cdots$$

它的序數是 ω, ω 是適在一切有限序數前的序數, 是最小的超限序數(定理 1). 由定理 2.

$$(\omega, 2):\ \cdots \omega, \omega+1, \omega+2, \omega+3, \cdots$$

是一列順次前進的序數. 適在$(\omega, 2)$之前的序數, 由定理 2, 是存在的, 記此序數爲 $\omega \cdot 2$, 適在諸序數

$$\omega = \omega \cdot 1, \omega \cdot 2, \omega \cdot 3, \cdots, \omega \cdot n, \cdots$$

之前的序數, 記它做 ω^2. 同樣我們來定義序數 $\omega^3, \omega^4, \cdots$. 又設 a_0, a_1, …都是自然數或 0,那末當 k 是一自然數時,

$$\omega^k \cdot a_0 + \omega^{k-1} \cdot a_1 + \cdots + \omega \cdot a_{k-1} + a_k$$

也是一個序數, 在這些序數之前, 有一序數(最小的) ω^ω. 記這些

一切序數的集爲 Z_1.

假如(x)沒有最大的序數,叫 x 做極限序數. 當 $a_0 \neq 0$ 時,具有形式

$$\omega^k \cdot a_0 + \omega^{k-1} \cdot a_1 + \cdots + \omega \cdot a_{k-1}$$

的序數,都是極限序數. 假如序數 x 不是極限序數,那末 $x-1$ 也是序數;就是說:對於非極限序數必有適在其後的序數.

利用超限數,完全歸納法可以擴充爲超限歸納法.

定理 6. 設命題 A 與序數有關係. 假如 A 具有下面的兩個性質:

(i) 當序數 x_0 時, A 是眞理,

(ii) 設 $x > x_0$, 對於適合 $x_0 \leqslant y < x$ 的 y, A 是眞理的時候, A 當 x 時也是眞理.

那末,對於大於 x_0 之任一 x, A 是眞理.

證明 假如有大於 x_0 的 x, A 當 x 時,不是眞理. 這種 x 既然存在,一定有最小的,設此最小序數是 y_0, 那末對於適合

$$x_0 \leqslant y < y_0$$

的 y, A 是眞理. 由(ii) A 當 y_0 時,也成眞理. 此與 y_0 的意義不相容. 證明完畢.

11. 序數之勢 兩良序集的序數假如都是 x,那末兩集同勢,以 μ_x 表示它們相同的勢. 稱 μ_x 是 x 的勢,由 §9 的定理 5 和它的系,

$$x > y \quad 含有 \quad \mu_x \geqslant \mu_y,$$

而 $\mu_x > \mu_y$ 含有 $x > y$.

設 α 是一良序集的勢,適合

$$\mu_x = \alpha$$

的一切 x, 必有最小的,稱此最小序數爲 α 的開始序數. 適合於

$$\mu_x = \aleph_0$$

的一切 x 成一序數的集,用記號 $Z(\aleph_0)$或是 Z_2 表示, Z_2 的開始序

數是 ω.

定理 1. 以序數之勢做元素的集,依其自然順序所成的有序集是一良序集.

證明 設 A 是一序數之勢所成集. A 的每一元素,必有它的開始序數. 所以這些開始序數的全體與 A 成相似對應,前者是良序的,所以後者也是良序的. 證明完畢.

良序集一定是可列的麼?

定理 2. 良序集不一定是可列的,事實上,良序集 $Z(\aleph_0)$ 的勢 $\aleph_1$ 大於 $\aleph_0$.

證明 設 ω_1 是適在 Z_2 前的序數,由前節定理 3 的證明,下面的集

$$X = \sum_{y \in Z_2} (y)$$

是一良序集,它的序數等於 ω_1. 由於上式中的集(y)都是可列的,假如 $\aleph_1 = \aleph_0$ 的話,那末 Z_2 也是可列了;因之 X 成一可列集,且

$$\mu_{\omega_1} = \aleph_0,$$

由是 $\omega_1 \in Z_2$;這是不可能的事,所以 $\aleph_1$ 大於 $\aleph_0$. 證明完畢.

然則 $\aleph_1$ 與 $\aleph_0$ 之間,還有其他的勢麼?

定理 3. $\aleph_0$ 與 $\aleph_1$ 之間,無其他的勢.

證明 設 α 是小於 $\aleph_1$ 的一(無限集的)勢. Z_2 的勢是 $\aleph_1$ 所以 Z_2 有一眞子集 A, 其勢是 α. 有序集 A 的序數 x 小於或等於 ω_1. 假如 $x = \omega_1$, 那末 $\alpha = \aleph_1$; 這是和 α 的假設相衝突的,所以 $x < \omega_1$, 因之 x 是 Z_1 中的一數, α 等於 $\aleph_0$.

定理 4. 對於以序數之勢做元素的集 A, 必存在一勢適大於 A 中一切勢.

證明 設 x 是一序數,其勢 μ_x 小於或等於 A 中某元素 α:

$$\mu_x \leqslant \alpha.$$

設 X 是此種 x 的全體, ω' 是適在 X 前的序數. 設

$$\aleph' = \mu_{\omega'}, \ \beta < \aleph'.$$

那末，β 是一序數的勢，適合 $\beta=\mu_y$ 的序數 y 小於 ω'，所以 $y \in X$. 因之 β 小於或等於 A 的某元素，由 ω' 的性質，知道 $\aleph'$ 是適大於 A 中一切勢的勢. 證明完畢.

設 $Z_3 = Z(\aleph_1)$ 是適合 $\mu_x = \aleph_2$ 的 x 的全體，其勢是 $\aleph_2$，那末 $\aleph_2$ 是適大於 $\aleph_1$ 的勢. 此論可以逐漸進行，而得順次相繼的勢：

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \cdots < \aleph_\omega < \aleph_{\omega+1} < \cdots.$$

12. 選取公理與勢的比較 任何兩勢都可以比較它們的大小麼？任何集必可列成良序集麼？這些問題，在策墨羅[1]的選取公理之下都給它們肯定的回答.

選取公理 設M是集，M的一切(不空)子集，可同時分別取定一代表元素.

詳細地說：設 $A, B, C, \cdots$ 是M的一切(不空)子集；那末，M有一子集 S 如下：$SA, SB, SC, \cdots$ 都有一個特定的元素.

定理 1. 給任意集以適當的(元素間的)順序，可使其成爲良序集.

这是康妥所豫料的事情，即所謂康妥的整列定理，現在利用選取公理證明它.

證明 設 A 是任意一集，a_0 是 A 的代表元素. 設 x 是具有下述性質之一序數：當 $y < x$ 時，y 對應於 A 的元素 a_y，而

$$B \equiv A - \sum_{y<x} a_y \neq 0;$$

此時記 B 的代表是 a_x，設此種 x 的全體是 X，z 是適在 X 前的序數. 那末，

$$A - \sum_{y<z} a_y = 0.$$

所以 A 變成序數 z 的良序集. 定理證畢.

利用這個整列定理，就可以證明

1) 策墨羅(E. Zermelo)德國數學年刊第六十五卷(1908).

定理 2. 設A,B是任意兩集,A的勢是α, B的勢是β,那末下面三個關係

$$\alpha=\beta,\ \alpha>\beta,\ \alpha<\beta.$$

必有一個成立,且只有一個成立.

證明 三個關係$\alpha=\beta$,$\alpha>\beta$,$\alpha<\beta$互相排斥的理由,已詳於§7. 今證這三個關係,必有一個成立. 由定理1,A與B都可整列成爲良序集;此時設A的序數是x,B的序數是y.

若$x=y$, 則$\mu_x=\mu_y$, 即$\alpha=\beta$,

若$x>y$, 則$\mu_x\geqslant\mu_y$, 即$\alpha\geqslant\beta$,

若$x<y$, 則$\mu_x\leqslant\mu_y$, 即$\alpha\leqslant\beta$.

所以當$\alpha\neq\beta$時,$\alpha>\beta$或$\alpha<\beta$,兩者必有一成立. 定理證畢.

13. 集的概念與數學的基礎 十九世紀的數學家克朗內格[1]說過:"上帝創造了自然數,其餘的一切都是人工". 這是唯心論者的說法,當然要不得. 有些數學家,就以克朗內格上述的話做出發點,想把全部數學演繹出來:例如古朗[2]就取了這種態度,將數學築在上帝的頭上了. 我們知道,幾何學和代數學的基礎,是羣的概念,而羣是特種的集,近代數學的基礎可以說是築在集的概念上的. 那麼,什麼是集呢?

集論的創設者康妥的定義是這樣的:"把一定的並且彼此可以明確識別的東西——東西可以是直觀的對象,也可以是思惟的對象——放在一起,叫做'集'". ——詳見德國的數學年報第四十六卷(1895).

但是英國的 B. 羅素(B. Russell)有下述的考察——見他的'數學原理'第一册(1903)第十章或他的'數學哲學引論'第十三章

1) 克朗內格(Leopold Kroneckor) 1823—1891 "Die ganze Zahl schuf der liebe Gott, Alles Uebrige ist Menscherwerk".

2) 古朗(Richard Courant),上述說法是見他與 H. 老頻司(Robbins)合著的"何謂數學"(1948)一書.

——集可以分爲兩種：

第一種集是：集本身不是它的元素（$M \bar{\in} M$），

第二種集是：集本身是它的一個元素（$M \in M$）．

凡集不是第一種就是第二種，兩種集彼此可以明確識別，所以由康妥的定義，第一種集的全體成一集 Q．假如 Q 是第一種集，那末 Q 應該是 Q 的一個元素：

$$Q \in Q \tag{1}$$

然而滿足 $M \in M$ 的關係的集是第二種集，這是矛盾．

假如 Q 是第二種集，那末(1)又成立；但是 Q 的任何元素都是第一種集，Q 又是第一種集了，這又是矛盾．這叫做羅素的悖理．又序數非序數當然有區別的，故由康妥的定義序數全體成一集 O，適在 O 前若必有一序數（§10 的定理 3），此序數不屬於 O，這也是悖理；集論引起這個悖理，康妥自己也老早明白，但是世人往往稱之謂布拉利福帝[1]的悖理．

集論含有悖理，數學的基礎，自然不能說是很鞏固的．然則數學基礎如何使它安如磐石呢？ 策墨羅[2]設置公理系統於集論以明集之所以爲集．上文已經用了他的選取公理，下面是他的

劃分公理 設 M 是一集，$\pi(x)$是和變元素 x 有關的一句話——命題函數，M中的 x，使 $\pi(x)$ 成眞話的全體，成一集（M的一個子集）$M_{\pi(x)}$．

今用劃分公理證明

定理 任何一集M必具有一子集不是M的元素．

證明 設 $x \bar{\in} x$ 是 $\pi(x)$．由劃分公理，

$$M_0 = M_{\pi(x)}$$

是一集．證明 $M_0 \bar{\in} M$ 好了．

假如 $M_0 \in M$，那末，兩關係 $M_0 \in M_0$，$M_0 \bar{\in} M_0$必有一個，並

1) 布拉利福帝(Burali Forti)．

2) 策墨羅(Zermelo)有集論的基礎一文，載德國的數學年報第六十五卷(1908)．

且只有一個成立．前者成立的話，$M_0 \in M_0$，M_0 既然是 M_0 的一元素，它必適合命題 $x \notin x$，就是 $M_0 \notin M_0$；這是矛盾．假如後者成立：$M_0 \notin M_0$，這就是說 M_0 能使 $\pi(x)$ 成立，從而 $M_0 \in M_0$；這是矛盾．定理證畢．

從這個定理，容易明白上述羅素的 Q 並不是集：假如不然，那末由剛剛證明了的定理，Q 有子集 Q_1 適合 $Q_1 \notin Q$．這個 Q_1 確是第一種集，爲什麽？假如 Q_1 是第二種集的話，那末，$Q_1 \in Q_1$．但是 Q_1 的元素都屬於 Q；由 $Q_1 \in Q_1$．知

$$Q_1 \in Q.$$

這關係與 $Q_1 \notin Q$ 相衝突；所以 Q 不是一集．Q 既然不是集，不必問它是第一種或是第二種．羅素的悖理在劃分公理之下，是不會發生的．

已經發現了的悖理——例如羅素的悖理，設置公理系統以限制集的意義後，可以除去．但是在所設的公理系統之下，從事進行推理，能保證不發生悖理麽？換句話說：公理系統自身能無矛盾麽？

德國數學家希爾栢脫[1]鑑於策墨羅學派[2]有頭痛醫頭脚痛醫脚的缺點，這個缺點起源於集的定義和"傳統的邏輯"之間有矛盾，他立意想把這些缺點徹底澄清，將傳統的邏輯如排中律等也視爲公理而納入於數學中，名之曰公理化的數學（Axiomatisierte Mathematik），再從有限的，直觀的立場來研究公理化的數學，稱其所獲得的結果爲超數學（Metamathematik）．這方面的專著，有希爾栢脫與其門人阿克曼合寫的"數理邏輯基礎"[3]．但是用希

---

1) 希爾栢脫 (David Hilbert), 1862—1943.

2) 福倫格爾 (A. Fränkel), 宣福理斯 (A. Schönflies), 方諾伊曼 (Von Neumann) 都屬於這一派．

3) 此書 (Grundzüge Der Theoretischen Logik) 於 1928 年出版，1938 年再版．1949 年三版，1958 年，莫紹揆把它譯成中文，科學出版社印行．

爾栢脫這種方式來奠數學的基[1]是不會成功的，因爲這個學派，抽去數學對象的一切內容，將理論形式化起來，妄想把數學成爲“科學的科學”怎麽辦得到呢？數學只表現實際世界的一個特殊面——量和空間，不允許把更事誇大的。

第一章　習　題

1. 假如 $A \subseteq B$, $B \subseteq A$, 那末 $A = B$.

2. 假如 $A \sim B$, $B \sim C$, 那末 $A \sim C$.

3. 假如有映照法使 $A \sim B$,間這種 φ 是否限於一個？

4. 適合於 $a < x < b$ 的一切 x,成一不可列集.

5. 設 n 是有限集的個數,證明 $n < \aleph_0 < \aleph$.

6. 設 m, n, m, n, k 都是自然數,

$$f(m,n) = n + \frac{1}{2}(m+n-1)(m+n-2).$$

先證下面的事實：

(i) $f(m, n) = f(m', n')$含有 $m = m'$, $n = n'$,

(ii) 對於 k,必有 m 和 n 適合 $f(m, n) = k$.

然後證明自然數對的全體 $\{(m, n)\}$ 是可列的.

7. 設 α, β, γ 都是勢,證明

$$(\alpha \cdot \beta)\gamma = \alpha(\beta \cdot \gamma), (\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma.$$

8. 設 A, B, C 是三個集,證明$(A + B)C = AC + BC$.

9. 設C 是兩個有限集 A 和 B 的配集,證明C 的元素個數等於 A 和 B 的元素個數的乘積.

10. 設 A, B, C 是三個集,證明 $AB + C = (A + C)(B + C)$.

11. 設 m, n 是兩個自然數；A, B 的計數是 m, n. 間以 A 蓋 B 的蓋集共若干個？

12. 證明關於勢的三個指數律.

---

1) 參閱恩格斯的反杜林論.

13. 設 α, β, γ 是三個勢．若 $\beta \geqslant \gamma$，則

$$\beta^{\alpha} \geqslant \gamma^{\alpha}, \quad \alpha^{\beta} \geqslant \alpha^{\gamma}.$$

14. 設 α, β, γ 是三個勢，當 $\beta > \gamma$ 時，問下面四個關係

$\alpha + \beta > \alpha + \gamma$，$\alpha\beta > \alpha\gamma$，$\alpha^{\beta} > \alpha^{\gamma}$，$\beta^{\alpha} > \gamma^{\alpha}$ 是否都成立？

15. 設 T 是 A 的子集全體所成之集，假如 A 是一有限集，其勢 α 大於 1，那末 T 的勢是 2^{α}.

16. 設 $A_1, \cdots, A_n$ 都是可列集，$a_{\nu} \in A_{\nu}$．證明 $(a_1, \cdots, a_n)$ 的全體是一可列集．

17. 設 $x_1, x_2, \cdots$ 是一數列，證明它的子數列的全體，其勢是 $\aleph$.

18. 設 M 是一無限集，它的元素是區間，其中任何兩元素，都不相重疊，那末 M 的勢是 $\aleph_0$.

19. 區間 (a, b) 上所定義的一切連續函數（它的定義詳初等微積分）所成之集，其勢是 $\aleph$.

20. 設 α, β, γ 是三個勢，證明

(i)　當 $\alpha < \beta$，$\beta \leqslant \gamma$ 時，$\alpha < \gamma$；

(ii)　當 $\alpha \geqslant \beta$，$\beta \geqslant \gamma$ 時，$\alpha \geqslant \gamma$；

(iii)　當 $\alpha \leqslant \beta$，$\alpha \geqslant \beta$ 時，$\alpha = \beta$.

21. 設 x, y, z 是三個序相，證明 $(x + y) + z = x + (y + z)$.

22. 把小於 1 的一切正有理數列成自然順序，它的序相怎樣？

23. 作三個有序集，使它們的序相是

(i) $1 + \eta + 1$，　(ii) $\eta + \omega$，　(iii) $\omega^* + \eta$.

24. 設 A 和 B 是兩個良序集；α, β 是它們的勢；x, y 是它們的序數．從 $\alpha = \beta$ 能否斷定 $x = y$？

25. 假如良序集 A 的序數是 $\omega^k \cdot a_0 + \omega^{k-1} \cdot a_1 + \cdots + a_n$，那末 A 是一可列集．其中 $k, a_0, a_1, \cdots, a_n$ 都是自然數或是 0.

26. 設 x 是一如下的極限序數：小於 x 的一切序數成一可列集證明有如下的序數列 $x_1, x_2, \cdots$：

(i)　$x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$，

(ii) 當 $y<x$ 時,必有 m 適合於 $y<x_{m+p}<x\ (p=1,2,\cdots)$.

27. 對於有理數,施行 $+$, $-$, $\times$, $\div$, $\sqrt{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$, …等有限回運算.這樣所得的數的全體是可列的麼?

第　二　章

實　　數

1. 整數的公理　第一章裏面，雖然有些地方，利用實數來舉例說明，然而並沒有說什麼是實數；本章設置公理系統來規定'整數'，由此出發而逐步獲得實數的概念.

基本用語有三：'整數'，'等於'，'小於'. 用 a, b, c, x 等文字表示整數，'$=$'表示等於，'$<$'表示小於. 而 $\neq$ 是 $=$ 的否定，$\nless$ 是 $<$ 的否定. 記號'$\leqslant$'表示等於或小於.

公理 1.　0 是一個整數.

公理 2.　對於 a，必有 c 使 $a<c$.

公理 3.　若 $a<b$，則 $b\nless a$.

公理 4.　對於 a，必有 d 適合 $d<a$，當 $x<a$ 時，$x\leqslant d$.

定義　設 S 是一整數的集. 假如 S 有元素(整數) a 小於 S 中其他任一元素時，稱 a 是 S 的最小整數.

公理 5.　假如 $a\neq b$, $b\neq c$, $c\neq a$；那末 a, b, c 中必有最小整數.

公理 6.　設 S 是一整數的集. 假如 S 無最小整數，那末無整數小於 S 的一切整數.

從這些整數的公理，導出定理於下.

定理 1.　$a\nless a$.

證明　此由於公理 3. 定理證畢.

定理 2.　$a<b$ 和 $b<c$ 含有 $a<c$.

證明　$a\neq b$, $b\neq c$ (定理 1). 又 $a\neq c$：假如不然，由假設 $a<b$, $b<c$ 得着

$$a<b \text{ 和 } b<a$$

了,由公理 3 知道沒有此事.

現在 a, b, c 適合於公理 5 的假設;所以必有最小者. 最小者不會是 b,因 $a<b$;又不會是 c,因 $b<c$. 所以 a, b, c 中,以 a 爲最小;從而 $a<c$. 證明完畢.

定理 3. 若 $a \neq b$ 則必 $a<b$ 或 $b<a$.

證明 對於 a,由公理 2,有 c 使 $a<c$. 若 c 就是 b,那末 $a<b$,證明已成. 若不然,則得

$$a \neq b, \quad b \neq c, \quad c \neq a.$$

由公理 5; a, b, c 中必有最小數. 這個最小數,不等於 c,因 a 小於 c;所以非 a 即 b. 從而 $a<b$ 或 $b<a$. 定理證畢.

定理 4. 對於 a 和 b,三關係 $a=b$. $a<b$, $b<a$ 必有一個成立,且只能有一個成立.

證明 a 和 b 之間,兩關係 $a=b$ 和 $a \neq b$ 中有一個成立,且只能成立一個. 假如 $a=b$,那末

$$a \nless b, \quad b \nless a \qquad (\text{定理 } 1).$$

假如 $a \neq b$,那末,$a<b$ 或 $b<a$ (定理 3). 兩者不能同時成立(公理 3). 證明完畢.

定理 5. 對於 a 必有如下的 b: $a<b$,且當 $a<x$ 時,$b \leqslant x$.

證明 對於 a 必有如下的 x: $a<x$ (公理 2). 設此種 x 的全體是 S. S 必有最小數(公理 6). 此最小數就是所需要的 b. 證明完畢.

現時暫稱公理 4 中的 d 爲 a 的後者,又稱定理 5 中的 b 爲 a 的前者.

定理 5 的證明中的 S,其最小數不能有兩個(公理 3),所以 a 的前者不能有兩個. 又 a 的後者也不能有兩個,爲什麼? 假如 a 有兩個不同的後者 d_1 與 d_2,那末由定理 3,可以假定 $d_1<d_2$. 因 $d_2<a$, d_1 是 a 的後者;所以 $d_2 \leqslant d_2$. 這結果和 $d_1<d_2$ 相衝突,

所以 d_2 等於 d_1. 由是得到

定理 6. 任一整數的前者和後者,都限於一個.

定理 7. a 的前者之後者是 a, a 的後者之前者也是 a.

證明 設 a 的後者是 a', a' 的前者是 a''. 那末

$$a' < a,\ a' < a''.$$

所以 $a'' \leqslant a$ (定理 5). 假如 $a'' < a$, 那末 $a'' \leqslant a'$ (公理 4). 此與 $a' < a''$ 相衝突. 所以 $a'' = a$.

同樣可證 a 的前者之後者是 a. 證明完畢.

整數系統 由公理 1, 0 是一整數. 由 0, 0 的前者和後者, 前者的前者和後者的後者, 一切等等, 合成整數的集, 稱爲整數系統, 記之以 I. 所以 I 的特徵如下:

(i) $0 \in I$, (ii) $a \in I$ 時, a 的前者和後者, 都屬於 I.

定理 8. 由公理 1——公理 6 所決定的 I, 包含一切整數(整數系統的完備性).

證明 假設有整數 a 不屬於 I, 從此就能導出不合理的結果. 設 $b \in I$, 那末 $a \neq b$, 由定理 3.

$$a < b \text{ 或 } b < a.$$

假如 $a < b$, b 的後者爲 b'. 由後者的定義及公理 4, 知道

$$a \leqslant b'.$$

因爲 $a \bar{\in} I$, $b' \in I$, 所以 $a \neq b'$. 因之 $a < b''$. 設 I 中適合 $a < b$ 的 b 之全體是 S. S 必無最小數, 爲什麽呢? 假如 S 有最小數 b_0, 那末記 b_0 的後者爲 b_0'. 從 $a < b_0$, 得着

$$a < b_0'.$$

由 I 和 S 的性質, $b_0' \in S$. 於是得到矛盾: S 中有數小於 S 的最小數.

S 既無最小數, a 的存在與公理 6 不相容.

所以 $b < a$. 設 T 是這種 a——就是說: a 不屬於 I, I 有 b 小於 a——的全體. 由公理 6, T 有最小數 a_0. 設 a_0 的後者是 a_0'

那末 a_0' 必在 I 中. 因爲 T 是不在 I 中的整數之全體. a_0' 旣在 I 中. a_0' 的前者也在 I 中. 由定理 7, a_0' 的前者就是 a_0. 由是 $a_0 \in I$, 這是矛盾. 證畢.

定義　設 S 是一集,其元素都是整數. 假如 S 有元素 b,使得當 $x \in S$ 時 $x \leqslant b$;那末稱 b 是 S 的最大數. 特別,假如 S 僅含兩元素 a 和 b, b 爲 S 的最大數——$a < b$——時,稱 b 大於 a,以記號

$$b > a$$

表示.

所以 $a < b$ 與 $b > a$ 是同一事實的兩種表示.

定理 9.　假如整數之集 S 沒有最大數, 那末沒有整數大於 S 的一切數.

證明　假如有整數大於 S 的一切數,記這種整數的全體爲 T. 由公理 6, T 必有最小數 a, 那末 a 後者 a' 不屬於 T 而屬於 S (公理 4). 如是 a' 是 S 的最大數,這是矛盾. 所以沒有整數可以大於 S 的任何數. 證明完畢.

定理 10.　設 A 是和整數有關的一句話. 設 A 當整數 a 時是眞話. 設 $a < c$, A 當 c 時是眞話,就有 A 當 c 的前者時,也是眞話,那末, A 當適合

$$a \leqslant x$$

的任何 x, 都是眞話.

這是數學歸納法的原理,證明與定理 9 相同.

定理 11.　設 A 是和整數有關的一句話. 設 A 當 a 時是眞話. 設 $c < a$, A 當 c 是眞話時,就有當 c 的後者時,也是眞話,那末 A 當適合

$$x \leqslant a$$

的任何 x, 都是眞話.

這是定理 10 的另一種形式. 最後,我們還要證明六條公理互

相獨立.

定理 12. 公理 1——公理 6 互相獨立.

證明 公理 1 決不是其餘公理的結果,爲什麼? 假如把空集看做整數的全部——換句話說,沒有整數,無害於公理 2——公理 6 的眞確性.

其次,假設 $\cdots, -3, -2, -1, 0$ 是整數的全部,小者居左.那末,對於這個'整數系統',除公理 2 而外,都能成立. 所以公理 2 不是其他諸公理的結果.

設 $\cdots, -2, -1, 0, 0, 1, 2, 3, \cdots$ 是整數系統,小者居左;那末除公理 3 而外,一切公理都滿足,所以公理 3 有它的獨立性.

設 $0, 1, 2, \cdots$ 是整數系統;我們知道公理 4 不是其他諸公理的結果.

設 $0, a, b$ 是整數的全體,且設

$$0 < a, \ a < b, \ b < 0.$$

這個整數的集$(0, a, b)$無背於公理 1, 2, 3, 4, 6. 所以公理 5 有他的獨立性.

最後假設

$\cdots, -3', -2', -1', 1', 2', \cdots, -2, -1, 0, 1, 2; 3, \cdots$ 是整數的全部,小者居左,那末公理 1——5 都能適合. 惟獨公理 6 不能滿足,所以公理 6 有它的獨立性. 證畢.

注意: 自然數的公理,創自彼阿諾(1889)[1]. 彼阿諾的自然數系 N 的公理有五條:

(i) N 含有 1;

(ii) 若 N 含有 a,則含有 a 之唯一的前者——暫記它做 a';

(iii) 若 $x \in N$, 則 $x' \neq 1$;

(vi) 設 $x \in N, y \in N$, 當 $x' = y'$ 時, $x = y$;

(v) 若 M 具有下面的兩個性質:

---

1) 彼阿諾 (G. Peano, 1858—1932), 意大利的數學家.

$$1 \in M,\ x \in M \text{ 含有 } x' \in M.$$

那末M就是N.

這五公理互相獨立,且具有完備性.

2. 整數的四則運算 記0的前者爲1,後者爲-1. 設$x \in I$,記x的前者爲$x+1$,後者爲$x-1$,得着一切整數$a(0<a)$的記號(由數學歸納法):

$$0,\ 0+1,\ 0+1+1,\ \cdots.$$

由定義,$1=0+1$, $-1=0-1$. 要簡化這個記法,設$1<g$,
$g_1=0+1$, $g_2=g_1+1$, $\cdots$, $g_\nu=g=g_{\nu-1}+1$,

$$g+g_1=g_1g_1;\ g_1g_1+1=g_2g_2\cdots g_1g_{\nu-1}+1=g_20;$$

$$g_20+1=g_2g_1;\ \cdots.$$

適合於$0<a$的整數a,稱爲正整數,由是用ν個記號$0, g_1, \cdots g_{\nu-1}$可以表示一切正整數了. 最簡單的表示法是二進位法:就是用0和1表示一切正整數. 最普通的表示法是十進位法;就是用

$$0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$$

十個記號表示一切正整數.

加法 設a和b是兩整數,那末規定$a+b$也是一個整數,稱之爲a與b的和,其意義如下:

$$A:\ (a+b)+1=a+(b+1).$$

關係(A)足以定任何兩整數a與b的和$a+b$的意義. 爲什麼? 由A,

$$a+1=a+(0+1)=(a+0)+1.$$

所以$a+0=a$. 這就是說$a+b$當$b=0$時,已經明白了它的意義. 設$0<b$, $a+b$的意義已經明白的話,那末由(A), $a+$ $+(b+1)$的意義是$a+b$的前者. 所以當$b \geqq 0$時,一切$a+b$都有了它的意義,此由於數學歸納法. 設$b<0$,那末由(A),

$$a+b=\{a+(b+1)\}-1. \qquad \text{(前節定理 7)}$$

所以假如$a+(b+1)$是一整數，那末他的後者就是$a+b$，因之當b是0的後者時，$a+b$有了意義． 由前節定理11，對於一切b，$a+b$都有意義．

定理 1. 若a, b, c都是整數，那末

$$a+(b+c)=(a+b)+c,$$

這是整數加法的結合律，我們可以用數學歸納法來證明它．

證明 由(A)，知結合律當$c=1$時成立．若加法結合律當c時成立：

$$A_c\colon\ a+(b+c)=(a+b)+c,$$

那末，$(a+b)+(c+1)=[(a+b)+c]+1\ (A)=$

$$=a+[(b+c)+1]=a+[b+(c+1)],\ (A_c, A).$$

所以結合律當$c+1$時亦成立． 由數學歸納法知A_c對於一切正整數c都成立．

同樣可證A_c當$c<1$時成立．證畢．

定理 2. 設a，b是兩整數，那末$a+b=b+a$.

這是整數加法的交換律．

證明 先證

(i) $a+1=1+a$, (ii) $a+(-1)=(-1)+a$.

a為1時(i)成立．假設(i)當$a=k$時成立，那末，

$$(k+1)+1=(1+k)+1=$$
$$=1+(k+1).$$

又0是1的後者，也是-1的前者，所以$(-1)+1=1+(-1)$．所以

$$[k+(-1)]+1=k+[(-1)+1]=k+[1+(-1)]=$$
$$=(k+1)+(-1) \qquad \text{(結合律)}$$
$$=(1+k)+(-1) \qquad \text{(假設)}$$
$$=1+[k+(-1)] \qquad \text{(結合律)}$$

由數學歸納法，知(i)常成立．可以同样证明之．

我們已經證明交換律當 $b=1$ 時成立．假設 $a+b=b+a$ 成立．那末，當 c 是 1 或 -1 時，

$$a+(b+c)=(a+b)+c=(b+a)+c \quad (\text{結合律,假設})$$
$$=b+(a+c)=b+(c+a) \quad (\text{結合律,(i),(ii)})$$
$$=(b+c)+a. \quad (\text{結合律})$$

證明完畢．

定理 3. 對於整數 a 必有整數 $\bar{a}$，適合 $a+\bar{a}=0$，此種 $\bar{a}$ 只有一個．

證明 上文已證明 $a+0=a$．所以 $\bar{0}=0$．假設 $a+\bar{a}=0$．當 c 是 1 或 -1 時，則 $\bar{c}$ 為 -1 或 1．由是

$$(a+c)+(\bar{a}+\bar{c})=(a+c+\bar{a})+\bar{c}=(c+a+\bar{a})+\bar{c}=$$
$$=(c+0)+\bar{c}=c+\bar{c}=0.$$

所以當 $a+\bar{a}=0$ 時，$\overline{a+1}=\bar{a}-1$，$\overline{a-1}=\bar{a}+1$．由數學歸納法，對於任何整數 a，有 $\bar{a}$ 適合 $a+\bar{a}=0$．

次設 $a+\bar{a}=0$，$a+a'=0$，那末，

$$a'=a'+0=a'+(a+\bar{a})=(a'+a)+\bar{a}=0+\bar{a}=\bar{a}.$$

證明完畢．

定義 定理 3 中的 $\bar{a}$，稱它做 a 的反號數．稱正整數的反號數為負整數．若 a 是一正數，那末記 $\bar{a}$ 為 $-a$．

乘法 設 a 和 b 是兩數，定 $a\times b(=a\cdot b=ab)$ 也是一個整數，稱為 a 和 b 的乘積，簡稱做積，下記兩個關係決定兩數的積：

$$M:\quad a\cdot 1=a,\ a(b+1)=ab+a.$$

由 M 及數學歸納法，當 $b\geqslant 1$ 時，ab 確是整數．又假如 $a(b+1)$ 是一整數，那末，

$$a(b+1)+\bar{a}=ab+a+\bar{a}=ab+0=ab,$$

所以 ab 也是整數．所以對於任何整數 a 和 b，ab 確定一整數．

定理 4. 設 a 是一整數，那末，

$$a+0=0+a=a \qquad 0+0=0,$$

$$a\cdot 0=0\cdot a=0,\qquad 0\cdot 0=0.$$

證明 尚待證明的是最後一項諸關係：

$$a\cdot 0=a\cdot 0+a+\bar{a}=a(0+1)+\bar{a}=$$
$$=a\cdot 1+\bar{a}=a+\bar{a}=0,$$

又由 M, $0\cdot 1=0$, $0(b+1)=0\cdot b$, 所以 $0\cdot a$ 等於 0 (數學歸納法). 證明完畢.

乘法的運算規律：可用數學歸納法和 M 來建立. 下面的定理, 詳明了這些規律.

定理 5. 設 a, b, c 是整數, 那末,

分配律: $(b+c)a=ba+ca$,

結合律: $a\cdot(bc)=(ab)\cdot c$,

交換律: $a\cdot b=b\cdot a$.

若 $0<b$, 那末, $(-1)\cdot b=-b$. 事實上, 從加法和乘法的運算規律,

$$(-1)1+1=1(-1+1)=0,\qquad -1+1=0,$$

所以 $(-1)1=-1$. 若 $(-1)k=-k(0<k)$, 那麼

$$(-1)(k+1)=(-1)k+(-1)1=-k-1=-(k+1).$$

由數學歸納法, 知 $(-1)b=-b$ 對於一切正整數 b 成立.

減法 簡寫 $a+((-1)\cdot b)$ 爲 $a-b$, 稱它爲 a 減 b 的差, a 是被減數, b 是減數, 簡記 $0-b$ 爲 $-b$.

設 a 和 b 是任意兩整數, 那末,

$$b+(a-b)=(b+a)+(-1)b=(b+(-1)b)+a.$$

若 b 是一正整數, 那末 $(-1)b=-b=\bar{b}$, 是 b 的反號數, 因之

$$b+(a-b)=0+a=a.$$

現在證明 $b<0$ 時, 上式也成立. 這是因爲負整數 b 可以記做 $-b_1$, b_1 是一正整數. 而由 $(-1)(-1)=1$ 知

$$b+(a+(-1)b)=-b_1+a+(-1)\{(-1)b_1\}=a.$$

所以減法的意義是求適合於

$$b + x = a$$

的 x. 也可以說:減法是加法的逆運算.

要講除法,先證

定理 6. 若 $ab = 0$, 那末, $a = 0$ 或 $b = 0$.

證明 若 a 和 b 都是正的,那末,從

$$a \cdot 1 > 0$$

$$a(k+1) = ak + a = ak + (a-1) + 1 >$$
$$> ak + (a-1)$$

與數學歸納法,知道 ab 一定是正的.

若 a, b 都是負整數,那末

$$ab = (-1)a \cdot (-1)b > 0.$$

又若 $a < 0$, $b > 0$,那末,

$$ab = (-1) \cdot (-1)a \cdot b = -\{(-1)a \cdot b\} < 0.$$

所以當 $a \neq 0$, $b \neq 0$ 時, $ab \neq 0$. 證明完畢.

系 設 a, b, c 都是整數, c 不是 0. 假如 $ac = bc$,那末, a 等於 b.

除法 設 a 和 b 是兩整數, b 不是 0. 作具有形式 xb 的一切整數:

$$(b): \cdots, -3b, -2b, -b, 0, b, 2b, 3b, \cdots.$$

假如 b 是正整數,那末(b)中的數,小者居左. 若 b 是負數,那末小者居右. (b)中未必有 a,假如(b)中有 a,那末,

$$a = qb \qquad (q \text{ 是一整數});$$

稱 b 是 a 的一因數(因子), a 是 b 的一個倍數; a 可用 b 除盡, a 是被除數, b 是除數, q 是以 b 除 a 的商. 這是乘法的逆運算,叫做除法.

假如(b)中無 a,那末一定有一整數 q 適合於

$$qb < a < (q+1)b \qquad (b > 0 \text{ 的時候}),$$

或是

$$(q+1)b < a < qb \qquad (b < 0 \text{ 的時候}).$$

當 $b>0$ 時，若無 xb 大於 a，則無整數大於 a，這是有背於公理 2. 而大於 a 的 xb 中，必有最小的數 $(q+1)b$，這種 q 不過一個. 此時

$$a=qb+r, \qquad 0<r<b.$$

得定理如下：

定理 7. 設 a，b 是兩整數，而 $b>0$，那末一定有唯一的一對整數 q，r，適合 $a=qb+r$ 其中 $0\leqslant r<b$.

b 除 a 時，q 是商，r 是餘數.

定理 7 乃整數論的基礎.

3. 有理數 設 a, b 是兩整數，$b\neq 0$，稱有序集 (a, b) 爲一有理數. 設 (a, b) 和 (c, d) 是兩有理數，當 $ad=bc$ 時，稱 (a, b) 與 (c, d) 相等：

$$(a, b)\doteq(c, d).$$

若 $ad\neq bc$，那末 $(a, b)\neq(c, d)$. 記 $(ad+bc, bd)$ 爲 (a, b) 與 (c, d) 的和，(ac, bd) 爲 (a, b) 與 (c, d) 的積，所以

$$(a, b)+(c, d)=(ad+bc, bd),$$

$$(a, b)\cdot(c, d)=(ac, bd).$$

從這個定義和整數的運算規律，就得着

定理 1. 關於有理數的加法和乘法，結合律，交換律分配律都成立.

設 (a, b) 是一有理數，那末，

$$(a, b)+(0, 1)=(a, b),$$

$$(a, b)\cdot(0, 1)=(0, 1).$$

所以有理數中的 $(0, 1)$ 和整數系統中的 0 相似. 因

$$(a, b)+(-a, b)=(ab-ab, bb)=(0, 1).$$

所以 $(-a, b)$ 是 (a, b) 的反號數.

定理 2. 設 (a, b)，(c, d) 是兩有理數，那末有唯一的有理數 (x, y) 適合

$$(a, b) = (x, y) + (c, d).$$

證明 置$(x, y) = (a, b) + (-c, d)$,那末定理 2 中等式成立. 現在證明$(x, y)$的唯一性:假如

$$(x, y) + (c, d) = (x', y') + (c, d),$$

那末$(xd + cy, dy) = (x'd + cy', dy')$,因之

$$dy'(xd + cy) = dy(x'd + cy'),$$

$$ddxy' = ddx'y, dd(xy' - x'y) = 0,$$

然 $d \neq 0$,所以 $xy' - x'y = 0$ (前節定理 6). 因之

$$(x', y') = (x, y).$$

證明完畢.

定義 定理 2 中的(x, y)稱爲(a, b)減(c, d)的差,記號是

$$(a, b) - (c, d) = (ad - bc, bd).$$

從有理數α減去有理數β,就是求α與β的反號數之和.

因$(a, b)(1, 1) = (1, 1) \cdot (a, b)$所以$(1, 1)$與整數系統中的 1 相似. 設 $(a, b) \neq (0, 1)$,那末 $a \neq 0$, 所以(b, a)也是一個有理數,因

$$(a, b)(b, a) = (ab, ba) = (1, 1).$$

因此說(b, a)是(a, b)的倒數. 將(a, b)的倒數乘(c, d),得着

$$(b, a)(c, d) = (bc, ad),$$

所以 $x = (bc, ad)$適合於$(a, b)x = (c, d)$. 假如有理數

$y = (e, f)$也滿足$(a, b)y = (c, d)$,那末,

$$(ae, bf) = (c, d), cbf = ade,$$

所以 $y = (e, f) = (bc, ad) = x$. 今稱適合

$$(a, b)x = (c, d)$$

的有理數 x,爲以(a, b)除(c, d)的商記之以$(c, d)/(a, b)$. 所以當

$$(a, b) \neq (0, 1)$$

時,商$(c, d)/(a, b) = (bc, ad)$是一有理數.

比較

$(a, 1) + (b, 1) = (a + b, 1)$	$a + b = a + b$
$(a, 1) = (b, 1)$	$a = b$
$(a, 1)(b, 1) = (ab, 1)$	$ab = ab$

諸關係,知道有理數 $(a, 1)$, $(b, 1)$,… 間的運算與整數 a, b,…間的運算,規律全同. 此後規定

$$(a,1) = a.$$

如是,整數系統 I 成爲有理數全體 R 之一部分.

改寫(a, b)爲 $\dfrac{a}{b}$,有理數 $\dfrac{a}{b}$ 也稱爲分數, a 是它的分子, b 是它的分母. 分子 a 是分母 b 的倍數 qb 時,有理數

$$(a, b) = (qb, b) = (q, 1) = q.$$

是一整數. 關於有理數的大小,其定義如下:

定義 設有理數(a, b),(c, d)的分母 b, d 都是正的. 那末,

當 $ad < bc$ 時,$(a, b) < (c, d)$或$(c, d) > (a,b)$.

當 $(0, 1) < (a, b)$時,稱(a, b)是一正的有理數;

當 $(a, b) < (0, 1)$時,稱(a, b)是一負的有理數,

設 $x = (a, b)$. 若 $x \geqslant (0, 1)$, 寫 $|x| = x$,假如 $|x| < (0, 1)$,那末 $|x| = -x = (-a, b)$. 稱 $|x|$ 爲 x 的絕對值.

由此定義,易證

定理 3. 若 α 和 β 是兩有理數,那末

$$|\alpha + \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|, \quad |\alpha + \beta| \geqslant |\alpha| - |\beta|.$$

兩整數 a 與 $a + 1$ 之間,無其他的整數;然任何相異兩有理數

$$\alpha = (a, b), \ \beta = (c, d), \ (b > 0, d > 0)$$

之間有無數的有理數$(ma + nc, mb + nd)(m, n = 1, 2, 3, \cdots)$.

所以有理數沒有鄰接的事, 這個事實叫做有理數的稠密性. 就是說,任何兩有理數之間,必有有理數.

乘冪 設 α 是一有理數, n 是正整數. 規定

$\alpha' = \alpha, \alpha^0 = 1 \ (\alpha \neq 0), \ \alpha^{n+1} = \alpha \cdot \alpha^n, \ \alpha^{-n} = \dfrac{1}{\alpha^n}(\alpha \neq 0)$, 稱

a^n 爲 a 的 n 乘方，a 是乘方的底，n 是乘方的指數．稱 a^2 爲 a 的平方，a^3 爲 a 的立方． 設 α 和 β 是兩有理數，m 和 n 是兩整數．那末，當 $\alpha\beta \neq 0$ 時，

$$\alpha^m \cdot \alpha^n = \alpha^{m+n}, (\alpha^m)^n = \alpha^{mn}, \alpha^m\beta^m = (\alpha\beta)^m.$$

這些關係叫做有理數的指數律；利用數學歸納法容易建立的．

4. 無理數論 無理數是什麼?這個問題的嚴密回答，到十九世紀後半葉才得到．從事這項工作的人有康妥、梅類、特德金特和外爾斯托拉斯，他們差不多同時得到無理數的理論．他們的理論，都用有理數理論做基礎． 康妥、梅類、外爾斯托拉斯[1] 三家立論形式或異，實質相同． 康妥、梅類兩家的無理數論簡直是一樣的，梅類立說，先於康妥，然而未爲世人所留意． 特德金特的理論，不同於其他三家，當詳述於後；今先述康妥，梅類的理論．

設 $a_1, a_2, \cdots$ 都是有理數，ε 是任意的正有理數；假如對於 ε，必有 m，使不等式

$$|a_m - a_{m+p}| < \varepsilon \qquad (1)$$

對於一切正整數 p 成立，則稱 $\{a_n\} = a_1, a_2, \cdots$ 爲一基本數列．

對於有理數列 $\{a_n\}$，若有有理數 A 適合於

$$a_n < A \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots),$$

那末，稱 $\{a_n\}$ 是一有上界的數列． 若 $a_n > A\,(n = 1, 2, \cdots)$，那末，稱 $\{a_n\}$ 是一有下界的數列．數列 $\{a_n\}$ 適合

$$a_n \leqslant (\geqslant)\, a_{n+1} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

時，稱爲增加(減少)數列；兩者通稱爲單調數列．

定理 1. (i) 有上界的增加數列是一基本數列．

(ii) 有下界的減少數列是一基本數列．

證明 設 $a_n \leqslant a_{n+1} < A\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$． 若(i)不成立，那末一定有正數 ε，對於任一 m，不能使(1)對於一切正整數 p 成立．所以對於 n_0 有如下的 n_1:

1) 外爾斯托拉斯，柏林大學 1860 年的講義；康妥 1872；梅類(Ch. Méray), 1869.

$$|a_{n_0}-a_{n_1}|\geqslant\varepsilon,\ n_1>n_0;$$

對於 n_1，有 n_2，使 $|a_{n_1}-a_{n_2}|\geqslant\varepsilon,\ n_2>n_1$. 設 ν 是正整數，對於 $n_{\nu-1}$ 必有 n_ν，使 $|a_{n_{\nu-1}}-a_{n_\nu}|\geqslant\varepsilon,\ n_\nu>n_{\nu-1}$. 由是

$$a_{n_\nu}>a_{n_{\nu-1}}+\varepsilon>\cdots>a_0+\nu\varepsilon.$$

取 ν 甚大，可使 $a_0+\nu\varepsilon>A$；因之 $a_{n_\nu}>A$. 此與假設相衝突，所以 $\{a_n\}$ 是一基本數列.

同樣可證(ii)，證明完畢.

有上界且有下界的數列，稱爲**有界數列**.

定理 2. 基本數列是一有界數列.

證明 設 $\{a_n\}$ 是一基本數列，那末必有 m，對於一切正整數 p 使

$$|a_m-a_{m+p}|<1$$

成立. 因 $|a_m|$ 與 $|a_{m+p}|$ 的差小於或等於 $|a_m-a_{m+p}|$，所以

$$|a_{m+p}|<|a_m|+1,\quad (p=1,2,\cdots).$$

設 m 個數 $|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_{m-1}|,|a_m|+1$ 中最大的是 A，那末

$$|a_n|\leqslant A\qquad (n=1,2,\cdots).$$

證明完畢.

定理 3. 假如 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是兩個基本數列，那末

$$\{a_n+b_n\},\ \{a_n-b_n\},\ \{a_nb_n\}$$

都是基本數列. 又假如有有理數 c 適合 $|b_n|>c>0$，那末

$$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$$

也是一個基本數列.

證明 設 ε 是一正有理數，那末必有 m 和 m' 適合

$$|a_m-a_{m+p}|<\frac{1}{2}\varepsilon,\ |b_{m'}-b_{m'+p}|<\frac{1}{2}\varepsilon,$$

$$p=1,2,3,\cdots.$$

設 $m>m'$，那末，

$$|b_m-b_{m+p}|\leqslant|b_{m'}-b_m|+|b_m-b_{m+p}|<\varepsilon.$$

由定理 2,有有理數 A 適合 $|a_n|<A$, $|b_n|<A$.由是

$$|(a_m \pm b_m)-(a_{m+p} \pm b_{m+p})|=$$
$$=|(a_m-a_{m+p}) \pm (b_m-b_{m+p})|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon,$$

所以 $\{a_m+b_m\}$ 和 $\{a_m-b_m\}$ 是兩個基本數列. 又因

$$|a_m b_m-a_{m+p} b_{m+p}|=|a_m(b_m-b_{m+p})+b_{m+p}(a_m-a_{m+p})|<$$
$$<A\varepsilon+A\varepsilon=2A\varepsilon,$$

所以 $\{a_n b_n\}$ 是一基本數列. 最後,從

$$\left|\frac{a_m}{b_m}-\frac{a_{m+p}}{b_{m+p}}\right|=\left|\frac{a_m(b_{m+p}-b_m)+b_m(a_m-a_{m+p})}{b_m b_{m+p}}\right|<$$
$$<\frac{A\varepsilon+A\varepsilon}{c^2},$$

知道 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ 也是一基本數列.

定義 稱一基本數列是一**實數**. 設 $a=\{a_n\}$ 和 $b=\{b_n\}$ 是兩實數. 假如對於任一正有理數 ε, 有 m 適合

$$|a_{m+p}-b_{m+p}|<\varepsilon \qquad (p=1, 2, \cdots)$$

時,稱 a 與 b 相等: $a=b$. 假如有正有理數 δ 和 m,使

$$a_{m+p}-b_{m+p}>\delta$$

對於一切正整數 p 成立, 則稱 a 大於 b : $a>b$; 或稱 b 小於 a: $b<a$.

定理 4. 設 $a=\{a_n\}$, $b=\{b_n\}$ 是兩實數. 三個關係

$$a=b, \quad a>b, \quad a<b$$

必有一個成立,且只有一個成立.

證明 因 a 與 b 都是基本數列,所以對於任一有理數 ε,有 m 適合於

$$|a_m-a_{m+p}|<\varepsilon \text{ 和 } |b_m-b_{m+p}|<\varepsilon \quad (p=1, 2, \cdots).$$

因之 $|(a_m-b_m)-(a_{m+p}-b_{m+p})|<2\varepsilon$. 所以

$$a_m-b_m-2\varepsilon<a_{m+p}-b_{m+p}<a_m-b_m+2\varepsilon,$$
$$(p=1, 2, 3, \cdots)$$

假如有 ε 使上式兩端同符號；那末，當兩數都是正的時候，置

$$\delta = a_m - b_m - 2\varepsilon,$$

我們得着 $a_{m+p} - b_{m+p} > \delta > 0$，此時 $a > b$，而 $a \neq b$ 且 $a \nless b$.
又若兩端都是負數，則置

$$b_m - a_m - 2\varepsilon = \delta,$$

我們得着 $b_{m+p} - a_{m+p} > \delta > 0$，此時 $b > a$，而 $a \neq b$ 且 $b \nless a$.

假如取 ε 儘管小，$a_m - b_m - 2\varepsilon$ 與 $a_m - b_m + 2\varepsilon$ 異符號，那末，從

$$a_m - b_m + 2\varepsilon > 0, \quad a_m - b_m - 2\varepsilon < 0$$

得 $|a_{m+p} - b_{m+p}| < 4\varepsilon \quad (p = 1, 2, \cdots)$. 此時 $a = b$，并且 $a < b$ 和 $b < a$ 都不能成立．證明完畢．

定理 5. 若 $\{a_n\} = \{a'_n\}$，$\{b_n\} = \{b'_n\}$，則必

$$\{a_n + b_n\} = \{a'_n + b'_n\}, \{a_n - b_n\} = \{a'_n - b'_n\}$$

$$\{a_n b_n\} = \{a'_n b'_n\},$$

又若 $b_n \neq 0$ $b'_n \neq 0$ 且 $\{b_n\} \neq \{0\}$，則

$$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} = \left\{\frac{a'_n}{b'_n}\right\}.$$

證明 由假設，對於任一正有理數 ε，有 m 適合

$$|a_{m+p} - a'_{m+p}| < \varepsilon, \ |b_{m+p} - b'_{m+p}| < \varepsilon \quad (p = 1, 2, 3, \cdots)$$

又因基本數列必有界，所以有 A 適合 $|a_m| < A$，$|b_n| < A$．$|a'_n| < A$，$|b'_n| < A$．由是，

$$|(a_{m+p} \pm b_{m+p}) - (a'_{m+p} \pm b'_{m+p})| < 2\varepsilon,$$

$$|a_{m+p} b_{m+p} - a'_{m+p} b'_{m+p}| < 2A\varepsilon.$$

所以 $\{a_n \pm b_n\} = \{a'_n \pm b'_n\}$，$\{a_n b_n\} = \{a'_n b'_n\}$．又因 $\{b_n\} \neq$ $\neq \{0\}$，$\{b'_n\} \neq \{0\}$，所以有正有理數 δ 如下：

$$|b_{m+p} - 0| > \delta \ |b'_{m+p} - 0| > \delta, \quad (p = 1, 2, \cdots).$$

從而

$$\left|\frac{a_{m+p}}{b_{m+p}} - \frac{a'_{m+p}}{b'_{m+p}}\right| < \frac{2A\varepsilon}{|b_{m+p} b'_{m+p}|} < \frac{2A\varepsilon}{\delta^2} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

所以 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} = \left\{\frac{a'_n}{b'_n}\right\}$. 定理證畢.

由定理 5, 得到了實數的加法、減法和乘法的

定義 設 $a = \{a_n\}$, $b = \{b_n\}$ 是兩實數, 則稱實數(定理 3)

$$\{a_n + b_n\}, \{a_n - b_n\}, \{a_n b_n\}$$

爲 'a 加 b 的和', 'a 減 b 的差', 'a 與 b 的乘積'; 順次記做

$$a + b,\ a - b,\ ab.$$

由此定義, 易證

定理 6. 關於實數的加法、乘法、交換律、結合律和分配律都成立. 就是說: 當 a, b, c 是實數時,

$$a + b = b + a,\ (a + b) + c = a + (b + c),$$

$$ab = ba,\ (ab)c = a(bc),$$

$$(a + b)c = ac + bc.$$

定義 若 $a = \{a_n\}$, $b = \{b_n\} \neq \{0\}$, 則 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ 爲以 b 除 a 的商, 記之以 $\frac{a}{b}$.

設 a 是一有理數, a_n 都等於 a, 那末將實數 $\{a_n\}$ 記做

$$a^* = \{a\}.$$

此種實數 a^* 間的運算和大小關係與有理數間的運算和大小關係, 實質相同; 例如 $a^* < b^*$ 時 $a < b$. 實數 a^* 的概念, 雖然和有理數 a 的概念不相同, 但是下文並沒有區別它們的必要. 所以, 對應於有理數 a 的實數 a^*, 就稱它爲實數 a. 由是有理數全體, 成爲實數的一部分了. 若實數 $\{a_n\}$ 不對應於有理數, 就是說, $\{a_n\} \neq \{a\}$ (a 是有理數)的時候, 稱 $\{a_n\}$ 爲一**無理數**. 無理數的存在, 詳明於下節. 有理數體的稠密性, 已述於前; 現在還要闡明實數的稠密性.

定理 7. 設 $a = \{a_n\}$, $b = \{b_n\}$ 是兩實數. 若 $a \neq b$, 則必有有理數 c 居 a 與 b 之間.

證明 設 $a > b$，則有正有理數 δ 和 m 如下：

$$a_{m+p} - b_{m+p} > \delta \quad (p = 1, 2, 3, \cdots).$$

由基本數列的性質，有 μ 適合於 $\mu > m$；且

$$|a_{\mu+p} - a_\mu| < \frac{1}{4}\delta, \quad |b_{\mu+p} - b_\mu| < \frac{1}{4}\delta.$$

置 $a_\mu - \frac{1}{2}\delta = c$，那末，

$$a_{\mu+p} - c = (a_{\mu+p} - a_\mu) + \frac{1}{2}\delta > -\frac{1}{4}\delta + \frac{1}{2}\delta = \frac{1}{4}\delta > 0.$$

所以 $a > c$. 又由

$$c - b_{\mu+p} = (a_\mu - b_\mu) + (b_\mu - b_{\mu+p}) - \frac{1}{2}\delta > \delta - \frac{1}{4}\delta - \frac{1}{2}\delta =$$

$$= \frac{1}{4}\delta,$$

得 $c > b$. 總之，$a > c > b$. 證明完畢.

定義 大於 0 (即 0^*) 之實數稱為正數，小於 0 之實數，稱為負數. 記號 $-\{a_n\}$ 表示 $\{-a_n\}$. 稱 $|a|$ 為 a 的絕對值，其意義是：

當 $a \geqq 0$ 時，$|a| = a$，當 $a < 0$ 時，$|a| = -a$.

由有理數的性質，易證

定理 8. 設 a 和 b 是兩實數，則 $|ab| = |a| \cdot |b|$,

$$|a| - |b| \leqq |a+b| \leqq |a| + |b|.$$

當 $b \neq 0$ 時，$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

用有理數的基本數列做出發點，來建立實數的理論，得到了有理數以外的數——無理數. 然則從實數的'基本數列'做出發點，還可以得着實數以外的數麼？ 實數的基本數列之定義和理論，可以仿照有理數的基本數列表述出來：設 ε 是任一正數，a_n 都是實數，若有 m 適合

$$|a_m - a_{m+p}| < \varepsilon \quad (p = 1, 2, \cdots)$$

時，稱 $\{\alpha_n\}$ 是一實數基本數列．用這種數列所定義的"新數"，其大小、相等、和、差、積和商的定義，可依前說出．又設 α 是一實數，定 $\{\alpha\}$ 就是 α．今證實數的基本數列 $\{\alpha_n\}$ 一定表示實數．設 $\varepsilon > 0$，有 m 如下：

$$|\alpha_m - \alpha_{m+p}| < \varepsilon \quad (p = 1, 2, \cdots).$$

於此不妨假設 $\alpha_n \neq \alpha_{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$．由定理 7，α_n 與 α_{n+1} 之間必有有理數 a_n；而

$$|a_m - a_{m+p}| < |a_m - \alpha_m| + |\alpha_m - \alpha_{m+p}| + |\alpha_{m+p} - a_{m+p}| <$$
$$< |\alpha_m - \alpha_{m+1}| + \varepsilon + |\alpha_{m+p} - \alpha_{m+p+1}| < 3\varepsilon.$$

所以 $\{a_n\}$ 是一有理數的基本數列，它確定一個實數．由減法的定義：

$$\{\alpha_m\} - \{a_m\} = \{\alpha_m - a_m\} = \{0\}.$$

最後，從 $|\alpha_{m+p} - a_{m+p}| < |\alpha_{m+p} - \alpha_{m+p+1}| < \varepsilon$ 得到：

$$\{\alpha_n\} = \{a_n\}.$$

所以從實數的基本數列，決不會產生新的數．記 $\alpha = \{a_n\}$．

定理 9. 設 $\{\alpha_m\}$ 是一實數的數列．假如對一任意正數 ε，有 m 適合

$$|\alpha_m - \alpha_{m+p}| < \varepsilon \quad (p = 1, 2, 3, \cdots),$$

那末必有如下的實數 α：$|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon \ (n > m)$，

定義 對於任一正數 ε，有 m 適合 $|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon \ (n > m)$ 時，稱 $\{\alpha_n\}$ 收斂於 α，$\{\alpha_n\}$ 是一收斂數列．此時稱他有極限存在，其極限值是 α，以記號

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$$

表示之．

由定理 9 得着

定理 10. 極限 $\lim \alpha_n$ 存在的充要條件，是對於任一正數 ε，有 m 適合

$$|\alpha_m - \alpha_{m+p}| < \varepsilon \quad (p = 1, 2, 3, \cdots).$$

極限値 $\lim a_n$ 存在時，它是一個實數.

極限的概念，是數學基礎概念之一，它建築在實數概念之上；所以，無理數論是數學的一個基本理論.

5. 實數的表示法 設 g 是大於 1 的一個正整數，m_0 是任一正整數，那末有一組整數 $a_0, a_1, \cdots a_n$ 適合於

$$m_0 = a_0 + a_1 g + a_2 g^2 + \cdots + a_n g^n, \qquad (1)$$

$$0 \leqslant a_0, \cdots, a_n < g, \; a_n > 0.$$

這樣的整數 $a_0, \cdots, a_n$ 只有一組，因爲 a_0 是以 g 除 m_0 的剩餘，所以 $0 \leqslant a_0 < g$. 置 $m_0 = m_1 g + a_0$, m_1 是以 g 除 m_0 的商，所以 a_0, m_1 只有一組（見前整數的除法）. 如是進行，適合

$$m_\nu = m_{\nu+1} g + a_\nu \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$0 \leqslant a_\nu < g$$

的 a_ν 和 $m_{\nu+1}$ 僅限於一組. 當 $m_n < g$ 時，置 $a_n = m_n$，則(1)成立，且知 $a_0, \cdots, a_n$ 限於一組；而 $a_n > 0$. 所以用 g 個記號 0, 1, $\cdots$, $g-1$ 就可以表示一切正整數了. 設 m 是一正整數，則 $-m$ 是一負整數. 如是，一切整數都有了記號. g 爲 10 時，就是十進法.

設 $b_1, b_2, \cdots$ 都是小於 g 而大於 0 的整數. 置

$$a_n = \frac{b_1}{g} + \frac{b_2}{g^2} + \cdots + \frac{b_n}{g^n},$$

那末

$$|a_m - a_{m+p}| = \frac{1}{g^{m+1}}\left(b_{m+1} + \frac{b_{m+1}}{g} + \cdots + \frac{b_{m+p}}{g^{p-1}}\right) <$$

$$< \frac{g}{g^{m+1}}\left(1 + \frac{1}{g} + \cdots + \frac{1}{g^{p-1}}\right) < \frac{1}{g^m}.$$

所以 $\{a_n\}$ 是一實數，用記號

$$a = \frac{b_1}{g} + \frac{b_2}{g^2} + \cdots = \{b_1, b_2, b_3, \cdots\}$$

表示. 稱 $\{b_1, b_2, \cdots\}$ 是一 g 進位小數. 因 $a_n < 1$，所以一切小數

都在 [0, 1] 之中.

定理 1. 任何實數必為一整數與小數之和. 設 b_0 是一整數, 那末

$$b_0 + \{b_1, b_2, \cdots\}$$

是實數的一般形式.

證明 設 x 是一實數,則必有整數 b_0 適合

$$b_0 \leqslant x < b_0 + 1.$$

因之, $0 \leqslant g(x - b_0) < g$. 所以有整數 b_1 適合

$$b_1 \leqslant g\,(x - b_0) < b_1 + 1, \quad 0 \leqslant b_1 < g.$$

若 $b_0, b_1, \cdots, b_n$ 具有性質 $0 \leqslant b_\nu < g$ $(\nu = 1, 2, \cdots, n)$和

$$x = b_0 + \frac{b_1}{g} + \cdots + \frac{b_n}{g^n} + x_n, \quad 0 \leqslant x_n g^{n+1} < g,$$

那末必有整數 b_{n+1} 適合 $b_{n+1} \leqslant x_n g^{n+1} < b_{n+1} + 1, 0 \leqslant b_{n+1} < g$. 因

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 0.$$

所以 $x = b_0 + \{b_1, b_2, \cdots\}$. 定理證畢.

然則不同兩小數可以表示同一實數麼? 設

$$\{b_1, b_2, \cdots\} = \{c_1, c_2, \cdots\},$$

$$b_1 = c_1, b_2 = c_2, \cdots, b_{n-1} = c_{n-1}, b_n > c_n,$$

則

$$0 < b_n - c_n = \frac{c_{n+1} - b_{n+1}}{g} + \frac{c_{n+2} - b_{n+2}}{g^2} + \cdots \leqslant$$

$$\leqslant \frac{g-1}{g}\left(1 + \frac{1}{g} + \frac{1}{g^2} + \cdots\right) = 1.$$

因 $b_m - c_m$ 是一整數,所以從 $0 < b_m - c_m \leqslant 1$, 得 $b_n - c_n = 1$. 因之

$$c_{n+1} - b_{n+1} = c_{n+2} - b_{n+2} = \cdots = g - 1,$$

$$c_{n+1} = c_{n+2} = \cdots = g - 1,\ b_{n+1} = b_{n+2} = \cdots = 0.$$

定理證畢.

定理 2. 若 $x=\{b_1, b_2, \cdots\}=\{c_1, c_2, \cdots\}$, $b_1=c_1, \cdots, b_{n-1}=$ $=c_{n-1}$, $b_n > c_n$, 則 x 是一有理數,其形式爲

$$x=\frac{b_1}{g}+\frac{b_2}{g^2}+\cdots+\frac{b_n}{g^n}.$$

當 $b_{n+1}=b_{n+2}=\cdots=0$ 時,稱 $\{b_1, b_2, \cdots\}=\{b_1, \cdots, b_n\}$ 爲一有限小數.

有限小數必爲一有理數,那末,怎樣的有理數可用有限小數來表示呢?若有理數 $\frac{r}{q}$ 的分子 r 與分母 q 間無大於 1 的公因子,稱 $\frac{r}{q}$ 爲一既約分數. 正整數 p 除 1 與 p 而外無因子時,稱 p 是一質數.

定理 3. 既約分數 $\frac{r}{q}$ (>0 而 <1)可用基數 g 的有限小數表示的充要條件是分母 q 的一切質因子都是基數 g 的因子.

證明 置 $r_0=r$. 由除法

$$r_0 g=b_1 q+r_1, \qquad 0 \leqslant r_1 < q;$$

$$r_1 g=b_2 q+r_2, \qquad 0 \leqslant r_2 < q;$$

所以 $r_k g-r_{k+1}$ 是 q 的倍數,用式子 $r_k g \equiv r_{k+1} \pmod q$ 來記它. 這種等式叫做同餘等式. 由是

$$r_m \equiv g r_{m-1} \equiv g^2 r_{m-2} \equiv \cdots \equiv g^m r_0 \pmod q.$$

若 $r_m=0$, 則 $\frac{r}{q}=\{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$, 此時 $g^m r_0=0 \pmod q$, 所以 q 的任何質數因子,是 g 的因子. 反過來說,假如 q 的任何質數因都是 g 的因子,那末,取 m 適當大, g^m 可用 q 除盡. 因之

$$r_m \equiv g^m r \equiv 0 \pmod q,$$

因 $r_m < q$, 所以 $r_m=0$. 證明完畢.

設 $\frac{r}{q}=\{b_1, b_2, \cdots\}$ 是一無限小數,小於 q 的 q 個正整數 r_1, $r_2, \cdots, r_q$ 中至少要有兩個相等. 設

$$r_m=r_{m-k} \qquad (m \leqslant q, k < m),$$

則 $r_m g=r_{m-k} g$, $b_{m+1} q+r_{m+1}=b_{m-k+1} q+r_{m-k+1}$. 由是,

$$r_{m+1} = r_{m-k+1}, \qquad b_{m+1} = b_{m-k+1},$$
$$r_{m+2} = r_{m-k+2}, \qquad b_{m+2} = b_{m-k+2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$r_{m+k} = r_m, \qquad b_{m+k} = b_m;$$

所以 k 個商 $b_{m-k+1}, b_{m-k+2}, \cdots, b_m$ 循環發生,沒有終了. 此種小數稱為循環小數,簡書為

$$\frac{r}{q} = \{b_1, b_2, \cdots, b_{m-k}, \overline{b_{m-k+1}, b_{m-k+2}, \cdots, b_m}\},$$

稱 $\{b_{m-k+1}, \cdots, b_m\}$ 為它的循環節. 反過來說,循環小數一定表示有理數:事實上,

$$\{b_1, \cdots, b_{m-k}, b_{m-k+1}, \cdots, b_m\} = \{b_1, \cdots, b_{m-k}\} +$$
$$+ \frac{1}{g^{m-k}}\{b_{m-k+1}, \cdots, b_m\}\left(1 + \frac{1}{g^k} + \frac{1}{g^{2k}} + \cdots\right) =$$
$$= \{b_1, \cdots, b_{m-k}\} + \frac{\{b_{k-m+1}, \cdots, b_m\}}{g^{m-k} - g^{m-2k}}.$$

我們證明了下面的

定理 4. 循環小數是一有理數. 有理數是一整數與一循環小數之和.

定義 循環節始自 b_1 的,稱為純循環小數;若不然,稱之為雜循環小數.

定理 5. 設 $\frac{r}{q}$ 是一既約分數. $\frac{r}{q}$ 可用 g 進位的純循環小數來表示的充要條件是 g 和 q 間沒有公因子.

證明 設 $\frac{r}{q} = \{b_1, b_2, \cdots\}$ 的循環節是 $\{b_{m-k+1}, \cdots, b_m\}$,則由 $r_m = r_{m-k}$ 得

$$g^m r \equiv g^{m-k} r \pmod{q}.$$

然 r 與 q 之間無公因子,所以

$$g^{m-k}(g^k - 1) \equiv 0 \pmod{q}.$$

反過來說,上式成立時,用 r 乘後,即得

$$r_m \equiv r_{m-k} \pmod q.$$

因一切 r_k 都小於 q，所以 $r_m = r_{m-k}$. 由是，兩關係

$$r_m = r_{m-k} \text{ 與 } g^{m-k}(g^k - 1) \equiv 0 \pmod q$$

的價值是一樣的. 假如 q 與 g 間無公因子，那末，兩關係

$$r_m = r_{m-k} \text{ 與 } g^k \equiv 1 \pmod q$$

是同價值，後者與 m 無關係，所以可設 $m=k$ 於前者，而得 $r_k=r_0=$ $=r$. 由是得着純循環小數：

$$\frac{r}{q} = \{\overline{b_1, b_2, \cdots, b_k}\}.$$

假如 q, g 間有大於 1 的公因子 p，那末不能得 $r_k = r$. 若不然，則由 $m = k$，得

$$g^k \equiv 1 \pmod q.$$

因之 $g^k \equiv 1 \pmod p$. 這是不可能的事，因為 p 可以除盡 g 的緣故，定理由是證畢.

系 一切不循環的小數都是無理數.

例 設 $\frac{r}{q}$ 是一既約分數，用十進位小數表示它的時候，要明白它的循環性質. 將 q 寫作

$$2^\alpha \cdot 5^\beta \cdot n \; (\alpha \geqslant 0,\ \beta \geqslant 0,\ n \text{ 與 } 10 \text{ 沒有公約數}).$$

若 $n = 1$，那末 $q = 2^\alpha \cdot 5^\beta$ 由定理 3，知 $\frac{r}{q}$ 是一十進位的有限小數.

若 $\alpha = \beta = 0$. 則由定理 5，$\frac{r}{q} = \frac{r}{n}$ 是一十進位的純循環小數；它的循環節的數字個數是適合

$$10^h \equiv 1 \pmod n \tag{1}$$

的最小整數 h.

若 $n > 1$，$\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{|\alpha-\beta|}{2} > 0$，則由定理 5，$\frac{r}{q}$ 是一十進位的雜循環小數，設 h 是適合(1)的最小整數，那末，

$$10^r(10^h-1)\equiv 0 \pmod{q}.$$

循環節從第 $r+1$ 位開始，循環節的數字個數爲 h. 所以 $\frac{r}{q}$ 的形式是

$$0.\,b_1b_2\cdots\overline{b_r b_{r+1} b_{r+2}\cdots b_{r+h}}.$$

6. 乘冪 方根 對數 設 n 是一整數，a 是一實數，那末當 $a\neq 0$ 的時候，a 的乘冪 a^2 的意義，可規定如前．a 是有理數的時候．指數律的成立，也不難逐一證明：乘冪的逆是方根，現在先證

定理 1. 設 $a>0$，n 是一正整數，那末必有(唯一的)正數 α 適合 $\alpha^n=a$.

證明 若 a 是一有理數的 n 乘冪，那末定理自然成立． 假如不然，一定有整數 b_0 適合

$$b_0^n<a<(b_0+1)^n \quad (b_0\geqq 0).$$

又因三數 b_0^n, $\left(b_0+\frac{1}{2}\right)^n$, $(b_0+1)^n$ 都不等於 a, 所以有 b_1 適合

$$\left(b_0+\frac{1}{2}b_1\right)^n<a<\left(b_0+\frac{1+b}{2}\right)^n,\ b_1(b_1-1)=0.$$

如是繼續進行，對於任一正整數 k，必有 b_k 適合

$$\left(b_0+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}+\cdots+\frac{b_k}{2^k}\right)^n<a<\left(b_0+\frac{b_1}{2}+\cdots+\frac{b_{k+1}}{2^{k-1}}+\frac{b_{k+1}}{2^k}\right)^n,$$

$$b_k(b_k-1)=0.$$

置 $\alpha=b_0+\frac{b_1}{2}+\cdots$, $a_n=b_0+\frac{b_1}{2}+\cdots+\frac{b_k}{2^k}$; 那末 $\{a_n\}=$ $=\alpha$, $\alpha^n=a$. 又若 $\alpha\neq\beta>0$, 那末 $\beta^n\neq a$. 證明完畢.

定義 定理 1 中的 α，稱爲 a 的 n 方根，記之以

$$\alpha=\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}},$$

二方根，三方根，通稱爲平方根，立方根．a 的平方根簡寫作 $\sqrt{a}$.

由定理 1，正數的正的 n 方根是獨一無二的．設 m 是一個整數，定 $(\sqrt[n]{a})^m$ 是 $a^{\frac{m}{n}}$ 的正值；$m<0$ 時，定

$$a^m = m'\sqrt{\frac{1}{a}}, \text{但 } m' = -m.$$

定理 2. 設 a, b 是兩正數; λ, μ 是兩有理數,那末

(一) $a^\lambda a^\mu = a^{\lambda+\mu}$,

(二) $(a^\lambda)^\mu = a^{\lambda\mu}$,

(三) $a^\lambda b^\lambda = (ab)^\lambda$.

這三個關係稱爲(有理數的)指數律, a^λ 等都是正數.

證明 當 a, b 爲有理數時,指數律已述於前. 今先證

$$(a^m)^{\frac{1}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = a^{\frac{m}{n}}. \tag{1}$$

置 $a^{\frac{1}{n}} = \alpha(a^m)^{\frac{1}{n}} = \beta$, 那末 $a = \alpha^n$, $a^m = \beta^n = \alpha^{mn}$.
所以

$$\beta = \alpha^m = (a^{\frac{1}{n}})^m.$$

其次, 設 $\lambda = \frac{p}{q}$, $\mu = \frac{r}{s}$. 置 $a^\lambda \cdot a^\mu = c$, 那末由

$$c^{qs} = (a^\lambda)^{qs}(a^\mu)^{qs} = a^{ps}a^{rq} = a^{ps+rq}, \tag{1}$$

$$c = a^{\lambda+\mu}.$$

所以(一)成立. 同樣可證(二)與(三). 證明完畢.

定義 稱 a^λ 爲乘冪, a 是乘冪的底, λ 是乘冪的指數.

要定指數是無理數的乘冪,先證

定理 3. 設 $a>0$, λ 是一正有理數. 那末, 當 $a=1$ 時, $a^\lambda=1$; 當 $a>1$ 時, $a^\lambda>1$; $a<1$ 時, $a^\lambda<1$.

證明 置 $\lambda=\frac{p}{q}$, $\frac{p}{q}$ 是一既約分數. 假如 $a^\lambda\leqslant 1$, 那末 $(a^\lambda)^q\leqslant 1$, 即 $a^p\leqslant 1$. 此結果當 $a>1$ 時不會發生的. 所以當 $a>1$ 時, $a^\lambda>1$,同樣可證 $a\leqslant 1$ 含有 $a^\lambda\leqslant 1$. 證明完畢.

系 1 設 $a>b>0$, λ 是一正有理數;那末, $a^\lambda>b^\lambda$.

證明 因 $\frac{a}{b}>1$ 所以 $\left(\frac{a}{b}\right)^\lambda>1$, 即 $a^\lambda>b^\lambda$.

系 2 設 λ 與 μ 都是正有理數, $\lambda > \mu$, 若 $a > 1$, 則 $a^{\lambda} > a^{\mu}$. 又若 $a < 1$ 則 $a^{\lambda} < a^{\mu}$.

今設 λ 是一正無理數, $a > 0$. 設 $\lambda = \{b_1, b_2, \cdots\}$,

$$a_n = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}.$$

由定理 3 的系 2, $\{a^{a_n}\}$ 是一單調數列, 當 $a > 1$ 時 $\{a^{a_n}\}$ 是單調增加. 設 r 是大於 λ 的一有理數, 那末由

$$a_n < \lambda < r, \quad a > 1$$

得 $a^{a_n} < a^r$. 所以極限 $\lim a^{a_n}$ 存在. 若 $a < 1$. 則因 $0 < a^{a_n}$, 所以 $\lim a^{a_n}$ 也存在.

其次, 證明

$$\lim a_n = \lim b_n = \lambda > 0.$$

含有 $\lim a^{a_n} = \lim a^{b_n}$. 先設 $a > 1$, 對於正數 ε, 取正整數 N 使 $(1 + \varepsilon) N > a$. 又取 m 使

$$|a_n - b_n| < \frac{1}{N} (n > m),$$

那末 $a_n - \frac{1}{N} < b_n < a_n + \frac{1}{N}$. 因之, $a^{a_n - \frac{1}{N}} < a^{b_n} < a^{a_n + \frac{1}{N}}$,

$$a^{a_n}(a^{-\frac{1}{N}} - 1) < a^{b_n} - a^{a_n} < a^{a_n}(a^{\frac{1}{N}} - 1), (n > m).$$

設 $a_m < r$, 則右端小於 $a^r\varepsilon$, 左端大於 $-a^r\varepsilon$, 所以

$$|a^{b_n} - a^{a_n}| < a^r\varepsilon \ (n > m).$$

由是 $\lim a^{a_n} = \lim a^{b_n}$. 若 $0 < a < 1$, 則因

$$\lim \left(\frac{1}{a}\right)^{a_n} = \lim \left(\frac{1}{a}\right)^{b_n},$$

又得着 $\lim a^{a_n} = \lim a^{b_n}$. 由是我們證明了

定理 4. 設 $a > 0$, $\lambda > 0$, 若 $\lambda = \{a_n\} = \{b_n\}$, 那末, $\lim a^{a_n}$ 和 $\lim a^{b_n}$ 都存在, 且相等.

定義 設 $a > 1$, $\lambda = \{a_n\} > 0$. 定 $\lim a^{a_n} = a^{\lambda}$ (正數). 又定 $a^{-\lambda} = \frac{1}{a^{\lambda}}$, $a^0 = 1$.

定理 5. 設 $a>0,\ b>0$; $\lambda,\ \mu$ 都是實數. 那末,指數律

$$a^{\lambda}.\ a^{\mu}=a^{\lambda+\mu},\ (a^{\lambda})^{\mu}=a^{\lambda\mu},\ a^{\lambda}b^{\lambda}=(ab)^{\lambda}$$

成立.

證明 設 $\lambda=\{a_n\},\ \mu=\{b_n\}$,則由定理 2.

$$a^{a_n}\cdot a^{b_n}=a^{a_n+b_n},\ (a^{a_n})^{b_n}=a^{a_nb_n},\ a^{a_n}b^{a_n}=(ab)^{a_n},$$

取其極限,即得定理中的三個規律. 證明完畢.

對數的基礎,在下面的定理.

定理 6. 設 $a>0,\ b>0,\ b\neq 1$, 適合 $b^x\doteq a$ 的實數必存在,且限於一個.

證明 設 $b>1$. 若有有理數 x 使 b^x 等於 a, 那末 x 就是所要的實數. 假如沒有這樣的有理數,那末一定有整數 b_0 適合

$$b^{b_0}<a<b^{b_0+1}.$$

且有整數 $b_1,\ b_2,\cdots$ 適合 $b_k\,(b_{k-1})=0$ 與

$$b^{b_0+\frac{b_1}{2}+\cdots+\frac{b_k}{2^k}}<a<b^{a_0+\frac{b_1}{2}+\cdots+\frac{b_{k+1}}{2^k}}.$$

置 $x=b_0+\dfrac{b_1}{2}+\cdots$, 即得 $b^x=a_0$. 若 $b<1$, 則由

$$\left(\frac{1}{b}\right)^x=\frac{1}{a},$$

得 $b^x=a_0$. 若 $x\neq y$,則 $b^{x-y}\neq 1,\ b^x\neq b^y$. 證畢.

定義 設 $0<b\neq 1,\ a>0$. 適合 $b^x=a$ 的 x,稱之為以 b 作底之 a 的對數,寫作

$$x=\log_b a.$$

由此定義,易知:當 $b>0,\ b\neq 1,\ a>0,\ a'>0$ 時,

$$\log_b(aa')=\log_b a+\log_b a',$$

$$\log_b\frac{a'}{a}=\log_b a'-\log_b a,$$

7. 特德金特的無理數論 特德金特[1]的"連續性與無理數"一

1) 特德金特 (R. Dedekind) 1831—1916.

書於 1872 出版，書中無理數的概念，雖以有理數爲出發點，然而並不用基本數列．設 R 是有理數的全體，分 R 爲兩部分 R_1 與 R_2，使

（1）R_1 與 R_2 都不是空的，

（2）R_1 中任何數小於 R_2 中任何數，

（3）假如 R_1 有最大數 r，則將 r 移入 R_2．

稱這樣的分法爲 R 的一個分割，記之以$(R_1|R_2)$．稱 R_1 中的數爲$(R_1|R_2)$的下級數，R_2 中的數爲$(R_1|R_2)$的上級數．

假如 R_2 具有最小數 r，則稱 $(R_1|R_2)$ 是由 r 所分成的；或是說：$(R_1|R_2)$對應于有理數 r，記之以 $r^* = (R_1|R_2)$．然 R 的任一分割$(R_1|R_2)$不一定對應於一有理數．例如取正有理數 r 的平方大於 2 的一切數，記其全體爲 R_2，其餘一切有理數組成 R_1；那末 $(R_1|R_2)$ 的 R_2 並無最小有理數，並且 R_1 沒有最大的有理數．爲什麼呢？設 r 是一正有理數，那末

$$\bar{r} = \frac{4+3r}{3+2r}$$

也是一正有理數，而

$$\bar{r}^2 = \frac{(18+24r+8r^2)+r^2-2}{(3+2r)^2} = 2 + \frac{r^2-2}{(3+2r)^2}, \quad (1)$$

$$\bar{r}^2 - r^2 = \frac{(2-r^2)(8+12r+4r^2)}{(3+2r)^2}. \quad (2)$$

若 $r \in R_2$，則 $r^2 > 2$；由(1)，$\bar{r}^2 > 2$，因之 $\bar{r} \in R_2$．由(2)，$\bar{r} < r$．所以 R_2 無最小數．　若 $r \in R_1$，則由 (1) $\bar{r} \in R_1$；由 (2)，$\bar{r} > r$．所以 R_1 沒有最大數．得結果如下：

定理 1.　不對應於任何有理數的分割 $(R_1|R_2)$ 是存在的．

定理 2.　設 $M \subset R$, $M \neq 0$．

（一）　假如 $r \in M$ 和 $x < r$ 含有 $x \in M$，且 M 無最大數，那末，置

$$R_1 = M \qquad R_2 = R - M$$

時，$(R_1|R_2)$ 成一分割．

(二) 假如 $r \in M$ 和 $r < x$ 含有 $x \in M$. 且 $R - M$ 無最大數,那末,置

$$R_1 = R - M, \qquad R_2 = M$$

時,$(R_1 | R_2)$ 成一分割.

證明 因 M 是 R 的不空眞子集,所以 $R_1 \neq 0$, $R_2 \neq 0$.

設 $r_1 \in R_1$, $r_2 \in R_2$, 則由 R_1 和 R_2 的定義, $r_1 < r_2$. 又因 R_1 無最大數,所以$(R_1 | R_2)$成一分割. 定理證畢.

分割之大小 設 $\alpha = (A_1 | A_2)$, $\beta = (B_1 | B_2)$是兩分割.

若 $A_1 = B_1$, 那末說: α 等於 β, 記之以 $\alpha = \beta$. 若 $A_1 \supset B_1$, 那末說: α 大於 β, 或是說 β 小於 α. 記之以

$$\alpha > \beta \quad 或 \quad \beta < \alpha.$$

定理 3. 設 $\alpha = (A_1 | A_2)$, $\beta = (B_1 | B_2)$. 那末三關係

$$\alpha = \beta, \quad \alpha > \beta, \quad \alpha < \beta$$

必有一個成立,且只有一個成立.

證明 若 α 不與 β 相等,則 $A_1 \neq B_1$. 那末 A_1 中有數不屬於 B_1, 或 B_1 中有數不屬於 A_1. 假如前者成立:

$$r \in A_1, \qquad r \bar{\in} B_1,$$

那末 $r \in B_2$. 所以 B_1 中任何數 x 小於 r. 因之 $x \in A_1$

$$A_1 \supset B_1,$$

此時 $\alpha > \beta$. 假如 B_1 有數不屬於 A_1, 則 $\beta > \alpha$. 定理證畢.

從定理 3 的證明,又得

定理 4. 設 $\alpha = (A_1 | A_2)$, $\beta = (B_1 | B_2)$. $\alpha > \beta$ 的充要條件是 $A_1 B_2 \neq 0$.

定理 5. 設 $\alpha = (A_1 | A_2)$, $\beta = (B_1 | B_2)$, $\gamma = (C_1 | C_2)$. 兩關係 $\alpha > \beta$ 和 $\beta > \gamma$, 含有 $\alpha > \gamma$.

證明 因 $\alpha > \beta$,所以 $A_1 \supset B_1$. 然 $\beta > \gamma$,由定理 4 知 $B_1 C_2 \neq$ $\neq 0$. 因之 $A_1 C_2 \neq 0$. 又由定理 4, $\alpha > \gamma$. 證明完畢.

對應於有理數 0 的分割 $0^* = (0_1 | 0_2)$稱爲零. 大於零的分割

稱爲正分割,小於零的分割稱爲負分割.

定理 6. 若有理數 a 小於有理數 b,則 $a^* < b^*$.

證明 設 $a^* = (A_1 | A_2)$, $b^* = (B_1 | B_2)$,則 a, b 是 A_2, B_2 的最小數. 因 $a < b$,所以 $A_1 \subset B_1$. 因之 $a^* < b^*$. 證明完畢.

分割的和 設 $\alpha = (A_1 | A_2)$, $\beta = (B_1 | B_2)$. a_1, a_2, b_1, b_2 分別表示 A_1, A_2, B_1, B_2 中任意的有理數. 設 C_2 是一切 $a_2 + b_2$ 的全體. $C_1 = R - C_2$, 那末, $(C_1 | C_2)$是一分割(定理 2),稱此分割爲 α 與 β 的和,用記號

$$\alpha + \beta = (C_1 | C_2)$$

表示. 易知分割的加法,滿足交換律與結合律:

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha, \quad (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma).$$

定理 7. 設 a, b 是兩有理數,那末 $a^* + b^* = (a + b)^*$.

證明 設 $a^* = (A_1 | A_2)$, $b^* = (B_1 | B_2)$, $(a+b)^* = (C_1 | C_2)$.

若 $c_2 \in C_2$ 則 $c_2 = a + b + 2\varepsilon$, $\varepsilon \geqslant 0$. 記 $a + \varepsilon = a_2$, $b + \varepsilon = b_2$,那末 $a_2 \in A_2$, $b_2 \in B_2$, $c_2 = a_2 + b_2$. 所以 c_2 是 $a^* + b^*$ 的一上級數. 反過來說, $a^* + b^*$ 的任一上級數 $a_2 + b_2$ 必不小於 $a + b$,所以屬於 C_2. 由是, $a^* + b^*$ 中上級數的全體就是 C_2, 因之, $a^* + b^* = (a + b)^*$. 證明完畢.

定理 8. 設 $\alpha = (A_1 | A_2)$, $\beta = (B_1 | B_2)$, $\gamma = (C_1 | C_2)$. 若 $\alpha < \beta$,則 $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$.

證明 由假設 $\alpha < \beta$ 得着 $A_1 \subset B_1$. 在 $B_1 - A_1$ 中取兩數 m 和 n, $m > n$. m 和 n 都在 B_1 中,也都在 A_2 中. 在 C_1, C_2 中各取一數 c_1, c_2, 又取正整數 N 甚大,可使

$$c_1 + N(m - n) > c_2.$$

$N + 1$ 個數: c_1, $c_1 + (m - n)$, $c_1 + 2(m - n)$, $\cdots$, $c_1 + N(m - n)$,第一個數 c_1 屬於 C_1,最後的數屬於 C_2. 其中必有相鄰兩數, 前者屬於 C_1, 後者屬於 C_2, 兩數的差是 $m - n$, 即有如下的兩數 c_1' 和 c_2':

$$c_2' - c_1' = m - n, \quad c_1' \in C_1, c_2' \in C_2.$$

由是 $c_2' + n = c_1' + m$. 左端是 $\alpha + \gamma$ 的上級數，右端是 $\gamma + \beta$ 的下級數. 所以 $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$. 證明完畢.

分割的差 設 $\alpha = (A_1 | A_2)$, $\beta = (B_1 | B_2)$, 又設 C_2 是 $a_2 - b_1$ 的全體，但 $a_2 \in A_2$, $b_1 \in B_1$. 置 $C_1 = R - C_2$, 則 $(C_1 | C_2)$ 成一分割（當 C_1 有最大數時，將此數移入 C_2）. 定

$$\alpha - \beta = (C_1 | C_2), \quad 0^* - \beta = -\beta.$$

$(C_1 | C_2)$ 何以成一分割呢？設 $a_2 - b_1 \in C_2$, 假如有理數 x 大於 $a_2 - b_1$, 那末

$$x = \{a_2 + (x - a_2 + b_1)\} - b_1 \in C_2,$$

又 C_1 決不是空的，若 $C_1 = 0$, 那末 $a_1 - b_2$ 可以寫做 $a_2 - b_1$; 但是從

$$a_1 - b_2 = a_2 - b_1$$

得着矛盾 $a_1 - a_2 = b_2 - b_1$. 因為左端是負而右端是正的. 故由定理 2, $(C_1 | C_2)$ 是一分割.

定理 9. 設 a 和 b 是兩有理數，則 $a^* - b^* = (a - b)^*$.

證明 分割 $a^* - b^*$ 的上級數的一般形式是

$$(a + \varepsilon) - (b - \varepsilon'),$$

ε 和 ε' 都是正的有理數. $(a - b) + (\varepsilon + \varepsilon')$ 是 $(a - b)^*$ 的上級數. 又 $(a - b)^*$ 的上級數

$$(a - b) + \varepsilon = \left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(b - \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

也是 $a^* - b^*$ 的上級數. 有理數 $a - b$ 是 $a^* - b^*$ 的上級數，也是 $(a - b)^*$ 的上級數. 所以 $a^* - b^* = (a - b)^*$. 證明完畢.

分割的乘積 設 $\alpha = (A_1 | A_2) \geqslant 0^*$, $\beta = (B_1 | B_2) \geqslant 0^*$, 則 A_2, B_2 中一切數 a_2, b_2 都是正有理數或 0. 由定理 2, 乘積 $a_2 b_2$ 的全體 C_2 成一分割 $(C_1 | C_2)$ 的上級. 定

$$(C_1 | C_2) = \alpha\beta,$$

$$\alpha(-\beta)=-(\alpha\beta)=(-\alpha)\beta,(-\alpha)(-\beta)=\alpha\beta.$$

所以關於分割的乘法,其交換律 $\alpha\beta=\beta\alpha$ 和結合律$(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)$ 都成立. 現在證明分配律.

定理 10. 設 $\alpha=(A_1|A_2)$, $\beta=(B_1|B_2)$, $\gamma=(C_1|C_2)$則

$$(\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma.$$

證明 不妨假設 $\alpha\geqslant 0^*$, $\beta\geqslant 0^*$, $\gamma\geqslant 0^*$. 設

$$(\alpha+\beta)\gamma=(D_1|D_2),\ \alpha\gamma+\beta\gamma=(E_1|E_2),$$

證明 $D_2=E_2$ 好了. D_2 中之數,其形式是 $(a_2+b_2)c_2=a_2c_2+$ $+b_2c_2\in E_2$. 又 E_2 中的數,其形式是

$$a_2c_2+b_2c_2'\geqslant\left(\frac{c_2+c_2'}{2}-\frac{|c_2-c_2'|}{2}\right)(a_2+b_2)\in D_2,$$

證明完畢.

定理 11. 設 a,b 是兩有理數,則 $a^*b^*=(ab)^*$.

證明 從略.

分割的商 設 $\alpha=(A_1|A_2)\geqslant 0^*$, $\beta=(B_1|B_2)>0^*$. 則 B_1 中含有正數. 設具有形式

$$\frac{a_2}{b_1}(a_2\in A_2,\ b_1\in B_1,\ b_1>0)$$

的有理數之全體爲 M. 若 $R-M$ 有最大數 r,則置

$$M_1=(R-M\text{ 除去 }r),\ M_2=(M\text{加入 }r).$$

若 $R-M$ 沒有最大數,那末,置 $M_1=R-M$, $M_2=M$. $(M_1|M_2)$ 成一分割: 因爲 M_1 含有負數, 所以 M_1 和 M_2 都不是空的. 又設 $a_2\in A_2$, $b_1\in B_1$, $b_1>0$, $x>\dfrac{a_2}{b_1}$,則有大於 1 的 d 如下:

$$x=d\,\frac{a_2}{b_1}=\frac{da_2}{b_1}.$$

所以 $x\in M_2$. 定 $\dfrac{\alpha}{\beta}=(M_1|M_2)$.

$$\frac{-\alpha}{\beta}=-\frac{\alpha}{\beta},\ \frac{\alpha}{-\beta}=-\frac{\alpha}{\beta},\ \frac{-\alpha}{-\beta}=\frac{\alpha}{\beta}.$$

所以當 $\beta \neq 0^*$ 的時候，$\frac{\alpha}{\beta}$ 有意義．是乃以 β 除 α 的商．由定義即得

定理 12. 設 a, b 是兩有理數，$b \neq 0$，則 $\frac{a^*}{b^*} = \left(\frac{a}{b}\right)^*$.

定理 13. 設 $\alpha = (A_1 | A_2)$，$\beta = (B_1 | B_2) \neq 0^*$，則 $\beta \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \alpha$.

證明 設 $\alpha \geqslant 0^*$，$\beta > 0^*$．設 α 不對應於有理數，則分割 $\beta \times \times \frac{\alpha}{\beta}$ 之上級數的一般形式是

$$b_2 \cdot \frac{a_2}{b_1} = \frac{b_2}{b_1} a_2 \ (b_1 > 0,\ b_1 \in B_1,\ b_2 \in B_2,\ a_2 \in A_2).$$

這是大於 a_2 的數，所以屬於 A_2．又任取 A_2 的數 a_2，A_2 中必有數 $a_2' < a_2$，那末 $d = \frac{a_2}{a_2'} > 1$．設 $b_1 \in B_1$，取 N 甚大，則 $N+1$ 個數

$$b_1,\ b_1 d,\ b_1 d^2,\ \cdots,\ b_1 d^N$$

的第一個數屬於 B_1，而使 $b_1 d^N \in B_2$．所以其中有相鄰兩數 b_1', b_2' 如下：

$$b_1' \in B_1,\ b_2' \in B_2,\ \frac{b_2'}{b_1'} = d.$$

由是 $a_2 = b_2' \frac{a_2'}{b_1'}$．所以 a_2 是 $\beta \cdot \frac{\alpha}{\beta}$ 之一上級數．因之 $\beta \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \alpha$.

假如 α 對應於有理數 a，那末，$a \in A_2$．從上面的證明，知道

$$b_2 \cdot \frac{a_2}{b_1} \in A_2,$$

且 $a_2 \neq a$ 時，a_2 爲 $\beta \cdot \frac{\alpha}{\beta}$ 的上級數．所以 $(A_1 | A_2) = \beta \cdot \frac{\alpha}{\beta}$.

證明完畢．

定義 每一（有理數全體的）分割，是一實數．

對應於有理數的分割 a^*，其間之大小關係，四則演算，與有理數間的大小關係，四則演算，實質相同（定理 6, 7, 9, 11, 12）．根據這個理由，定 a^* 就是 a．對應於有理數的分割，稱爲有理數，不對應於有理數的分割，稱它做無理數；由定理 1，無理數是存在的．

設 α 是一無理數，a 是一有理數，$a \neq 0$ 的話，從

$$\alpha = (\alpha + a) - a = \frac{a\alpha}{a},$$

知道 $\alpha + a$, $a\alpha$ 都是無理數. 所以無理數的個數是無限的. 若

$$\alpha = (A_1 | A_2) > \beta = (B_1 | B_2),\ a \in B_2 A_1$$

則 $\beta < a < \alpha$. 所以任何兩實數間，必有有理數. 因之任何兩數間，必有無數個有理數. 設 α 是一無理數，當 $\beta < \gamma$ 時，由定理 8，

$$\alpha + \beta < \alpha + \gamma.$$

設 r 是一有理數，$\alpha + \beta < r < \alpha + \gamma$，那末，$\beta < r - \alpha < \gamma$. 因 α 是一無理數，所以 β 與 γ 之間有無數個無理數. 就是說：任何兩實數間，有無數的有理數和無理數. 這叫做實數的稠密性.

實數之絕對值的意義，可定如前. 由是可定極限的概念，而收斂數列的議論，可進行如前.

從有理數全體的分割，得着有理數以外的數——無理數，然則從實數全體的分割，可以得着實數以外的數麽？ 下面的定理予以否定的回答. 這是'實數體的連續性'，也是特德金特理論的基本定理：

定理 14. 將實數全體分爲兩部分 $\mathscr{B}_1$ 和 $\mathscr{B}_2$：

(i) $\mathscr{B}_1$ 和 $\mathscr{B}_2$ 都含有實數，

(ii) $\mathscr{B}_1$ 中任何數小於 $\mathscr{B}_2$ 中的任何數.

那末，當 $\mathscr{B}_1$ 沒有最大數時，$\mathscr{B}_2$ 一定有最小數.

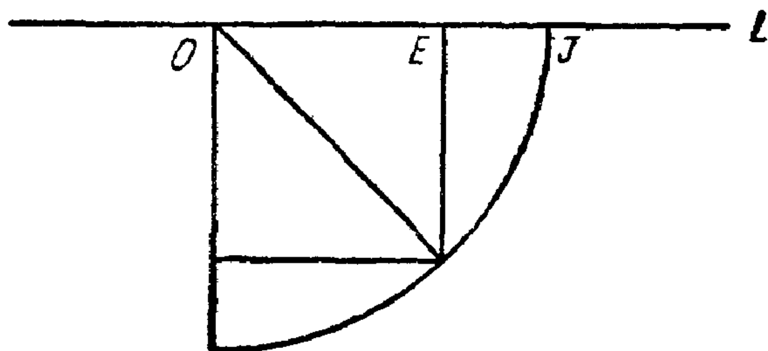
證明 設 $\mathscr{P}_1$ 是 $\mathscr{B}_1$ 中一切有理數的集，$\mathscr{P}_2$ 是 $\mathscr{B}_2$ 中一切有理數的集. 假如 $\mathscr{P}_1$ 有最大數 r，那末 r 也是 $\mathscr{B}_1$ 的最大數，而定理 14 成立. 假如 $\mathscr{P}_1$ 中沒有最大數，那末，$(\mathscr{P}_1 | \mathscr{P}_2)$ 定一實數 α. 任取一實數 $\beta = (R_1 | R_2)$，$\beta \neq \alpha$.

若 $\beta > \alpha$，則 $R_1 \mathscr{P}_2$ 中有數 a. 因 $a \in \mathscr{P}_2$ 所以 $a \in \mathscr{B}_2$，又因 $a \in R_1$ 所以 $a \leqslant \beta$. 由此兩結果，知 $\beta \in \mathscr{B}_2$. 這就是說：當 $\beta > \alpha$ 時 $\beta \in \mathscr{B}_2$.

若$\beta < \alpha$，則$\mathscr{P}_1, R_2$中有數b. 因$b \in \mathscr{P}_1$，所以$b \in \mathscr{B}_1$，又因$b \in R_2$，所以$\beta \leqslant b$. 由是$\beta \in \mathscr{B}_1$. 所以$\beta < \alpha$時，$\beta \in \mathscr{B}_1$.

這樣說來，α不是$\mathscr{B}_1$的最大數的話，一定是$\mathscr{B}_2$的最小數. 證明完畢.

特德金特的公理和解析幾何學的基礎 在一水平的直綫L上取一點O，O的右方取一點E，以O對應於0，E對應於1. 設n和m是兩正整數. 分OE爲n等分. 取$\frac{OE}{n}$的m倍的長，在L上，



自O的左右兩方作兩個綫分，得兩點，一在O之右，一在O之左，使右方的點對應於有理數$\frac{m}{n}$，左方之點對應於$-\frac{m}{n}$. 這樣，一切有理數在L上都有了對應點，這種點稱爲L上的有理點. 數之大者，其點居右. 設以OE爲邊長作正方形，它的對角綫之長爲OJ，L上的J點是在O之右. J不是有理點，因爲OJ的平方等於2，既約分數$\frac{m}{n}$的平方$\frac{m^2}{n^2}$是不會等於2的.

設J是L上之一非有理點，把L上之有理點分爲兩類L_1, L_2；使L_1的點都在J之左方，L_2的點都在J之右方. 設L_1中的點所對應的有理數全體爲A_1，L_2中的點所對應的有理數全體爲A_2，那末，$(A_1 | A_2)$定一實數α. L_1無最右的點，L_2無最左的點；所以α是一無理數. 由是對於L上任一非有理點J有一無理數α與之相應. 所以對於L上的任何點，必有一實數與之相應，相異兩點對

應於相異兩數．然則任一實數 α 在 L 上必有它的對應點麼？特德金特給予肯定的回答．但是無法證明．這叫做特德金特的公理：將一直綫上的有理點分爲兩類 L_1 和 L_2．兩類都不必是空的，且 L_1 中的點都在 L_2 中任何點的左方．這是 L 上有理點全體的分割，每一分割決定一點對應於一實數．

由此公理知，一直綫上的點和實數全體之間，成立着一對一的對應．這是解析幾何學的基礎．解析幾何學在特德金特的公理下，才有建立的可能性[1]．

8. 兩種實數論的統一 爲簡便計，稱康妥，梅賴的實數爲甲種實數，特德金特的實數爲乙種實數．設 $\alpha=\{a_n\}$ 是一甲種實數．對於有理數 a，若有 m 使不等式

$$a-a_{m+p}<0.$$

對於任一正整數 p 成立，則記此種 a 的全體爲 A_1，其餘一切有理數爲 A_2，由是得一乙種實數 $\alpha'=(A_1|A_2)$．設 $\beta=\{b_n\}$ 是大於 α 之一甲種實數，由 β 所得的乙種實數是 $\beta'=(B_1|B_2)$．那末，$\beta'>\alpha'$：因有有理數 a 適合

$$\alpha<a<\beta$$

此 a 屬於 B_1 也屬於 A_2，所以 B_1A_2 不是空集．這就是說：$\alpha<\beta$ 含有 $\alpha'<\beta'$．然則由此法所得之 α' 的全體，是不是乙種實數的全部呢？是的，證明如下．

設 $\alpha=(A_1|A_2)$ 是一乙種實數．設 $a_1\in A_1$，$a_2\in A_2$，ε 是一正有理數，取正整數 N 甚大，使 $a_1+N\varepsilon$ 大於 a_2．由是

$$a_1,\ a_1+\varepsilon,\ a_1+2\varepsilon,\ \cdots,\ a_1+N\varepsilon$$

諸數中，必有如下的相鄰兩數 x, y：$x\in A_1$．$y\in A_2$ 且

$$y-x=\varepsilon,\quad a_1\leqslant x<y\leqslant a_2.$$

置 $\dfrac{\varepsilon}{2^n}=\varepsilon_n$，則有如下的數列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$：

$$y_n-x_n=\varepsilon_n,\quad x_n\leqslant x_{n+1}<y_{n+1}\leqslant y_n,$$

1) 見特德金特的"連續性和無理數" 1872．

$$x_n \in A_1, \ y_n \in A_2.$$

如是得到甲種實數 $z = \{x_n\} = \{y_n\}$,今證 $z' = \alpha$. 設

$$z' = (Z_1 | Z_2).$$

在 A_1 中任取兩數 a_1 和 a_1', $a_1 < a_1'$; 那末

$$a_1 - y_n = (a_1 - a_1') + (a_1' - y_n) < a_1 - a_1' < 0.$$

所以 $a_1 \in Z_1$, 因之 $A_1 \subseteq Z_1$. 又於 Z_1 中任取一數 z_1, 則必有 m 適合

$$z_1 - x_{m+p} < 0 \quad (p = 1, 2, \cdots).$$

因 $x_n \in A_1$. 所以 $Z_1 \in A_1$; 因之 $Z_1 \subseteq A_1$. 由是 $A_1 = Z_1$, $\alpha = z'$.

這樣說來,甲種實數的全部和乙種實數的全部成相似對應,且運算的規律也完全相同,兩者看做同一物好了.

第二章 習 題

1. 從彼阿諾的自然數公理導出數學歸納法.

2. 證明彼阿諾的五條(自然數)公理,相互獨立.

3. 證明彼阿諾五條公理的完備性.

4. 整數 a 的前者的後者等於 a, 試證明之.

5. 證明整數乘法的運算規律:

(i) 結合律, (ii) 交換律, (iii) 分配律.

6. 證明有理數相乘的運算規律.

7. 設 α 和 β 是兩個有理數. 證明

(i) $|\alpha + \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|$, (ii) $|\alpha + \beta| \geqslant |\alpha| - |\beta|$.

並問兩式中的等號何時成立?

8. 設 α 和 β 是兩個有理數, m 和 n 是兩個整數. 假如 α 和 β 都不是 0,那末,

$$\alpha^m \alpha^n = \alpha^{m+n}; \ (\alpha^m)^n = \alpha^{mn}; \ (\alpha\beta)^m = \alpha^m \beta^m.$$

9. 設 α 和 β 是兩個有理數, m 和 n 是兩個正整數, 證明下述諸命題:

(i) 當 $\alpha > \beta > 0$ 時, $\alpha^n > \beta^n$, $\alpha^{-n} < \beta^{-n}$;

(ii) 當 $\alpha > 1$ 且 $m > n$ 時, $\alpha^m > \alpha^n$;

(iii) 當 $0 < \alpha < 1$, $m > n$ 時, $\alpha^m < \alpha^n$;

(iv) 當 $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha^n > \beta^n$ 時, $\alpha > \beta$.

10. 設 α 和 β 是兩個正有理數,那末必有如下的整數 k:

$$k\alpha > \beta.$$

11. 設 $A, a_1, a_2, \cdots$ 都是有理數. 假如

$$a_n > a_{n+1} > A \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

那末 $\{a_n\}$ 是一基本數列.

12. 設 $a = \{a_n\}$ 和 $b = \{b_n\}$ 是兩個實數,證明

(i) $|ab| = |a| \cdot |b|$;

(ii) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$,但 $b \neq 0$;

(iii) $|a| - |b| \leqslant |a + b|$;

(iv) $|a| + |b| \geqslant |a + b|$.

問(iii)和(iv)中的等號何時成立?

13. 有上界的增加實數列必有極限值,有下界的減少實數列也必有極限值.

14. 設 $\{\alpha_n\}$ 和 $\{\beta_n\}$ 是兩個收斂實數列,證明:

(i) $\lim (\alpha_n \pm \beta_n) = \lim \alpha_n \pm \lim \beta_n$;

(ii) $\lim (\alpha_n \beta_n) = \lim \alpha_n \lim \beta_n$;

(iii) 當 $\lim \beta_n \neq 0$ 時,

$$\lim \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{\lim \alpha_n}{\lim \beta_n}.$$

15. 把 $\frac{1}{13}$ 展成十進位小數時,得一純循環小數,證明循環節的數字個數凡六.

$$\left[\text{實際上 } \frac{1}{13} = \overline{0.076923},\ 10^6 \equiv 1 \pmod{13}\right]$$

16. 注意 $260 = 2^2 \times 5 \times 13$，證明 $\frac{1}{260}$ 的十進位小數的循環節從第三位開始，循環節的數字個數一共六個。

$$\left(\frac{1}{260} = 0.00\overline{384615}\right).$$

17. 設 $a > 0$，又設 λ 和 μ 都是有理數，證明

(i) $(a^\lambda)^\mu = a^{\lambda\mu}$； (ii) $a^\lambda \beta^\lambda = (a\beta)^\lambda$.

18. (i) 若 $b > 1$，則當 $a \geqslant 1$ 時 $\log_b a \geqslant 0$，當 $0 < a < 1$ 時，$\log_b a < 0$.

19. 設 $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$，$b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$，证明

$$\lim a_n = \lim b_n.$$

20. 設 $\alpha = (A_1 | A_2)$，$\alpha' = (A_1' | A_2')$，$\alpha'' = (A_1'' | A_2'')$. 證明

(i) $(\alpha + \alpha') + \alpha'' = \alpha + (\alpha' + \alpha'')$,

(ii) $\alpha + \alpha' = \alpha' + \alpha$.

21. 設 $0^* = (0_1 \quad 0_2)$對應於 0. 證明

$$\alpha + 0^* = \alpha.$$

22. 設 $\alpha = (A_1 | A_2)$，$\beta = (B_1 | B_2)$. 若 $\alpha < \beta$，則必有有理數 a 適合於 $\alpha < a^* < \beta$.

23. 用前題記號，證明 $\beta + (\alpha - \beta) = \alpha$.

24. 假如 $\alpha > 0^*$，那末 $-\alpha < 0^*$.

25 $\alpha = (A_1 | A_2)$，$\beta = (B_1 | B_2)$，$\gamma = (C_1 | C_2)$，證明

$$\alpha\beta = \beta\alpha, \ (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma).$$

26. 設 $\alpha = (A_1 | A_2)$，$\beta = (B_1 | B_2)$，證明

$$|\alpha| - |\beta| \leqslant |\alpha + \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|.$$

並研究式中等號的作用.

第 三 章

點 集

1. 有度的空間 設 A 是一集，A 中任意兩元素 a, b 對應一個實數 $r(a,b)$，$r(a, b)$ 滿足三個條件：

(a) $r(a, b) > 0 \quad (a \neq b)$

(b) $r(a, a) = 0$

(c) $r(a, b) \leqslant r(c, a) + r(c, b)$，$c$ 是 A 中任一元素.

稱這種 A 是一個有度的空間，A 的元素稱爲點. A 的任一子集 B 稱爲點集，$A - B$ 稱爲 B 的餘集. 稱 $r(a, b)$ 爲兩點 a, b 間的距離，稱(c)爲三點不等式.

定理 1. $r(a, b) = r(b, a)$.

證明 在三點不等式裏，置 $b = c$，得

$$r(a, b) \leqslant r(b, a) + r(b, b).$$

由 (b)，末項是 0，所以 $r(a, b) \leqslant r(b, a)$ 同理 $r(b, a)$ 也不大於 $r(a, b)$，所以定理成立.

歐幾里得空間 設 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 都是實數，稱有序集

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_k)$$

爲 E_k 的一點，E_k 就是這些點的全體. 設

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_k) \in E_k,$$

$$y = (y_1, y_2, \cdots, y_k) \in E_k.$$

定 $r(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_k - y_k)^2}$，則$(a)$與$(b)$的成立，一目了然. 今證$(c)$也成立. 設 $z = (z_1, z_2, \cdots, z_k) \in E_k$，置

$$u_n = x_n - y_n \quad v_n = y_n - z_n$$

證明

$$\sqrt{u_1^2+\cdots+u_k^2}+\sqrt{v_1^2+\cdots+v_k^2}\geqslant\sqrt{(u_1+v_1)^2+\cdots+(u_k+v_k)^2}$$

好了。或是證明平方後的結果

$$\sqrt{u_1^2+\cdots+u_k^2}\ \sqrt{v_1^2+\cdots+v_k^2}\geqslant u_1v_1+\cdots+u_kv_k \qquad (1)$$

好了。然而當X、Y爲實數時，

$$\sum_{n=1}^{k}u_n^2\,x^2+2\sum_{n=1}^{k}u_nv_nxy+\sum_{n=1}^{k}v_n^2\,y^2=\sum_{n=1}^{k}(u_nx+v_ny)^2\geqslant 0,$$

所以(1)成立[1]。稱有度空間 E_k 爲 k 維(度)歐幾里得空間。E_k 爲實數的全體，兩實數 a, b 間的距離是

$$r(a,b)=\sqrt{(a-b)^2}=|a-b|.$$

設 $a=(a,a_2,\cdots,a_k)$, $b=(b,b_2,\cdots,b_k)$ 是 E_k 中如下的兩點：

$$a_1<b_1, a_2<b_2, \cdots, a_k<b_k$$

適合於關係 $a_1\leqslant x_1\leqslant b_1,\cdots,a_k\leqslant x_k\leqslant b_k$ 的點 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_k)$ 的全體，稱爲 E_k 中之一閉室。E_1 的閉室就是閉區間。$k>1$ 時，閉室的記號是

$$[a_1,a_2,\cdots,a_k;\ b_1,b_2,\cdots,b_k]$$

又稱適合 $a_1<x_1<b_1,\cdots,a_k<x_k<b_k$ 的 $x=(x_1,\cdots,x_k)$ 的全體爲 E_k 中的開室，用記號

$$(a_1,a_2,\cdots,a_k;\ b_1,b_2,\cdots,b_k)$$

表示。又 E_k 就是$(\overbrace{-\infty,\cdots,-\infty}^{k};\ \overbrace{+\infty,\cdots,+\infty}^{k})$，點 $x=$ $=(x_1,x_2,\cdots,x_k)$的 $x_1,\cdots,x_k$，順次稱它爲 x 的第一坐標，…，第 k 坐標。k 個坐標都是有理數的點，稱爲 E_k 的有理點。有理點的全體是可列的。室無論開閉，是一勢爲 $\aleph$ 的點集。

點集與一點的距離 設 A 是一有度空間，B 是 A 中一個不空點集。設 $a\in A$，當點 b 在 B 中變動時，稱 $r(a,b)$ 的下界 d 爲

---

1) 事實上，$\Sigma u_n^2\cdot\Sigma v_n^2-(\Sigma u_nv_n)^2=\frac{1}{2}\Sigma(u_\mu v_\nu-u_\nu v_\mu)^2\geqslant 0$。

a 與 B 的距離,用記號

$$d = r(a, B) = r(B, a)$$

表示．所以 $r(a,b)(b \in B)$是大於或等於 d 的．又對於任一正數 ε．B 有點 b 適合

$$r(a, b) < d + \varepsilon.$$

點集與點集的距離　設 A 是一有度空間，B 和 C 是 A 中的兩個點集．當點 b 在 B 中變動，點 c 在 C 中變動時，稱 $r(b, c)$的下界 d 爲 B 與 C 的距離,用記號

$$d = r(B, C) = r(C, B)$$

表示．所以對於 $\varepsilon > 0$，B 中有點 b，C 中有點 c 適合

$$r(b, c) < d + \varepsilon;$$

而關係 $r(b, c) \geq d$ 對於 B 的任何點 b，C 的任何點 c 都成立．

收斂點列的極限點　設 A 是一有度空間，$\{a_n\}$ 是 A 中之一點列．當

$$\lim_{n > m \to \infty} r(a_n, a_m) = 0$$

時，稱 $\{a_n\}$ 是一收斂點列．假如有點 a 適合

$$\lim_{n \to \infty} r(a, a_n) = 0.$$

則稱點列 $\{a_n\}$ 收斂於 a，a 是 $\{a_n\}$ 的極限點，用記號

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \text{ 或 } a_n \to a$$

表示．

完備空間　假如有度空間 A 中任何收斂點列的極限點，都屬於 A，則稱 A 爲一完備空間．

定理 2.　收斂點列的極限點不能有兩個．

證明　若 $a_n \to a$，$a_n \to b$，則由三點不等式，

$$r(a, b) \leq r(a, a_n) + r(b, a_n) \to 0.$$

所以 $r(a, b) \leq 0$，此非 $a = b$ 不可．證明完畢．

定理 3.　設 $x_n = (x_1^{(n)}, \cdots, x_k^{(n)})$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 是 E_k 中的

一點列，$x=(x_1,\cdots,x_k)\in E_k$. 點列$\{x_n\}$收斂於$x$的充要條件是

$$\lim_{n\to\infty} x_1^{(n)}=x_1,\cdots,\lim_{n\to\infty} x_k^{(n)}=x_k. \tag{1}$$

證明 若$x_n\to x$，則

$$\sqrt{(x_1^{(n)}-x_1)^2+\cdots+(x_k^{(n)}-x_k)^2}\to 0\ (n\to\infty). \tag{2}$$

故(1)成立．又(1)含有(2)．證明完畢．

三點不等式的拓廣 設A是一個有度的空間；B,C是A中的點集，$a\in A$, $a'\in A$，那末

$$r(B,a)\leqslant r(B,a')+r(a,a'),$$

$$r(B,C)\leqslant r(B,a)+r(C,a).$$

這些關係，容易從$r(B,C)$，$r(B,a)$的定義明白．

2. 開和閉 設A是一有度空間，B是A的一點集，a是A的一點．若B中有無限點列[1] $\{a_n\}$收斂於a，那麼稱a是B的一個**極限點**．B中任一點列至少具有一極限點時，稱B是一**緻密點集**．

設E_k是k維歐幾里得空間，$E\subset E_k$．若有常數c對於E中任何點$x=(x_1,\cdots,x_k)$適合

$$r(x,0)=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_k^2}\leqslant c$$

時，稱E是一**有界點集**．

定理1. E_k中的**緻密點集，一定有界；有界無限點集一定是緻密的**．($k=1$时，是瓦尔司脱拉司和波尔查诺[2]的定理．)

證明 設$k=1$，並且E是E_1中的有界無限點集．設

$$a_n\in E_1\ (n=1,2,\cdots),\quad |a_n|\leqslant c,$$

兩個關係$-c\leqslant a_n\leqslant 0$和$0\leqslant a_n\leqslant c$中，至少有一個對於無數個$n$成立．故置$\alpha_1=-c$, $\beta_1=0$．或置$\alpha_1=0$, $\beta_1=c$時，必有無數的a_n適合於

$$\alpha_1\leqslant a_n\leqslant \beta_1.$$

1) $\{a_n\}$中有無數個不同的點，則叫它做無限點列．

2) 波爾查諾(Bernard Bolzano) 1781—1848，捷克數學家．

設 a_{n_1} 是其中的一個. 置 $\gamma_1 = \dfrac{\alpha_1+\beta_1}{2}$ 時, 使 $\alpha_1 \leqslant a_n \leqslant \gamma_1$ 或 $\gamma_1 \leqslant a_n \leqslant \beta_1$ 成立的 a_n 必有無數, 故置 $\alpha_2 = \alpha_1$, $\beta_2 = \gamma_1$ 或置 $\alpha_2 = \gamma_1$, $\beta_2 = \beta_1$ 時, 必有無數 a_n 適合於 $\alpha_2 \leqslant a_n \leqslant \beta_2$. 設 $\alpha_2 \leqslant \leqslant a_{n_2} \leqslant \beta_2$. 又置 $\gamma_2 = \dfrac{\alpha_2+\beta_2}{2}$, 對於任何 m, 在 $[\alpha_m, \beta_m]$ 中有無數的 a_n. 設 $\alpha_m \leqslant a_{n_m} \leqslant \beta_m$, 且設 a_{n_m} 和 $a_{n_1}, \cdots, a_{n_{m-1}}$ 都不相同. 這樣,

$$-c \leqslant \alpha_m < \alpha_{m+1} < \beta_{m+1} < \beta_m \leqslant c,\ \beta_m - \alpha_m = \frac{c}{2^m}.$$

所以當 $m \to \infty$ 時, α_m 收斂於一點, β_m 也收斂於一點. 兩極限點是一致的. 設

$$\lim \alpha_m = \lim \beta_m = \gamma$$

對於正數 ε, 必有 m_0 適合 $\beta_{m_0} - \alpha_{m_0} < \varepsilon$. 因 $[\alpha_m, \beta_m]$ 含有 γ 和 a_{n_m}, 所以

$$|a_{n_m} - \gamma| \leqslant |\beta_m - \alpha_m| < \varepsilon, \quad (n \geqslant m_0).$$

由是 $a_{n_m} \to \gamma$, 所以 E_1 中的有界無限點集, 一定是緻密的.

其次, 用數學歸納法證明 E_k 中的有界無限點集的緻密性. 先設 E_{k-1} 中的有界無限點集是緻密的. E_k 中無限有界點集 E 的點 $x = (x_1, \cdots, x_k)$, 必有某一坐標 x_k 成 E_1 中的無限點集. 設第一坐標 x_1 成 E_1 的無限點集. 那末

$$(x_1, x_2, \cdots, x_{k-1})$$

成 E_{k-1} 的無限點集 ε, 但 $(x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k) \in E$. 由假設 ε 必有收斂點列如下:

$$x^{(\nu)} = (x_1^{(\nu)}, x_2^{(\nu)}, \cdots, x_{k-1}^{(\nu)}) \to (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_{k-1}).$$

對於 $x^{(\nu)}$, 必有 $x_k^{(\nu)}$ 適合 $(x_1^{(\nu)}, \cdots, x_{k-1}^{(\nu)}, x_k^{(\nu)}) \in E$. 由瓦耶司脫拉司與波爾查諾的定理, $x_k^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \cdots)$ 中有如下的部分數列:

$$\lim_{m\to\infty} x_k^{(\nu_n)} = \bar{x}_k,$$

由是 $(x_1^{(\nu_n)}, \cdots, x_k^{(\nu_n)}) \to (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_k)$, 定理 1 的後半已證畢.

最後證明定理 1 的前半．若 E 是 E_k 中的無界點集，那末，E 中必有點 $x^{(\nu)}$ 適合

$$r(O, x^{(\nu)}) > \nu,$$

但 O 表示原點：$x_1 = 0, \cdots, x_k = 0$．假如 E 是緻密的，那末 $\{x^{(\nu)}\}$ 至少有一極限點 x：$r(x, x^{(\nu_n)}) \to 0$．然而從

$$\nu_n < r(0, x^{(\nu_n)}) \leqslant r(x, 0) + r(x, x^{(\nu_n)}),$$

遇着矛盾．所以緻密點集是有界的．證明完畢．

定義 設 A 是一有度的空間，$C \subseteq B \subseteq A$．假如 C 的極限點屬於 B 也屬於 C，那末稱點集 C 對於 B 是(封)閉的，點集 $B - C$ 對於 B 是開(放)的，或是說：C 在 B 中是閉的．

系 若 $C \subseteq B$，並且 C 對於 B 是開的，則 $B - C$ 對於 B 是閉的．

例如 E_1 中的點集 $A = (0, 1]$ 和 $B = (0, 2)$，則 $A \subset B$，A 之極限點的全體是 $[0,1]$，它屬於 B 的部分是 $(0,1] = A$、所以 $(0,1]$ 對於 $(0, 2)$ 是閉的，而 $B - A = (1, 2)$ 對於 $(0, 2)$ 是開的．

設 A 是一有度的空間，$C \subseteq B \subseteq A$，$C$ 的極限點的全體是 C'，那末 C 在 B 中具有封閉性的充要條件為

$$C'B \subseteq C.$$

C 對於 B 是開的充要條件為 $(B - C)'B \subseteq B - C$．

定理 2. 設 A, B, C 都是某有度的空間中的點集．若 A 對於 B 是閉的，B 對於 C 是閉的；那末，A 對於 C 是閉的．

證明 由假設 $A'B \subseteq A$，$B'C \subseteq B$，$A \subseteq B \subseteq C$．所以

$$A'C \subseteq B'C \subseteq B.$$

由是

$$A'C \subseteq A'B \subseteq A.$$

證明完畢．

系 若 A 對於 B 是開的，B 對於 C 是開的，那末，A 對於 C 也是開的．

定理 3. 假如有限個集$A_1, A_2, \cdots, A_n$對於B都是閉的，那末，它們的和集$A_1+A_2+\cdots+A_n$在B中也是閉的．

證明 $A=A_1+\cdots+A_n$的任一極限點，一定是某A_k $(k\geqslant 1, k\leqslant n)$的極限點．這個極限點屬於$A_k$的話，自然屬於$A$．證明完畢．

集的和通表示．設$A\subseteq B$，則$B=\sum_A A+\prod_A (B-A)$．這是因爲：假如B的某元素不屬於任何A（式中的A），必屬於任何$B-A$也就是屬於通集$\Pi(B-A)$．

定理 4. 假如有限個集$A_1, \cdots, A_n$對於B都是開的，那末，它們的通集$A_1, A_2, \cdots, A_n$對於B也是開的．

證明 由集的和通表示，

$$B-A_1, A_2\cdots A_n=(B-A_1)+(B-A_2)+\cdots+(B-A_n).$$

因$B-A_1, \cdots, B-A_n$都在B中是閉的，由定理 3，和集$\sum_1^n(B--A_k)$對於B也是閉的，既然$B-\prod_1^n A_k$對於B是閉的，其餘集$\prod_1^n A_k$對於B是開的．證明完畢．

定理 5. (i) 若諸集$\{A\}$中任何集A對於B是閉的，那末，它們的通集ΠA對於B也是閉的．

(ii) 若諸集$\{A\}$中任何集A對於B是開集，那末，它們的和集ΣA對於B也是開的．

證明 (i) 因爲通集ΠA的極限點，是$\{A\}$中任一集的極限點，所以ΠA的極限點屬於B的話，一定屬於$\{A\}$的任一集，因之必在ΠA中．所以ΠA對於B是閉的．

(ii) 因$B-\Sigma A=\Pi(B-A)$的右端對於B是閉的，所以ΣA對於B是開的．定理證明完畢．

注意 無限個集，雖然個個對於B是閉(開)的，它們的和(通)集未必對於B是閉(開)的．例如在E_1中的一切點集

$$\left[0,\frac{1}{2}\right],\left[\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}\right],\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2},\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}\right],\cdots$$

對於點集$[0,1]$是閉的，但是它們的和集$[0,1)$對於$[0.1]$不是閉的．因爲1是$[0,1)$的極限點，1屬於$[0,1]$而不屬於$[0,1)$．又如一切點集

$$\left[0,\frac{1}{2}\right),\left[0,\frac{1}{4}\right),\left[0,\frac{1}{8}\right),\cdots$$

對於$[0,1]$都是開的；但是它們的通集僅含有一點0，其餘集$(0,1]$在$[0,1]$中不是閉的，所以通集

$$\prod_1^\infty\left[0,\frac{1}{2^n}\right),$$

在$[0,1]$中不是開的．

定義 設A是一有度空間，B在A中是閉（開）的時候，稱B是一閉（開）集．

定理 6. 設$A_1, A_2, \cdots$都是某有度空間中的（不空）緻密閉集．若$A_1 \supset A_2 \supset \cdots$，則通集$\Pi A_n$決不是空的．

證明 從A_n中取一點a_n，使$a_n \bar{\in} A_{n+1}$，得點列$\{a_n\}$．由假設

$A_1 \supset \{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$, $A_2 \supset \{a_n\}_{n=2,3,\ldots}$, $\cdots$ $A_\nu \supset \{a_n\}_{n=\nu,\nu+1\ldots}$.

因A是緻密的，所以$\{a_n\}$至少有一極限點a，a也是$\{a_\nu, a_{\nu+1},\cdots\}$的極限點．所以是$A_\nu$之一極限點．一切點集$A_\nu$都是閉集，所以$a \in A_\nu$ $(\nu=1,2,\cdots)$．因之

$$a \in \prod_1^\infty A_n.$$

證明完畢．

注意 當$A_1 \supset A_2 \supset \cdots$時，若一切$A_n$僅僅是緻密點集，則通集$\Pi A_n$可能是空的．例如$A_n=\left(0,\frac{1}{n}\right)$ $(n=1,2,\cdots)$都是緻密的，且$A_{n-1}\supset A_n$，然而ΠA_n是空集．又定理6中"緻密"一語，也不可以除去：例如

$$A_n\ [n, \infty) \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

那末一切 A_n 都是閉集，且 $A_{n-1} \supset A_n$，然而 ΠA_n 是空集.

定理 7. 設 A 和 B 是沒有公共點的兩個閉集，其中若有一個集是緻密的，則兩集的距離 $r(A, B) > 0$.

證明 設 A 是一緻密點集，假如 $r(A, B) = 0$，那末對於任一正整數 n，A 和 B 中各有一點 a_n 和 b_n，適合

$$r(a_n, b_n) < \frac{1}{n}$$

若 $a_m = a_{m+1} = \cdots = a$，則 a 是 $\{b_n\}$ 的極限點，也就是 B 的極限點；B 是閉的，所以 a 屬於 B，因之 AB 有點 a，此有背於假設，所以 $\{a_n\}$ 是一無限點集. A 是一緻密點集，所以 $\{a_n\}$ 有一極限點 a；此 a 屬於 A，因為 A 是閉的緣故. 設 $a_{n_\nu} \to a$，則當 $\nu \to \infty$ 時，

$$r(a, b_{n_\nu}) \leqslant r(a, a_{n_\nu}) + r(a_{n_\nu}, b_{n_\nu}) \to 0.$$

由是 a 也是 B 的極限點；B 是閉的，所以 a 屬於 B. 因之 A 與 B 有公共點 a，這是有背於假設的. 所以 $r(a, b) > 0$. 證明完畢.

注意 沒有公共點的兩個閉集，其距離可能是 0. 例如在平面 (E_2) 上，A_1 是 x 軸，A_2 是雙曲線 $xy = 1$，即

$$A_1 = \{(x, 0)\}, A_2 = \left\{\left(x, \frac{1}{x}\right)\right\}.$$

兩集 A_1 和 A_2 都是閉集，且沒有公共點，然而從

$$\sqrt{(x - x)^2 + \left(0 - \frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{|x|},$$

知道 $r(A_1, A_2) = 0$.

定義 設點集 $A_1, A_2, \cdots$ 對於 B 都是閉的，稱和集 ΣA_n 為 B 中之一外限點集. 假如 $A_1, A_2, \cdots$ 在 B 中是開的，那末，稱它們的通集 ΠA_n 是 B 中之一內限點集.

由此定義，和定理 5 的注意，我們可述

定理 8. 設 A 是 B 中之一外限點集，A 對於 B 未必是閉的. 設 A 是 B 中的一內限點集，A 對於 B 未必是開的.

由 $B - \Sigma A_n = \Pi(B - A_n)$知下述定理成立:

定理 9. 若A是B中之一外(內)限點集,則$B-A$是B中之一內(外)限點集.

3. 點集的包、點集的核、點集的境界 設A是一有度空間,a是A中的一點,含有a的任何開集,稱爲a的環境. 含有點集B的任一開集,稱爲B的環境. 設a是A的一點,$\rho>0$,稱適合

$$r(x, a)<\rho, \quad x \in A$$

的x全體爲球,a是球的中心,ρ是球的半徑;球的記號是$O(a,\rho)$又適合於

$$r(x, B)<\rho, \quad x \in A$$

的x,記其全體爲$O(B, \rho)$.

定理 1. $O(a, \rho)$是點a之一環境,$O(B, \rho)$是點集B之一環境.

證明 要證明$O(a, \rho)$是a之一環境,就是要證明

$$A - O(a,\rho)$$

是一閉集. 假如此集不是閉的,那末它必有一極限點不屬於它. 這就是說有$\{c_n\}$適合

$$c_n \in A - O(a, \rho),\ c_n \to c,\ c \in O(a, \rho).$$

所以$r(a, c_n) \geqslant \rho$, $r(a, c)<\rho$. 由三點不等式,

$$r(c_n, a) \leqslant r(c_n, c) + r(a, c) \to r(a, c).$$

左端不小於ρ,而右端小於ρ;是不可能的事. 同樣可證$O(B, \rho)$是B的一環境. 證明完畢.

定理 2. 閉集是內限點集(詳言之:有度空間中的內限點集). 事實上,若C是閉集,則當正數$\rho_n \to 0$時,

$$C = \prod_{n=1}^{\infty} O(c, \rho_n).$$

證明 現在證明C含有$\Pi O(C, \rho_n)$. 設a是通集$\Pi O(c, \rho_n)$中的一點,那末,$a \in O(c,\rho_n)$. 所以c必有點c_n適合

$$r(a, c_n) < \rho_n.$$

故 $c_n \to a$, C 是閉集，所以 a 屬於 C. 證畢.

定理 3. 開集是外限點集.

證明 設 O 是有度空間 A 中的開集，那末

$$A - O = C$$

是一閉集，由定理 2, $C = \Pi O(C, \rho_n)(\rho_n \to 0)$. 從

$$A = \Pi O(C, \rho_n) + \Sigma[A - O(C, \rho_n)]$$

得 $O = A - C = \Sigma(A - O(C, \rho_n))$. 證明完畢.

定理 4. 設 Q 是一開集，$a \in Q$, 那末取正數 ρ 甚小時，$O(a, \rho) \subset Q$.

證明 若 Q 不含有任何 $O(a, \rho)$, 那末，對於正整數 n, $O\left(a, \frac{1}{n}\right)$ 中必有點 a_n 不屬於 Q, 由是

$$a_n \in A - Q, r(a_n, a) < \frac{1}{n}, a_n \to a, \quad a \in A - Q.$$

最後的結果與假設 $a \in Q$ 不相容. 故必有 ρ 使

$$O(a, \rho) \subset Q.$$

證明完畢.

任意個開集的和集是開集，所以定理 4 中的條件是開集的充足條件，這就是說：對於集 Q 中的任意一點 a, 有 $O(a, \rho)$ 屬於 Q 的話. Q 是開集.

點集 B 之極限點的全體 B' 名曰 B 的一次導集，簡稱 B' 是 B 的導集.

定理 5. 點集的(一次)導集是一閉集.

證明 設 B' 是 B 的導集，若 a 是 B' 的一極限點，證明 $a \in B'$ 好了.

設 $\rho_n > 0$, $\rho_n \to 0$. a 的環境 $O(a, \rho_n)$ 中必有 B' 的點 b_n, 即

$$r(a, b_n) < \rho_n.$$

然 b_n 是 B 的極限點,所以 B 中必有點 a_n 適合於

$$r(a_n, b_n) < \rho_n, a_n \neq a_1, \cdots, a_n \neq a_{n-1}.$$

從三點不等式 $r(a, a_n) \leqslant r(a, b_n) + r(a_n, b_n) < 2\rho_n$, 知

$$r(a, a_n) \to 0.$$

所以 $a \in B'$. 證明完畢.

定義 點集 B 與其導集 B' 的和集 $B + B'$, 稱為 B 的包(閉包),用記號 B^0 表示: $B^0 = B + B'$.

定理 6. 點集B的包 B^0 是一閉集. 含有B的閉集,以其閉包 B^0 為最小;即若閉集C含有B,則C必含有 B^0.

證明 B^0 的極限點, 或為 B 的極限點, 或為 B' 的極限點,兩者都屬於 B',所以屬於 B^0,因此 B^0 是閉的.

因 $C \supseteq B$, C 是閉集,所以 $C \supseteq B'$. 因之 $C \supseteq B^0$.

證明完畢.

設 B 是有度空間 A 中之一點集. 因

$$(A - B)^0 \supseteq A - B,$$

所以 $A - (A - B)^0 \subseteq A - (A - B) = B$. 因之 B 含有開集 $A - (A - B)^0$.

定義 設 B 是空間 A 中的一點集,稱開集 $A - (A - B)^0$ 為 B 的核,以 $K(B)$記之.

定理 7. 含在點集B中的開集, 以其核 $K(B)$ 為最大, 詳言之:若B含有開集O,那末,O含在B的核$K(B)$中.

證明 由假設空間 A 中的點集 $B \supseteq O$,那末,

$$A - B \subseteq A - O, \quad (A-B)^0 \subseteq (A - O)^0.$$

然 $A - O$ 是一閉集,所以$(A - O)^0$就是 $A - O$. 由是

$$A - (A - B)^0 \supseteq A - (A - O) = O.$$

這就是說: $K(B) \supseteq O$. 證畢.

定理 8. 點集B對於點集M為閉的充要條件是有閉集C適合 $B = CM$.

證明 設 B 對於 M 是閉的，則

$$B'M \subseteq B \subseteq M.$$

由是 $B \equiv BM = (B+B')M = B^0M$. B^0 是閉集，故所設條件是必要的.

次設 $B = CM$, C 是閉集. 若 $a \in B'$, 則由 $B = CM$,

$$a \in C' = C,$$

因之 $a \in CM = B$. 故 B 對於M是閉的. 證畢.

定理 9. 點集B對於點集M是開的，充要條件爲有開集O適合於$OM = B$.

證明 在空間 A 中 B 對於 M 是開的條件是：由定理 8，有閉集C適合

$$M - B = CM.$$

因 $B = M - (B - M) = M - CM$，而

$$M - CM = MA - CM = M(A - C).$$

$A - C$ 是一開集，所以 $B = M(A - C)$. 這是所要的條件. 證明完畢.

定義 設 B 是空間 A 中之一點集. B 的包 B^0 與其餘集的包 $(A-B)^0$ 的通集，稱爲 B 的境界(也是 $A - B$ 的境界).

所以境界 $B^0(A-B)^0$ 是一閉集. 因

$$B' = B'B + B'(A - B).$$

故得 $B^0 = B + B^0(A-B)^0$. 這就是說：B 與其境界的和集，就是 B 的包. 就B 的餘集而言，得

$$(A-B)^0 = (A-B) + (A-B)^0 B^0.$$

所以 $A - (A-B)^0 = B - B^0(A-B)^0$. 這就是說：從 B 除去 B 的境界上的一切點，得着 B 的核.

今以 $\Gamma(B)$, $\mathfrak{Z}(B)$, $K(B)$ 表示 B 的境界，B 的包，B 的核，得定理如下：

定理 10. $B + \Gamma(B) = \mathfrak{Z}(B)$, $B - \Gamma(B) = K(B)$.

例如在平面 E_2 上，有點集 E，E 的點(x, y)皆屬於圓 $x^2+y^2<$ <1，但是一切直綫分

$$\frac{x}{y}=\text{有理數}，\quad \frac{1}{2}<\sqrt{x^2+y^2}<1.$$

上的點都不屬於E；圓中其它的點皆屬於E，那末，

$$K(E)\text{是開圓}\quad x^2+y^2<\frac{1}{4},$$

$$\mathfrak{Z}(E)\text{是閉圓}\quad x^2+y^2\leqslant 1,$$

$$\Gamma(E)\text{是圓環}\quad \frac{1}{2}\leqslant\sqrt{x^2+y^2}\leqslant 1.$$

定義 設 B 是空間 A 中之一點集，a 是 B 的一點． 若有 $O(a,\rho)\equiv B$，則稱 a 是 B 之一內點．稱餘集 $A-B$ 的內點為 B 的外點

定理 11. 設B是空間A之一點集，則A的點可分為三種，B的內點，B 的外點，B 的境界點．

證明 設 a 是 A 的任意一點．若 $a\bar{\in} B^0(A-B)^0$，那末或是 $a\in B$ 或是 $a\in A-B$．若 $a\in B$，那末 a 是B 的內點．若 $a\bar{\in} B$，則

$$a\in(A-B)-B^0(A-B)^0$$

此時，a 為B的外點．證明完畢．

4. 點集與其導集 稠密與疏朗 設B是空間A中的一點集，稱$B-B'$ 中的點為B 的孤立點．B 的孤立點是屬於B 的，但是非為B 的極限點，也決非B 的內點，所以是B 的境界點．點集中一切點都是孤立的時候，稱此點集為孤立點集，例如 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots$ 成一孤立點集． 無孤立點的點集，稱為已密點集，例如 E_2 中有理點的全體成一已密點集． 已密點集中的點，都是它的極限點，此時 B' 含有B．稱閉的已密點集為完全點集．由是，

完全集 B 是適合於 $B=B'$ 的集，

已密集 B 是適合於 $B\subseteq B'$ 的集，

閉集 B 是適合於 $B \supseteq B'$ 的集，

孤立点集 B 是适合于 $BB' = 0$ 的集.

定義　設 B 與 M 都是空間 A 中的點集．假如 M 的任何點的任何環境中含有通集 $M \cdot B$ 的點，稱 B 在 M 中是稠密的．特別，B 在 A 中稠密的時候，稱 B 是處處稠密的點集．

處處稠密的點集是一已密點集．例如在平面上，有理點的全體 B 在任一矩形中是稠密的．

定理 1.　B 在 M 中稠密的充要條件，是 $(BM)^0 \supseteq M$.

證明　設 B 在 M 中稠密，那末 M 的任何孤立點屬於 B．這就是說：

$$M - M'M \subseteq MB.$$

假如 m 是 $M'M$ 中之一點，那末 $O\left(m, \frac{1}{n}\right)$ 中有點 a_n 屬於 BM，因之

$$r(a_n, m) < \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

由是 $a_n \to m$, $m \in (BM)'$．此即證明

$$M \cdot M' \subseteq (BM)'.$$

合併上述兩結果，得 $M \subseteq MB + (BM)' = (MB)^0$.

反過來說，設 $M \subseteq (MB)^0$, m 是 M 的任意一點．m 或屬於 MB 或屬於 $(BM)'$．假如 m 屬於 MB，那末

$$m \in O(m, \rho) \cdot MB.$$

假如 m 屬於 $(BM)'$，則必 $O(m,\rho) \cdot MB$ 不是空集．所以 B 在 M 中稠密，證畢.

定義　設 B 與 M 都是空間 A 中的點集．假如 M 的任何點的任何環境中，有開集含有 M 之點而不含有 BM 之點，稱 B 在 M 中是疏朗的．假如 B 在 A 中是疏朗的，則稱 B 是一疏朗點集.

直綫 E_1 上之疏朗點集 B，就是任何區間中必含有一小區間，

其中無 B 的點. 平面 E_2 上的疏朗點集 B, 即任何圓中必有一圓不含 B 的點.

定理 2. 若 B 在 M 中是疏朗的,則 $M - BM$ 在 M 中是稠密的.

證明 因 B 在 M 中是疏朗的,所以 M 中任意一點 m 的環境中必有不屬於 BM 的點,所以含有 $M - BM$ 的點. 由是 $m \in (M - BM)^0$,因之 $M \subseteq (M - BM)^0$. 證畢.

定理 3. 若 $B_1, B_2, \cdots, B_k$ 在 M 中都是疏朗的,那末和集

$$B = B_1 + B_2 + \cdots + B_k$$

在 M 中也是疏朗的.

證明 設 $m \in M$,則 $O(m, \rho)$ 中必有一開集 O_1 如下:

$$O_1M \neq 0, \quad O_1B_1M = 0.$$

設 $m_1 \in O_1M$, 則 $O(m_1, \rho_1)$ 中必有如下的一開集 O_2:

$$O_2M \neq 0, \quad O_2B_2M = 0.$$

如是繼續 k 次得一開集 O_k, 它含有 M 的點而不含有 BM 的點. 故 B 在 M 中是疏朗的. 證明完畢.

注意 定理 3 中的 k,不能趨於 ∞. 例如在 E_1 中,設有理數的全體爲

$$r_1, r_2, r_3, \cdots.$$

若 B_k 只含有一個元素 r_k, 那末 B_k 是一疏朗點集, 然而和集 ΣB_k 却是處處稠密的集. 稠密點集不是疏朗的.

定義 若 $B_1, B_2, \cdots$ 在 M 中都是疏朗的點集, 則稱它們的和集 ΣB_k 在 M 中屬於第一類型. 第一類型以外的點集, 稱爲在 M 中屬於第二類型.

5. 聯絡點集 點集 B 若不能分解成在 B 中都是閉的（都不是空的）兩點集時,稱 B 是一聯絡點集. 只含有一點的點集也算是聯絡點集. 假如聯絡點集 B 所含不止一點,那末 B 不能有孤立點. 所以聯絡點集一定是一個已密點集. 然而其逆不眞:例如 E_1 中一

切有理點所成之集 R 是一已密點集；但是 R 可以分解為 R_1+R_2，R_1 是大於 $\sqrt{2}$ 的一切有理數集，$R_2=R-R_1$，R_1 與 R_2 在R中都是閉的緣故，R不是聯絡點集．

若 B 不是聯絡的，那末由 §3 的定理 8，一定有兩閉集 C_1, C_2 適合

$$B=C_1B+C_2B, C_1B\neq 0, C_2B\neq 0, C_1B\cdot C_2B=0.$$

設$b_1\in C_1B$, $b_2\in C_2B$, 設 B^* 是含有 b_1, b_2 的 B 之任一子集．置

$$B_1^*=B^*\cdot C_1B,\quad B_2^*=B^*\cdot C_2B.$$

那末 B_1^* 含有 b_1, B_2^* 含有b_2, 都不是空的，且 $B_1^*\cdot B_2=0$．又因

$$B_1^*=C_1B^*,\quad B_2^*=C_2B^*,$$

所以 B_1^* 與 B_2^* 在 B^* 中都是閉的．因之 B^* 也不是聯絡點集．由是獲得

定理 1. 對於點集B的任意兩點 b_1 和 b_2, B 若有聯絡的子集包含 b_1 和 b_2, 那末B是一聯絡點集．

定理 2. 設 $B_1, B_2, \cdots, B_k, \cdots$ 都是聯絡點集．假如 $B_kB_{k+1}\neq 0$; $k=1, 2, \cdots$．那末和集

$$B=B_1+B_2+\cdots+B_k+\cdots$$

也是聯絡點集．

證明 設b_1與 b_2是 B 的任意兩點．設

$$b_1\in B_k,\ b_2\in B_n,\ k<n.$$

由定理 1，證明$B_1+B_2+\cdots+B_n$是一聯絡點集好了．所以只要證明 B_1+B_2 是一聯絡點集好了．假如 B_1+B_2 不是聯絡的，那末必有閉集 C_1 與 C_2 適合

$$B_1+B_2=(B_1+B_2)C_1+(B_1+B_2)C_2,$$
$$(B_1+B_2)C_1\cdot(B_1+B_2)C_2=0,$$

並且兩集$(B_1+B_2)C_1$和$(B_1+B_2)C_2$都不是空的．由是

$$\text{(i)}\ B_1=B_1C_1+B_1C_2,\quad \text{(ii)}\ B_2=B_2C_1+B_2C_2.$$

由假設 $B_1B_2\neq 0$．從 B_1B_2 中任取一點 b, b 若不屬於 C_1, 則必屬

於 C_2. 今設 $b \in C_1$, 則

(iii) $b \in B_1C_1$, (iv) $b \in B_2C_1$.

因 $(B_1 + B_2)C_3$ 不是空的, 所以 $B_1C_2 \neq 0$, 或 $B_2C_2 \neq 0$. 若 $B_1C_2 \neq$ $\neq 0$, 則由(i)和(iii), B_1 變成非聯絡集; 又若 $B_2C_2 \neq 0$, 則由(ii)和(iv), B_2 變成非聯絡集; 兩者都與假設相衝突, 所以 $B_1 + B_2$ 是聯絡的. 證明完畢.

系 設 $\{B\}$ 是聯絡點集的集, 若其中任何兩集必有共通點, 那末, 它們的和集 ΣB 也是一個聯絡點集.

證明 在和集 ΣB 中任取兩點 b, b'. 那末 $\{B\}$ 必有兩集 B, B' 如下:

$$b \in B, \quad b' \in B'.$$

由假設 $BB' \neq 0$, 所以 $B + B'$ 是一聯絡點集. 由定理 1, ΣB 是一聯絡點集.

定理 3. 設 B 是一聯絡點集, $\varepsilon > 0$, 對於 B 中任何兩點 b_0, b'; B 中必有一 ε 連鎖連結此兩點; 詳言之, B 中有有限個點 b_0, $b_1, \cdots, b_k = b^0$ 適合

$$r(b_{\nu-1}, b_\nu) < \varepsilon \quad (\nu = 1, 2, \cdots, k).$$

證明 B 中若有兩點 b 與 b'. B 沒有 ε 連鎖來連結它們的話, 那末, 固定 b, 設這種 b' 的全體為 B^*, 兩集 B^* 與 $B - B^*$ 都不是空的, 因前者有 b', 後者有 b 之故. 假如

$$a^* \in B^*, \quad a \in B - B^*,$$

則 $r(a, a^*) \geqslant \varepsilon$; 若不然, a^* 當屬於 $B - B^*$ 了, 所以

$$r(B^*, B - B^*) \geqslant \varepsilon.$$

因之, $B^{*\prime}(B - B^*) = 0$, $B^*(B - B^*)' = 0$. 由是 B^* 與 $B - B^*$ 對於 B 都是閉的. 由 $B = B^* + (B - B^*)$, 知 B 是不聯絡的, 此與假設相衝突. 證畢.

定理 4. 設 B 是一緻密閉集. 若 B 中任何兩點, 都可用 B 中的 ε 連鎖連結的話, B 是一聯絡點集.

證明 假如 B 不是聯絡的，則 B 可分解爲如下的不相交的兩集 B_1 與 B_2，

$$B = B_1 + B_2, \quad B_1 \neq 0, \quad B_2 \neq 0,$$

B_1 與 B_2 在 B 中都是閉的．然 B 是閉集，所以 B_1 與 B_2 也都是閉集．又 B 是緻密的，從而 B_1, B_2 也都是緻密的，由是

$$r(B_1, B_2) > 0,$$

取正數 ε 小於 $r(B_1, B_2)$． 當 $b_1 \in B_1$, $b_2 \in B_2$ 時，b_1 與 b_2 之間，B 中沒有 ε．連鎖了．此有背於假設，所以 B 是聯絡的．證明完畢．

注意 定理 4 中關於 B 的兩條件：(i) B 是閉集 (ii) B 是緻密集，都不能除去．例如平面上的點集．

$$B_1 = \{(x, 0)\}, \quad B_2 = \left\{\left(x, \frac{1}{x}\right)\right\}$$

都對於和集 $B_1 + B_2$ 是閉的；對於任一正數 ε, B 的任何兩點，一定有 B 中的 ε 連鎖連結它們，然而 B 並非聯絡的．實際上，B 不是緻密的．又如在直綫上，點集

$$B = (0, 1) + (1, 2)$$

是緻密的，然而不是閉集．B 的任何兩點，雖有 ε 連鎖可以連結它們，可是 B 不是聯絡點集．

定理 5. 開室與閉室都是聯絡點集．

證明 設 $C = (a_1, a_2, \cdots, a_k;\ b_1, b_2, \cdots, b_k)$ 是 E_k 中之一室．對於 C 中任何兩點．

$$y = (y_1, y_2, \cdots, y_k), \quad z = (z_1, z_2, \cdots, z_k)$$

作點集 X, X 是適合條件

$$x_n = z_n + \lambda(y_n - z_n) \quad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$$
$$(n = 1, 2, \cdots, k)$$

的一切點 $x(\lambda) = (x_1, x_2, \cdots, x_k)$ 所成之集．因 $X \subset C$, 所以證明 X 是一聯絡點集好了（定理 2）．閉集 X 是緻密的，因爲當 $0 \leqslant \lambda_n \leqslant$ $\leqslant 1$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 時，必有

$$\lambda_{n_\nu} \to \lambda \quad (\nu \to \infty)$$

所以 $x(\lambda_{n_\nu}) \to x(\lambda)$. 又設 ε 是一任意正數,正整數 m 大於

$$\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{(y_1 - z_1)^2 + \cdots + (y_k - z_k)^2},$$

置 $a_\mu = x\left(\frac{\mu}{m}\right)(\mu = 0, 1, \cdots, m)$,那末, $a_\mu \in X$,且

$$r(a_{\mu-1}, a_\mu) = \frac{1}{m}\sqrt{(y_1 - z_1)^2 + \cdots + (y_k - z_k)^2} < \varepsilon.$$

由定理 4, C 是一聯絡點集,證明完畢.

定理 6. 設 $B(\neq 0)$是 E_k 中之一聯絡點集,則 B 之勢或是 1 或是 $\aleph$.

證明 設 B 所含不止一點,證明 B 之勢是 $\aleph$ 好了. 先證明下面的事實:假如有度空間 A 中的聯絡點集 M 含有點集 S 的點,也含有 $A - S$ 的點,那末 M 必有 S 之一境界點. 因為

$$M = MS^0 + M(A - S)^0$$

的兩項在 M 中都是閉的, 並且都不是空的; M 是一聯絡點集, 所以兩項有共通點,此點在 S 的境界上.

今設 $a = (a_1, \cdots, a_k)$ 與 $b = (b_1, \cdots, b_k)$是 B 的相異兩點. 我們可以假設 $a_1 < b_1$. 任取一數 c 適合

$$a_1 < c < b_1.$$

設點 $x = (x_1, \cdots, x_k)$, $(x_1 \leq c)$的全體為 M,那末,點集 B 含有 M 的點 a,又含有 $E_k - M$ 的點 b,所以 B 含有 M 之一境界點:

$$(c, x_2, x_3, \cdots, x_k).$$

然 c 是(a_1, b_1)中任意之數,所以 B 之勢是 $\aleph$. 證明完畢.

定義 名有度空間 A 中之開集為 A 中之一區域. A 中聯絡閉集 B 所含不止一點的時候,稱 B 是一連續點集.

由是連續點集是一完全點集. 閉室是一連續點集,開室是一區域. 直綫上的區域,就是開的區間.

設 l 是 E_2 中沒有兩端的直綫段,那末 l 是一聯絡點集,然而不

是 E_2 中之一區域，因爲 l 並不是 E_2 中之開集．l 也不是連續點集，加入 l 之兩端於 l，乃成連續點集．

6. 掩蓋定理　當 a 是點集 M 的內點時，稱 M 掩蓋 a．關於掩蓋的情況，最初波賴爾在直綫上加以研究，嗣後有種種拓廣．

閉區間上的掩蓋定理[1]　設開區間 Δ 之集 $\{\Delta\}$ 掩蓋閉區間 $[a, b]$ 中一切點．那末，$\{\Delta\}$ 中必有有限個區間也能掩蓋 $[a, b]$ 中所有的點．

證明　定理中結語之意，是 $\{\Delta\}$ 中有區間 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$，它們的全部內點包含 $[a, b]$ 中一切點．

將 $[a, b]$ 等分爲 n 個小區間．若每一小區間都被 $\{\Delta\}$ 中某一區間所包含，那末 $\{\Delta\}$ 中有（至多）n 個區間遮蓋了 $[a, b]$ 中一切點，而定理成立．假如 n 儘管增大，此事不能成立；則當 n 等分時，必有一小區間 J_n 不爲 $\{\Delta\}$ 中任何區間所包含．設 a_n 是 J_n 中的一點，得着點列 $\{a_n\}$．設 c 是此點列之一極限點．由假設 c 是 $\{\Delta\}$ 中某 Δ 之一內點．設 $c \in J_{n_\nu} (\nu = 1, 2, \cdots)$，則當 ν 甚大時，Δ 包含 J_{n_ν}；這是與 J_n 的意義相抵觸的．所以上述手續至有限回而止，而定理得着證明．

注意　上述定理，對於不是閉的區間未必成立．例如

$$\{\Delta\} = \left(\frac{1}{2}, 2\right), \left(\frac{1}{4}, 2\right), \left(\frac{1}{8}, 2\right), \cdots$$

能掩蓋 $(0, 1]$ 中一切點．但是不能用 $\{\Delta\}$ 中有限個的區間遮蓋它們．

今證明一般的掩蓋定理：

一般的掩蓋定理[2]　設 M 是有度空間中之一緻密閉集，此空間中若有點集 B 之集 $\{B\}$ 掩蓋 M 的一切點，那末 $\{B\}$ 中必有有限個

---

1) 最初波雷耳 (Borel, 1894) 設 $\{\Delta\}$ 是一可列集，勒貝格 (Lebesgue, 1904) 把"可列"的條件取消．

2) 這是葛羅斯 (W. Gross) 於 1914 年在維耶納科學院的雜誌上發表的．

的點集遮蓋 M 中所有的點.

證明 對於 M 中任一點 a, $\{B\}$ 中必有一 B 掩蓋 a; 設適合

$$a \in B, \quad O(a, \rho) \subset B$$

之最大的半徑 ρ 爲 $\rho(a)$. 當 a 在 M 中變動時,設 $\rho(a)$的下界爲 ρ_0, 先證 ρ_0 是一正數:假如 ρ_0 等於 0,那末 M 含有點列 $\{a_n\}$ 適合

$$\lim_{n\to\infty} \rho(a_n) = 0.$$

由於 M 的緻密性, 我們可以假設 $a_n \to a_0$. 又因 M 是一閉集, a_0 必屬於 M, a_0 的環境 $O\left(a_0, \frac{1}{2}\rho(a_0)\right)$ 中含有 $a_n(n > m)$. 所以當 n 大於 m 時,

$$\rho(a_n) \geqslant \frac{1}{2}\rho(a_0) > 0.$$

這是與 $\rho(a_n) \to 0$ 相衝突的. 故必 $\rho_0 > 0$.

設 $a_1 \in M$, 作 a_1 之環境 $O(a_1, \rho_0)$. 假如 M 全在此環境中,則因 $\{B\}$ 中有一 B 包含 $O(a_1, \rho_0)$ 的緣故, $M \subset B$, 而定理成立; 若不然,則 M 有點 a_2 不屬於 $O(a_1, \rho_0)$. 從而

$$r(a_1, a_2) \geqslant \rho_0.$$

假如 M 含在 $O(a_2, \rho_0) + O(a_1, \rho_0)$中, 則$\{B\}$有兩個點集的和包含$M$. 定理又得着證明. 若不然,則$M$中有點如下的點$a_3$:

$$r(a_1, a_3) \geqslant \rho_0, \quad r(a_2, a_3) \geqslant \rho_0.$$

但是這個手續必不能進行不止. 假如不然, M 中當有點列 $\{a_n\}$ 適合

$$r(a_m, a_n) \geqslant \rho_0 \quad (n \neq m).$$

然而 M 是一緻密點集,此爲不可能的事. 所以 M 中必有有限個點——就是 k 個點 $a_1, \cdots, a_k$, 使 M 包含在它們的環境中:

$$M \subset O(a_1, \rho_0) + O(a_2, \rho_0) + \cdots + O(a_k, \rho_0).$$

設$\{B\}$中的 B_ν 含有 $O(a_\nu, \rho_0)$, 那末 $M \subset B_1 + \cdots + B_k$. 證明完畢.

注意 定理中的 M, 必須是閉的理由,已明於前. 現在證明

“緻密”的條件，也不可以除去．例如在空間 E_1 中，區間之集

$$I_n = \left(n - \frac{1}{3},\ n + \frac{1}{3}\right) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

可以掩蓋一切自然數所成的點集：1, 2, 3, ⋯．但是有限個的 I_n 決不能掩蓋 $\{n\}$．一般地說：假如點集 M 在其空間中不是緻密的話，則 M 中必有無極限點的點列 $\{a_n\}$．對於 M 中任一點，作其環境 $O(a, \rho)$，取 ρ 甚小，使 $O(a, \rho)$ 中不含有 $\{a_n\}$ 的任何點(但是中心 a 可能是一 a_n)．如是一切 $O(a, \rho)$ 掩蓋 M 中所有的點．但是有限個的 $O(a, \rho)$ $(a \in M)$ 不能掩蓋 $\{a_n\}$，更不能掩蓋 M 中一切點，然而我們有下述

林得勒夫和楊格的定理[1] 若點集之無限集 $\{B\}$ 掩蓋 M 的一切點，則 $\{B\}$ 中必有可列無限個 B 掩蓋 M 中所有的點．但是假設 M 與 B 都是可析空間 A 中之點集．

何謂可析空間？ A 中有可列點集 $\{p_n\}$ 在 A 中處處稠密時，稱 A 是一可析空間．E_k 是其一例．

證明 設 $r_1, r_2, \cdots$ 是正有理數的全體，作 $\{p_n\}$ 之環境

$$O(p_m, r_m) \quad (m = 1, 2, \cdots).$$

對於 M 的一點 a，$\{B\}$ 有一集 B 掩蓋 a，取正數 ρ 甚小，則

$$O(a, \rho) \subset B.$$

於 $O(a, \rho)$ 中取一點 p_n，使 $r(a, p_n) < \frac{1}{2}\rho$．又取有理數 r_m 使

$$r(a, p_n) < r_m < \frac{1}{2}\rho.$$

那末 $a \in O(p_n, r_m)$．然設 x 爲 $O(p_n, r_m)$ 中任意一點，則

$$r(x, a) \leqslant r(x, p_n) + r(p_n, a) < r_m + \frac{1}{2}\rho < \rho$$

所以 $O(p_n, r_m) \subset O(a, \rho)$．因之 $O(p_n, r_m) \subset B$．$\{O(p_m, r_m)\}$

---

1) 林得勒夫 (Lindelöf) 和楊格(W. H. Young)原來的定理僅在 E_1 中建立着，上述定理是葛羅斯證明的．

$(m=1, 2, \cdots, n=1, 2, \cdots)$是一可列集，其中之一子集掩蓋$M$的一切點．故$\{B\}$中有可列集$B_1, B_2, B_3, \cdots$掩蓋$M$中所有的點．證明完畢．

系　可析空間中之孤立點集是可列的．

證明　設M是可析空間中之一孤立點集．設$a \in M$，取ρ甚小，可使$O(a, \rho)$中除a而外，無M的點．如是$O(a, \rho)$的全體掩蓋M中所有的點．由林得勒夫和楊格的定理，必有可列集

$$O(a_n, \rho(a_n)) \quad (n=1, 2, \cdots)$$

掩蓋M中所有的點．由是可知點列$\{a_n\}$就是M．證明完畢．

7. 一直綫上的閉集　本節所討論的點集，都是空間E_1中的閉集．

設M是E_1中之一閉集，$M \neq E_1$．因$E_1 - M$是一開集．故對於$E_1 - M$中任一點x有開區間J_x如下：

$$x \in J_x = (a,b) \subset E_1 - M,$$

$$a \bar{\in} E_1 - M, \quad b \bar{\in} E_1 - M.$$

所以$E_1 - M$是由這種開區間J_x相集而成．區間的集是可列的．此區間之集，稱爲閉集M的餘區間集．由是可述：

定理 1.　E_1中的閉集是(可列有限個或無限個)閉區間集的餘集．

閉集M的餘區間集中，若有兩區間共有一端點x，那末x是M之一孤立點．反過來說，M的孤立點，一定是其兩餘區間的鄰接點．由是得着

定理 2.　假如閉集M的餘區間中，沒有互相鄰接的，那末，M是一完全點集，其逆亦眞．

康妥的疏朗完全點集　將$[0, 1]$分爲三等分，去其中間的開區間$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$，又將所餘的兩區間$\left[0, \frac{1}{3}\right]$和$\left[\frac{2}{3}, 1\right]$，各分爲三等分，各去其居中之開區間：

$$\left(\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2}\right), \left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}\right).$$

如是繼續進行,以至無限. 設[0, 1]所遺留之點的全體爲 M, 那末 M 是(可列無限個)不相鄰接的開區間集的餘集; 由定理 2, M 是一完全點集. 於[0 1], 任取一小區間 J, J 中必有 M 的餘區間,所以 M 是一疏朗點集. M 是康妥的疏朗完全點集. 用三進位法,則 M 的餘區間可記爲

$$(0.1, 0.2), (0.01, 0.02), (0.21, 0.22), \cdots,$$
$$(0.\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_{\nu-1} 1, 0.\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_{\nu-1} 2),$$

但是 $\alpha_i(\alpha_i - 2) = 0$.

下述定理指出疏朗閉集成爲完全點集的特徵:

定理 3. 設 M 是 E_1 中之一疏朗閉集, $\{(a_n, b_n)\}$ 爲 M 之餘區間集,以有限左端 a_n 的大小爲順序時,點列 $\{a_n\}$ 成一有序集 S. 那末, M 成一完全點集之充要條件是 S 的序相爲 η.

證明 若 M 是一疏朗完全集, 則 S 必無首元素; 假如 S 有首元素 a_0, 那末 a_0 是 M 之一孤立點,此爲不可能之事. 同理可知 S 無末元素. 又任何元素 a_n 與 $a_m(m > n)$ 之間必尙有其它的 a_ν: 若不然則或 $b_n = a_n$ 或 (b_m, a_m) 中的一切點皆屬於 M. 前者成立時, M 有了孤立點 b_n; 後者成立時, M 不是疏朗的. 兩者都不合於假設,故由第一章第七節中的定理, S 的序相是 η.

反過來說, 假如 S 的序相是 η, 那末, 顯然地, M 不會有孤立點. 所以 M 是一完全點集. 證明完畢.

定理 4. 完全點集的勢是(連續點集的勢)$\aleph$.

證明 設 M 是 E_1 中之一完全點集. 假如 M 不是疏朗點集,那末 M 必含有一個區間, 所以定理成立. 假如 M 是一疏朗的完全點集, 那末我們得着定理 3 中的點集 S, S 的序相是 η, 使 S 與 $(0, 1)$中的有理點集成相似對應,那末

$$S' - S$$

與(0, 1)中無理點的全體成一一對應．由於

$$M \supset S + (S^1 - S) = S^1$$

所以 M 之勢是 $\aleph$．定理證畢．

系 E_k 中之完全點集．其勢是 $\aleph$．

8. 平面上的閉集 E_1 中的閉集，它的特質，已詳於前節．至於 E_2 中的閉集，不但也有些特質可舉，且由此可以推出高度空間中閉集的情況．

定理 1. 設 F_1 與 F_2 是 E_2 中的兩個有界閉集，假如 F_1 與 F_2 沒有共通點，那末 E_2 中有如下的兩個開集 O_1, O_2:

$$O_1 \supset F_1, O_2 \supset F_2, \quad O_1 \cdot O_2 = 0.$$

證明 由第二節的定理 7，$r(F_1, F_2) > 0$．置

$$\rho = \frac{1}{3} r(F_1, F_2).$$

設 $P \in F_1, Q \in F_2$．作開集 $O(P, \rho)$ 與 $O(Q, \rho)$．和集

$$O_1 = \sum_{P \in F_1} O(P, \rho) \text{ 與 } O_2 = \sum_{Q \in F_2} O(Q, \rho)$$

都是開集顯然地 $O_1 \supset F_1, O_2 \supset F_2$．又若 $p \in O_1, q \in O_2$．則

$$r(p, q) \geqslant r(F_1, F_2) - \rho - \rho = \rho > 0.$$

定理證畢．

與前節定理 1 相當的，有下面的定理:

定理 2. 設 M 是平面 E_2 上之一閉集，那末 E_2 中有不相重疊之正方形列

$$Q_n: x'_n \leqslant x \leqslant x''_n, y'_n \leqslant y \leqslant y''_n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

適合 $M = E_2 - \sum_1^\infty Q_n$.

證明 所要證明的是: E_2 中任一開集 Q 是一和集 ΣQ_n, $\{Q_n\}$ 是不相重疊的閉正方形列．但是此地的 Q_n 以及下文的種種正方形，都是閉集，就是說:具有四邊的正方形． 在平面 E_2 上，從兩系平行綫

$$x = m, y = n \quad (n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

作成無數個正方形；這些正方形中之全落在 Q 中的，記它們做 $Q_{11}, Q_{12}, \cdots, Q_{1n}$；$n_1$ 可能是 ∞。再作兩系之平行綫

$$x = m + \frac{1}{2}, y = n + \frac{1}{2} \quad (n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

將所餘的每一正方形分爲四等分．記這些正方形之完全落入 Q 中的爲 $Q_{21}, Q_{22}, \cdots, Q_{2n_2}$；$n_2$ 可能是 ∞． 如是繼續進行，陸續添作兩系之平行綫．

$$x = m + \frac{v}{2^k}, y = n + \frac{v}{2^k}$$

$$(n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots; v = 1, 2, \cdots, 2^k - 1),$$

將尚未在 Q 中之正方形分爲四等分，等分而後，其能全入 Q 中的，記它們做 $Q_{k1}, Q_{k2}, Q_{k3}, \cdots, Q_{kn_k}$，$n_k$ 可能不是有限的． 由是得正方形的和集

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{v=1}^{n_k} Q_{kv} = S.$$

顯然，$S \subseteq Q$． 今證 $Q \subseteq S$，若 $p \in Q$，則取 k 甚大時，必有邊長爲 $\frac{1}{2^k}$ 的(上面所作的)正方形含有 p 點而落入開集 Q 中． 假如有 Q_{lv} 適合

$$l < k, \quad 1 \leqslant v \leqslant n_l, \quad p \in Q_{lv},$$

那末 $p \in S$．若不然，則上述邊長爲 $\frac{1}{2^k}$ 的正方形，應記它做 Q_{kv}，因之，

$$p \in Q_{kv} \subset S,$$

所以 $Q \subseteq S, S = Q$．定理證畢．

第三章　習　題

1. 設在 E_2 上，有點集 A, B, C；A 是圓 $x^2 + y^2 < 2$，B 是圓 $x^2 + y^2 < 1$，C 是 $x^2 + y^2 \leqslant 1$． 證明 B 在 A 中是開的，C 在 A 中是閉的．

2. 設 B, C 是有度的空間中的兩個點集，則

$$r(B, C) = \underset{b \in B}{\text{下界}}\, r(b, C).$$

3. 設 $A_1, A_2, \cdots$ 都是 B 中的外限點集，則和集 ΣA_n 也是 B 中的外限點集.

4. $A_1, A_2, \cdots$ 都是 B 中的內限點集，證明和集

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

與通集 $\prod_{n=1}^{\infty} A_n$ 都是 B 中的內限點集.

5. 證明 $O(B, \rho)$是 B 之一環境.

6. 設 M 是一有度的空間，其中的點 x 是一實數數列

$$x = \{x_n\},$$

一切實數數列都是M的點. 今設

$$r(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|},$$

證明 M 成一完備空間.

7. 設 M_1 是一切實數數列所成的有度的空間，假如 $x \in M_1$, $y \in M_1$, 那末

$$r(x, y) = \underset{n}{\text{上界}}\ |x_n - y_n|.$$

證明 M_1 是一完備空間.

8. 設 $M_2 \subset M_1$, M_l 中的點都是收斂的實數數列，證明 M_2 自己成一完備空間(距離定義同 M_1).

9. 設 $M_p \subset M$, M_p 中的點 $x = \{x_n\}$ 是使級數 $\Sigma |x_n|^p$ 收斂的 M 中一切點. 設 $p \geqslant 1$, $y = \{y_n\}$

$$r(x, y) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p\right]^{\frac{1}{p}}.$$

證明 M_p 是一完備空間.

10. 在平面 E_2 上，設$[-2, -2; 2, 2] - [-1, 1; 1, 1]$中有理點的全體是 E,

$$M = E + [-1, -1; 1, 1].$$

求 M 的包,核和境界.

11. 在 E_3 中有點集 A, B, C, D. A 是格子點(坐標都是整數的點叫做格子點)的全體, B 是有理點的全體, C 是球x^2+y^2+ $+z^2<1$, D是球面 $x^2+y^2+z^2=1$, 证明

(i) A 是孤立點集,

(ii) B 是一已密點集,

(iii) $A+C+D$ 是一閉集,

(vi) C 是一開集,

(v) $C+D$ 是一完全點集.

12. 在三維空間 E_3 中有圓 $C: x^2+y^2<1, z=0$. 問 C 是否 E_3 中之一區域? 又問在平面 E_2 上, C 是否成一區域?

13. 在 E_n 中有點集 $M=\{(x, y, z)\}$;其中的點若不適合於

$$\begin{cases} xyz = 1, \\ z > 0 \end{cases}$$

則必 $xy=0$. 對於 M 的任何兩點 P 與 Q, M 中常有 ε 連鎖可以聯結 P 與 Q 麼? 又問 M 是否成一聯絡點集?

14. 於前題中的 M,添加下列點集 $T: 0 \leqslant z \leqslant 1$, 則成一聯絡點集,這是什麼緣故?

15. 從前題的點集, $M+T$ 除去適合 $|z| \geqslant 1$ 的一切點 (x, y, z), 仍得一聯絡點集, 但不是一連續點集. 假如從 $M+T$ 除去 $|z|>1$, 那末得着連續點集.

16. 設 M 是康妥的疏朗完全點集, $x \in M$. 用三進位的無限小數表示 x 時,說明

$$x = 0.\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \cdots (\alpha_\nu \neq 1).$$

其逆亦眞.

17. 設 $\{(a_n b_n)\}$ $(a_n \neq -\infty,\ b_n \neq +\infty)$ 是一疏朗完全點集 M之餘區間集. 證明以自然順序爲順序的有序集$\{b_n\}$之序相是 η.

又若$\{b_n\}$的序相爲 η 時，M 是一疏朗完全點集。

18. E_k 中完全點集之勢等於 $\aleph$.

19. 於 E_2 中試作如下的兩個開集 O_1, O_2; O_1 含有 x 軸 $(y=0)$, O_2 含有雙曲綫 $xy=1$, $O_1O_2=0$.

第 四 章

實函數的連續性

1. 實函數 設 M 是一點集，$\mathscr{B}$ 是實數的全體，以 $\mathscr{B}$[1] 蓋 M，得一蓋集，稱它做在M上所定義的實函數，對應於 M 的一點 x，$\mathscr{B}$ 中有一數 $f(x)$，這是實函數的記號．若 M 是 E_k 中的點集，則當

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_k) \in M.$$

時，我們可以改寫 $f(x)$ 爲 $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_k)$，稱它做實變數 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 的實函數，名 M 爲此函數的定義區．

設 $f(x)$ 是在點集 M 上所定義之一實函數，函數值 $f(x)$ $(x \in \in M)$ 的全體 E 是一實數的集．名 E 的上界爲此函數的上界，用 $S(f(x), x \in M) \equiv S(f, M)$ 表示它． 又記 E 的下界爲 $I(f, M)$，稱之爲函數 f 的下界．由是，

(一) 若 $H < S(f,M)$，則 M 中必有 x 使 $f(x) > H$;

(二) 對於 M 中任何 x，$f(x) \leqslant S(f, M)$.

這兩事(一)與(二)乃是 $S(f, M)$ 的特徵，可以作爲 $S(f, M)$ 的定義．$I(f, M)$的特徵如下：

(三) 若 $h > I(f, M)$，則 M 中必有適合 $f(x) < h$;

(四) 對於 M 中任何點 x，關係 $I(f,M) \leqslant f(x)$常成立．

設 $T \subset M$，那末，

$$I(f, M) \leqslant I(f, T) \leqslant S(f, T) \leqslant S(f, M).$$

若 $S(f, M) < \infty$，則稱 $f(x)$(在 M 上)有(有限)上界的函數．又若 $I(f, M)$爲一有限數，則稱 $f(x)$有(有限)下界的函數． 兩者都是有限數時，稱 f 爲一有界函數． 由是，當 $f(x)$爲有界時，必有

1) 規定 $+\infty$ 與 $-\infty$ 都在 $\mathscr{B}$ 中.

常數C適合

$$|f(x)| \leqslant C. \quad (x \in M).$$

設M^0是M的包，x是包M^0中的一點．M中必有點列$\{x_n\}$收斂於x，x是M之一孤立點的話，那末一切x_n都就是x．上限

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} f(x_n).$$

與點列$\{x_n\}$有關係（固定x）．稱這些上限的上界為函數在點x之上界，記之以

$$S(x, f, M) \text{ 或 } S(x).$$

同樣可定義下界$I(x, f, M) = I(x)$的意義．應該留意的是x為M^0的點，可能不屬於M，因之$f(x)$未必有意義，而$S(x)$與$I(x)$是有意義的．由定義即得

定理 1. 設$f(x)$是（有度空間中之一）點集M上所定義的函數（實函數的簡稱）．

(i)　若$x \in M^0$，則

$$I(f, M) \leqslant I(x) \leqslant S(x) \leqslant S(f, A).$$

(ii)　若x是M之一孤立點，那末，

$$f(x) = I(x) = S(x).$$

定理 2. 設M是有度空間中之一點集，$f(x)$是M上所定義的一個函數．設$x \in M$．設正函數列$\{\rho_n\}$減少於0，那末，置$O_n = O(x, \rho_n)M$時，

$$\lim_{n\to\infty} S(f, O_n) = S(x, f, M).$$

證明　$S(f, O_n)$ $(n = 1, 2, \cdots)$是一單調減少數列，當$n\to\infty$時，它有一定的極限γ．若γ是$\pm\infty$，那末，顯然地，$S(x, f, M)$也是$\pm\infty$．今設γ是一有限數，$\varepsilon > 0$，則由$S(x, f, M)$的定義，M中有收斂於x的點列$\{x_n\}$適合

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) > S(x,f,M) - \varepsilon.$$

故有m：當$n > m$時，$f(x_n) > S(x, f, M) - 2\varepsilon$．所以

$$S(f, O_k) > S(x, f, M) - 2\varepsilon$$

令 $k \to \infty$,得 $\gamma \geq S(x, f, M) - 2\varepsilon$. 令 $\varepsilon \to 0$, 乃得

$$\gamma \geq S(x, f, M).$$

又 O_n 中必有點 x_n 使 $f(x_n) > S(f, O_n) - \frac{1}{n}$, 然而 $f(x_n)$不能大於$S(f, O_n)$, 所以

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \gamma.$$

左端小於或等於$S(x, f, M)$. 故得$\gamma = S(x, f, M)$. 證明完畢.

同樣可證

定理 3. 在定理 2 的假定下, $\lim I(f, O_n) = I(x, f, M)$.

定理 4.[1] 假如 $f(x)$ 是緻密點集M上所定義的函數. 那末 M^0 中必有兩點 x' 與 x'' 適合

$$I(x', f, M) = I(f, M), S(x'', f, M) = S(f, M).$$

證明 對於正整數 n, M 中有點 x_n 使 $f(x_n) > S(f, M) - \frac{1}{n}$. 因 M 是一緻密點集,故$\{x_n\}$至少有一極限點 x''. 因之,

$$S(x'', f, M) \geq S(f, M).$$

此地的不等號是不會實現的,所以 x'' 是所求的一點. 同樣可證有 x' 適合 $I(x', f, M) = I(f, M)$.

注意 假如 M 不是緻密點集,那末,未必有 x' 和 x'' 如定理 4 所述. 例如$\{x_n\}$爲一無極限點的點列,

$$f(x_n) = n, f(x) = 0 \quad (x \neq x_n).$$

那末 $S(f, M)$是 $+\infty$ 而 $G(x, f, M)$都是有限數.

2. 函數之連續點 設 $f(x)$ 是點集 M 上所定義之一函數, x_0 是 M 的一點. 當 M 中的點列$\{x_n\}$收斂於 x_0 時,假如等式

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

常成立,稱 x_0 爲 $f(x)$之一連續點,稱 $f(x)$在點 x_0 是連續的.

---

1) 此定理當 $M \subset E_1$ 時,首先由瓦耶司脫拉斯所證明. 上述一般定理,是富勒謝(Fréchet) 所證.

定理 1. 設 M 是 $f(x)$ 的定義區. M 中的一點 x_0 成爲 $f(x)$ 之連續點的充要條件是

$$I(x_0, f, M) = S(x_0, f, M) = f(x_0).$$

證明 對於 M 中任意之收斂於 x_0 的 $\{x_n\}$, 成立着

$$I(x_0) \leqslant \underline{\lim}\, f(x_n) \leqslant \overline{\lim}\, f(x_n) < S(x_0).$$

所以當條件成立時, $\lim f(x_0)$ 存在, 且等於 $f(x_0)$. 又若 $x_n \to x_0$ 含有

$$\underline{\lim}\, f(x_n) = \overline{\lim}\, f(x_n) = f(x_0).$$

則必 $I(x_0) = S(x_0)$. 定理證畢.

定理 2. 設 $f(x)$ 是 M 上定義的函數, x_0 成一 $f(x)$ 的連續點之充要條件是：對於適合

$$p < f(x_0) < q$$

之任何兩數 p, q, x_0 有如下的環境 $O(x_0)$, 在適集 $O(x_0)M = O_{x_0}$ 中任意一點 x, 成立着

$$p < f(x) < q.$$

證明 條件的充足性：設 $x_n \to x$, $x_n \in M$, 則由假設, 當 n 甚大時, x_n 落入 O_{x_0} 中, 因之有如下的 m; 當 $n > m$ 時,

$$p < f(x_n) < q.$$

由是 $p \leqslant \underline{\lim}\, f(x_n)$, $\overline{\lim}\, f(x_n) \leqslant q$. 令 p 與 q 都趨近於 $f(x_0)$ 乃得

$$\lim f(x_n) = f(x_0).$$

條件的必要性：設 x_0 爲 $f(x_0)$ 之連續點. 假如所設條件不成立, 那末對於任一整數 n, $O\left(x_0, \dfrac{1}{n}\right)$ 中, 必有點 y_n 不滿足

$$p < f(y_n) < q.$$

因之有收斂於 x_0 的點列 $\{x_n\}$; 或使 $f(x_n) < p$ 或使 $f(x_n) \geqslant q$. 由是兩關係

$$\lim f(x_n) < f(x_0) \text{ 與 } \lim f(x_n) > f(x_0)$$

將有一個成立,這是與連續性相抵觸的. 定理證畢.

度量的定義和拓撲的定義

前面定義 $S(x)$ 和 $I(x)$ 時,是點集的包 M^0 中的一點. 但是,點集 M 的包 M^0,可以避免距離的概念來定義它. 設 A 是一空間,$M \subset A$, $M_1 \subset A$. 今定 M^0 的意義如下:適合

(i) $M^0 + M_1^0 = (M + M_1)^0$, (ii) $(M^0)^0 = M^0$, (iii) $M \subseteq M^0$

三條件的 M^0,叫做 M 的包. 這種空間叫做拓撲空間. 包 M^0 與 M 一致的集稱為閉集, 稱閉集 M 的餘集 $A - M$ 爲開集. 那末"環境"等意義可以決定. 連續點的拓撲的定義可述如下:對於任一正數 ε, x_0 有一環境 $O(x_0)$, 當 x 在 $MO(x_0)$ 中時,不等式

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

成立的話,稱 x_0 爲 $f(x)$ 之一連續點.

上述拓撲的定義,不含有距離的概念. 下面所述的定義,含有距離的概念,乃是連續性的度量的定義: 對於任一正數 ε, x_0 有一"球狀"環境 $O(x_0, \rho)$,當 x 在 $MO(x_0, \rho)$ 中時,就是說,當 $x \in M$ 且 $r(x, x_0) < \rho$ 時,不等式

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

成立的話, x_0 是 $f(x)$ 之一連續點.

定理 3. (i)若 x_0 爲 $f(x)$ 之連續點,則 x_0 亦爲 $|f(x)|$ 之一連續點.

(ii) 若 x_0 爲 $f(x)$ 與 $g(x)$ 之公共連續點,則 x_0 亦爲 $f(x)g(x)$ 與 $f(x) \pm g(x)$ 的連續點,但 $f(x)$ 與 $g(x)$ 都是 M 上所定義的函數.

(iii) 在(ii)的條件下,若 $g(x_0) \neq 0$, 則 x_0 亦爲 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 的連續點.

三項定理,都極明顯,證明從略.

定理 4. 設有限個函數 $f(x), g(x), \cdots, h(x)$ 都在點集 M 上

被定義着而有公共連續點 x_0，那末 x_0 也是它們的最大值函數和最小值函數的連續點.

證明 函數

$$\frac{f(x)+g(x)}{2}+\frac{|f(x)-g(x)|}{2} \text{ 與 } \frac{f(x)+g(x)}{2}-\frac{|f(x)-g(x)|}{2}$$

是 $f(x)$, $g(x)$ 的最大值函數與最小值函數. 設 $F(x)$ 與 $G(x)$ 是 $f(x), g(x), \cdots, h(x)$ 的最大值函數與最小值函數. 則

$$\frac{F(x)+l(x)}{2}+\frac{|F(x)-l(x)|}{2} \text{ 與 } \frac{F(x)+l(x)}{2}-\frac{|F(x)-l(x)|}{2}$$

爲 $f(x), g(x), \cdots, h(x), l(x)$ 的最大值函數和最小值函數.

由是，從定理 3 的 (i) 和 (ii)，定理 4 是明顯的事實. 定理證畢.

注意 定理 4 的結果，不可以推至無限個函數. 例如

$$f_n(x)=0,\ (x\leqslant 0),\ f_n(x)=nx\ \left(0<x\leqslant\frac{1}{n}\right),$$

$$f_n(x)=1\ \left(n>\frac{1}{n}\right),$$

那末 $f_1(x), f_2(x), \cdots$ 的最大函數 $f(x)$ 當 $x\leqslant 0$ 時，其值爲 0；當 $x>0$ 時，其值爲 1. 在 $x=0$，$f_n(x)$ 都是連續的，而 $f(x)$ 是不連續的.

3. 連續函數 設 $f(x)$ 是在點集 M 上所定義的函數，若 M 中的任何點都是 $f(x)$ 的連續點，稱 $f(x)$ 爲 M 上所定義之 x 的連續函數. 例如 $r(x, x_0)$ 是 x 的連續函數. 事實上，

$$|r(x_n, x_0)-r(x, x_0)|\leqslant r(x, x_n)\to 0\ (x_n\to x).$$

定理 1. 在緻密閉集 M 上所定義之連續函數 $f(x)$，它的上界 $S(f, M)$ 與下界 $I(f, M)$ 都是 f 的函數值.

證明 M 是一緻密閉集. 所以 M 中 (§1, 定理 4) 有兩點 x' 與 x'' 適合

$$S(x'',f,M) = S(f,M), \quad I(x',f,M) = I(f,M).$$

由 f 的連續性,乃得 $S(f,M) = f(x'')$, $I(f,M) = f(x')$證畢.

應用 I 羅爾[1]的定理. 設 $f(x)$ 是在閉區間 $[a,b]$ 上所定義的連續函數, $f(a) = f(b) = 0$. 由定理 1, $[a,b]$ 中有 x' 與 x'' 適合

$$f(x') = I(f,[a,b]), \ f(x'') = S(f[a,b]).$$

若$f(x') \neq 0$. 則 $a < x' < b$; 當 $a < x_1 < x' < x_2 < b$ 時,

$$\frac{f(x_1) - f(x')}{x_1 - x'} \leqslant 0, \qquad \frac{f(x_2) - f(x')}{x_2 - x'} \geqslant 0.$$

故若極限 $\lim\limits_{x \to x'} \dfrac{f(x) - f(x')}{x - x'}$ 存在,則其值必爲 0. 同樣可證:

當 $f(x'') \neq 0$,且極限

$$\lim_{x \to x''} \frac{f(x) - f(x'')}{x - x''}$$

存在時,其值必等於 0. 若 $f(x') = f(x'') = 0$, 則 $f(x)$全等於 0, 上記之兩極限皆爲 0. 称极限值

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

(存在的话)为 $f(x)$ 在 x_0 之導數,記它做 $f'(x_0)$. 由是得着如下的定理:設閉區間$[a,b]$上所定義之連續函數 $f(x)$ 在(a,b)中具有導數$f'(x)$, 則當 $f(a) = f(b) = 0$ 時,(a,b)中有點 x_0 適合於

$$f'(x_0) = 0.$$

應用 II 代數學的基本定理: 設

$$a_0(\neq 0), a_1, a_2, \cdots a_n (n > 0)$$

都是複素數,則必有一複素數 z 適合

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = 0.$$

此定理可利用定理 1 證明. 置 $f(z) = a_0 z^n + \cdots + a_n$. 取適當大的正數 ρ, 使當 $|z| = \rho$ 時,

---

1) 羅爾 (Michel Rolle) 1652—1719.

$$|f(z)| \geqq |a_0 z^n| \left(1 - \left|\frac{a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n}{a_0 z^n}\right|\right) > |f(0)|.$$

因 $|z| \leqslant \rho$ 是在 z 平面上的緻密閉集,故由定理 1,必有 z_0 適合

$$|f(z_0)| = I(|f(z)|,\ |z| \leqslant \rho),\quad |z_0| < \rho.$$

由是證明 $f(z_0) = 0$ 好了. 假如 $f(z_0) \neq 0$,那末,寫 $f(z_0 + h)$ 為 h 的多項式

$$b_0 + hb_1 + \cdots + h^n b_n$$

時,$b_0 = f(z_0) \neq 0$. $b_n = a_0 \neq 0$. 設 $b_1, b_2, \cdots b_n$ 中,最初之不等於 0 的是 b_m,寫

$$\frac{b_m}{b_0} = Re^{i\varphi} \qquad (\varphi \gtrless 0)$$

的話 $R \neq 0$. 又設 $h = re^{i\theta}$,則得

$$\frac{f(z_0 + h)}{f(z_0)} = 1 + \frac{1}{b_0}(b_m h^m + \cdots + b_n h^n)$$
$$= 1 + Rr^m e^{i\varphi + mi\theta} + r^{m+1} H.$$

取 r 甚小,可使 rH 的絕對值小於 $\frac{1}{2}R$. 由是,取 θ 使 $m\theta + \varphi = \pi$ 的話,

$$\left|\frac{f(z_0 + h)}{f(z_0)}\right| < 1 - Rr^m + \frac{1}{2}Rr^m.$$

右方小於 1,故 $|f(z_0 + h)| < |f(z_0)|$. 然當 r 甚小時,$z_0 + h$ 是圓 $|z| \leqslant \rho$ 內的點,上式與 z_0 的意義相抵觸,所以 $f(z_0) = 0$.

定理 2. 設 $f(x)$ 是在點集 M 上所定義的函數. 假如對於任一實數 c,適合於關係

$$f(x) \geqq c,\quad x \in M$$

之 x 的全體 M_1 和適合於關係 $f(x) \leqslant c, x \in M$ 之 x 全體 M_2 都在 M 中是閉的時候,那末 $f(x)$ 是一連續函數. 又若 $f(x)$ 是一連續函數的時候,M_1 與 M_2 在 M 中常是閉的.

證明 在所設條件下,假如函數 $f(x)$ 還有一個不連續點 x_0,

那末 M 中有點列 $\{x_n\}$ 收斂於 x_0, 而關係 $f(x_n)\to f(x_0)$ 不能成立. 是必有兩數 p, q 適合於

$$p<f(x_0)<q$$

而有無數之 x_n 不能滿足 $p<f(x_n)<q$. 假如

$$p\geqslant f(x_n)\quad (n=n_1, n_2, \cdots)$$

那末取 $c=p$ 的話, $x_n\in M_2\ (n=n_1, n_2, \cdots)$, $x_0\bar{\in} M_2$. 由是 M_2 對於 M 不是閉的, 這是有背於假設的. 又假如

$$f(x_m)\geqslant q\quad (m=m_1, m_2, \cdots),$$

那末取 $c=q$ 的話, 得着 M_1 不在 M 中是閉的矛盾. 所以 $f(x)$ 沒有不連續點.

反過來說: 設 $f(x)$ 是一連續函數, $x_0\in M_1$. 那末, M_1 中有點列 $\{x_n\}$ 收斂於 x_0, 因之

$$f(x_n)\geqslant c,\quad f(x_0)\geqslant c,\quad x_0\in M_1.$$

所以 M_1 對於 M 是閉的. 同樣可證 M_2 對於 M 是閉的. 證明完畢.

系　設 $f(x)$ 是 M 上的連續函數, 則滿足方程式 $f(x)=c$ $(x\in M)$ 之一切點 x 所成之集 M_c 對於 M 是閉的.

證明　這是因為 $M_1\cdot M_2=M_c$ 的緣故. 證明完畢.

定理 3.　設 $f(x)$ 是聯絡點集 M 上所定義的連續函數. 若 c_1 與 c_2 是 $f(x)$ 的兩個函數值, 則 c_1 與 c_2 之間的任何數值都是 $f(x)$ 的函數值. 換句話說: 聯絡點集上的連續函數, 它的函數值的全體成一聯絡點集[1].

證明　設 $f(x_1)=c_1, f(x_2)=c_2, c_1>c_2, c_1>c>c_2$. 如定理 2, 定 M_1 與 M_2, 那末,

$$x_1\in M_1,\ x_2\in M_2,\ M_1+M_2=M.$$

由定理 2, M_1 與 M_2 在 M 中都是閉的. 因為 M 是一聯絡點集, 所以 M_1, M_2 不是空的. 在 M_1M_2 中任一點 x, $f(x)$ 等於 c.

1) 當 $M\subset E_1$ 時, 定理 3 是波爾查諾所證的.

定理證明完畢.

應用　設 $f(x)$ 在閉區間 $a \leqslant x \leqslant b$ 中是連續的時候, h 與 H 是它的最小函數值和最大函數值,那末

$$h(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant H(b-a).$$

由定理 3,$[a, b]$ 中必有一點 ξ 適合 $\int_a^b f(x)dx = (b-a)\ f(\xi)$. 這就是第一平均值定理.

注意　定理 3 中"聯絡"的條件,不可以免除. 假如 M 不是聯絡點集,那末有 M_1, M_2 在 M 中是閉的,且

$$M = M_1 + M_2, M_1 \neq 0, M_2 \neq 0, M_1 M_2 = 0.$$

今設 $f(x) = 1\ (x \in M_1), f(x) = 0\ (x \in M_2)$. 此函數 $f(x)$ 在 M 上是連續的,但是不取 $(0, 1)$ 中任何值.

均勻連續函數　設 $f(x)$ 是 M 上的函數. 若對於任一正數 ε, 有正數 δ; 當 $x \in M$, $x' \in M$, $r(x, x') < \delta$ 時,

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

成立,稱 $f(x)$ 爲 M 上的均勻連續函數.

由此定義,知均勻連續函數是一連續函數. 然連續函數,未必是均勻連續,下文將舉例以說明此事.

定理 4.　在緻密閉集 M 上所定義的連續函數 $f(x)$, 一定是均勻連續的.

證明　假如 $f(x)$ 在 M 不是均勻連續,那末,有 $\varepsilon > 0$, 對於正整數 n, M 中有兩點 x_n, x'_n 適合

$$|f(x_n) - f(x'_n)| \geqslant \varepsilon, \qquad r(x_n, x'_n) < \frac{1}{n}.$$

由 M 的緻密性, 有 $\{x_{n_\nu}\}$ 收斂於 x_0, M 是閉的, 故 $x_0 \in M$. 由是 $x_{n_\nu} \to x_0$. $x'_{n_\nu} \to x_0$. 從 $f(x)$ 的連續性,我們達到如下的矛盾:

$$\varepsilon \leqslant |f(x_{n_\nu}) \to f(x'_{n_\nu})| \to 0 \quad (\nu \to \infty).$$

定理證畢.

此定理也可利用掩蓋定理來證明. 對於 $\varepsilon > 0$, $x \in M$,有如

下的球狀環境 $O(x, \rho(x))$

$$|f(x') - f(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad x' \in O(x, 2\rho(x)).$$

由是 M 爲一切球狀環境 $O(x, \rho(x))$所掩蓋．由葛羅斯的掩蓋定理，M 中有有限個點 $x_1, x_2, \cdots x_k$, 使球狀環境

$$O(x_i, \rho(x_i)) \quad (i = 1, 2, \cdots k)$$

掩蓋 M．設 $\rho(x_1), \rho(x_2), \cdots, \rho(x_k)$之最小者爲 ρ_0,則當

$$r(x, x') < \rho_0, x \in M, x' \in M, x \in O(x_i, \rho(x_i))\text{時},$$

$$r(x_i, x') \leq r(x_i, x) + f(x, x') < \rho(x_i) + \rho_0 < 2\rho(x_i),$$

所以

$$|f(x_i) - f(x')| < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad |f(x_i) - f(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

因之 $f(x') - f(x)| < \varepsilon$. 由是得定理 4.

注意 1　任意的閉集 M 上的連續函數，未必具有均匀連續性．例如

$$f(x) = x^2$$

爲 E_1 上之連續函數，然當 $xx' > 0$ 時，欲使 $|f(x') - f(x)| =$
$= |(x' - x)(x' + x)|$小於 ε, 必須

$$|x' - x| < \frac{\varepsilon}{|x' + x|}.$$

當 $|x + x'|$ 甚大時，右端之數甚小，所以 $f(x)$不是均匀連續．

注意 2　任意的緻密點集上所定義的連續函數，也未必具有均匀連續性．例如

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad 0 < x < 1$$

是連續函數的．然而非爲均匀連續函數．因爲對於(0, 1)中兩點 x, x',

$$|f(x) - f(x')| = \left|\frac{x - x'}{xx'}\right| < \varepsilon$$

含有 $|x - x'| < \varepsilon|xx'|$,右端可以甚近於 0.

話雖如此，定理4還可以略事拓廣：

定理5. 設$f(x)$所定義之點集為M．若M有緻密的閉子集M_1，M_1中的點都是$f(x)$的連續點，則對於任一正數ε，有正數ρ，當

$$r(x, x_1) < \rho, x \in M, x_1 \in M$$

時，$|f(x) - f(x_1)| < \varepsilon$.

證明　同定理4的證明．

設$f(x)$是區間(a, b)上所定義的函數，$c(a < c < b)$是$f(x)$之一連續點．若$f(c) \neq 0$，則$f(x)$在c之適當的環境中也不等於0．此定理應用甚廣，今擴充如下：

定理6. 在定理5的條件下，若$f(x)$在M_1上$\neq 0$，則M_1必有一個環境$O(M_1)$，在$O(M_1)$上，$f(x)$也不等於0．

證明　函數$|f(x)|$在點集M_1上也是連續的，這是因為

$$|f(x)| \sim |f(x')| \leqslant |f(x) - f(x')|$$

的緣故．然M_1是一緻密閉集，故其中有點x_0適合

$$|f(x_0)| = I(|f|, M_1),$$

取正數$\varepsilon < |f(x_0)|$．由定理5，對於ε，有正數ρ如下，當

$$r(x', x_1) < \rho,\ x' \in M,\ x_1 \in M_1$$

時，$|f(x')| \sim |f(x_1)| < \varepsilon$．然$|f(x_1)| \geqslant |f(x_0)| > \varepsilon$，故$f(x') \neq 0$．在開集

$$O(M_1) = \sum_{x_1 \in M_1} O(x_1, \rho)$$

中的任何點x，函數值$f(x) \neq 0$．定理證畢．

應用　今利用定理6證明隱函數的存在定理：設函數$F(x, y)$與$F_y(x, y)$在點(x_0, y_0)之一環境中是連續的．若

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad F_y(x_0, y_0) \neq 0,$$

則在x_0之一環境中，有唯一的(連續)函數$f(x)$適合

$$F(x, f(x)) = 0, \quad y_0 = f(x_0).$$

證明 設 $F_y(x_0,y_0)>0$,則當 $|y-y_0|$ 甚小時,

$$\frac{F(x_0,y)-F(x_0,y_0)}{y-y_0}>0,$$

因 $F(x_0,y)$ 在 y_0 之一環境中爲 y 之連續函數,故有 y_1, y_2 如下:

$$y_1<y_0<y_2,\quad F(x_0,y_1)<0,\quad F(x_0,y_2)>0$$

設 $x_1<x_0<x_2$, 當 $(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$ 甚小時,由定理 6, 不等式

$$F_y(x,y)>0,\quad F(x,y_1)<0,\quad F(x,y_2)>0$$

當 $x_1<x<x_2$, $y_1<y<y_2$ 時成立。 固定(x_1,x_2)中之一點 x, y 從 y_1 增至 y_2 時, $F(x,y)$ 由負值連續的且單調的變爲正值, 故必通過 0,且只有一次通過 0. 設此時 y 之值爲 $f(x)$,即得所要的結果.

又易證 $f(x)$ 在(x_1,x_2)中是連續的.證明完畢.

4. 連續映照 在第一章 §2 中, 曾述用映照法 φ 將集 B 照於集 A 的意義: $A=\varphi(B)$. 今設 B 是有度空間 R 中之一點集, A 是有度空間 R^* 中之一點集. 設 b_n 與 b 都是 B 的點, 當 $b_n\to b$ 時,關係

$$\lim_{n\to\infty}\varphi(b_n)=\varphi(b)$$

常成立的話,稱 b 是映照 $A=\varphi(B)$之一連續點. 假如對於映照 $A=\varphi(B)$, B 中沒有不連續點的時候,則稱此照像爲一連續映照. 假如 R^* 是實數的全體, 那末 $\varphi(B)$ 是 B 中所定義之一實函數,下述定理 1,可仿實函數的相當定理來證明.

定理 1. 設 $A=\varphi(B)$, $a=\varphi(b)$; b 爲連續點之充要條件對於 a 的任一環境 $O(a)$, b 有一環境 $O(b)$,當 b 屬於 $O(b)B$ 時, $\varphi(b')\in O(a)A$.

次證

定理 2. 設 $A=\varphi(B)$是一連續映照,則當 B 是緻密閉集時, A 也是緻密閉集; B 是聯絡點集時, A 也是聯絡點集.

證明　設 B 是一緻密點集．設 $\{a_n\}\subset A$，則有 $\{b_n\}$ 適合

$$a_n=\varphi(b_n).$$

因 B 是緻密的，故有 $b_{n_\nu}\to b\in B$．設 $a=\varphi(b)$．由 $\varphi(B)$ 的連續性，當 $\nu\to\infty$ 時，從 $a_{n_\nu}=\varphi(b_{n_\nu})$ 得到

$$\lim a_{n_\nu}=\varphi(b)=a.$$

由是 $\{a_n\}$ 有一極限點 a．所以 A 是一緻密點集．

次設 $a_n\in A, a_n\to a$，置 $a_n=\varphi(b_n)$，則有 b_{n_ν} 收斂於 b，b 屬於 B．由是

$$\lim a_{n_\nu}=\lim\varphi(b_{n_\nu}),\ a=\varphi(b),$$

所以 $a\in A$，A 是閉集．

假如 B 是一聯絡點集，而 A 不是聯絡的話，那末 A 可分解如下：

$$A=A_1+A_2,\quad A_1\cdot A_2=0,\quad A_1\neq 0,\quad A_2\neq 0,$$

A_1 與 A_2 都對於 A 是閉的．置

$$A_1=\varphi(B_1),\quad A_2=\varphi(B_2),$$

則 $B=B_1+B_2, B_1\neq 0, B_2\neq 0, B_1B_2=0$．設 b 是 B_1 之一極限點且屬於 B，則 B_1 中有點列 $b_n\to b$．設

$$a_n=\varphi(b_n),$$

則 $a_n\in A_1$，然 A_1 對於 A 是閉的，故由 φ 之連續性，

$$\varphi(b)=\lim_{n\to\infty}\varphi(b_n)=\lim a_m,$$

知 $\varphi(b)\in A_1$．由是 $b\in B_1$．所以 B_1 對於 B 是閉的，同樣可證 B_2 對於 B 是閉的．那末，達到 B 非為聯絡點集的矛盾．定理證畢．

定理 3.　設 $\varphi(C)=B$ 與 $\psi(B)=A$ 都是連續映照，則

$$A=\psi(\varphi(C))(=\psi\varphi(C)),$$

也是連續映照．

證明　設 $c_n\in C,\ c_n\to c\in C,\ \varphi(c_n)=b_n\to b;\ \psi(b_n)=a_n$．那末由 φ 與 ψ 的連續性．

$$b=\varphi(c),\psi(b)=\lim a_n=a\in A$$

所以 $\psi\varphi(c)=\lim\psi\varphi(c_n)$．證畢．

定理 4. 設 B 是一緻密閉集，$A=\varphi(B)$ 是一對一的連續映照，則其逆映照 $B=\varphi^{-1}(A)$ 也是連續的.

證明 設 $a\in A, a_n\in A, a_n\to a, a_n=\varphi(b_n)$. 置 $a=\varphi(b)$, 證明 $b_n\to b$ 好了. 因 B 是一緻密閉集，故 $\{b_n\}$ 的任一極限點必屬於 B. 由是，當 $b_{n_\nu}\to b'$ 時,

$$a_{n_\nu}=\varphi(b_{n_\nu})\to\varphi(b').$$

故 $a=\varphi(b')$. 映照 $\varphi(B)=A$ 是一對一的，所以 $b'=b$ 是即證明 $b_n\to b$. 證明完畢.

例 設 $f(x)=y$ 是 $a\leqslant x\leqslant b$ 上所定義之函數，當 $x<x'$ 時，$f(x)<f(x')$. 那末，假如 $f(x)$ 是一連續函數，它的逆函數 $\varphi^{-1}(y)$ 也是連續的.

兩連續點集間的一一對应 设 E_k 与 $E_{k'}$ 是兩個歐幾里得空間，A 是 E_k 中之一連續點集，B 是 $E_{k'}$ 中之一連續點集，那末 A 與 B 的勢都是 $\aleph$. 所以必有一對一的映照法 φ 適合 $A=\varphi(B)$. 然而决無一對一的連續映照 φ 適合 $A=\varphi(B)$. 今僅就極簡單的情形來證明. 設 A 是 E_1 中的閉區間 $[0,1]$, B 是 E_2 中的正方形

$$0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant y\leqslant 1.$$

因 A 與 B 同勢，故有一對一的映照 φ 適合 $B=\varphi(A)$. 此 φ 决非連續的：假如 φ 是一連續映照，那末逆映照 $A=\varphi^{-1}(B)$ 也有具連續性. 於 B 中作兩直綫段 $\overline{b_1b_2}$ 與 $\overline{c_1c_2}$ 相交於 d 點，直綫段 $\overline{b_1d}$ 與 $\overline{db_2}$ 都是聯絡閉集，所以 $\varphi^{-1}(\overline{b_1d})$ 與 $\varphi^{-1}(\overline{db_2})$ 也是聯絡閉集，記

$$J_1=\varphi^{-1}(\overline{b_1d}),\quad J_2=\varphi^{-1}(\overline{db_2}),$$

J_1J_2 是 A 中的兩區間. 因 d 之原像 $a=\varphi^{-1}(d)\in J_1, J_2$, 故 b_1b_2 之原像 $\varphi^{-1}(\overline{b_1b_2})$ 是含有內點 a 的區間 J_1+J_2. 同樣 $\varphi^{-1}(\overline{c_1c_2})$ 也是含有內點 a 之一區間，那末 $\varphi^{-1}(\overline{b_1b_2})$ 和 $\varphi^{-1}(\overline{c_1c_2})$ 有一共通的區間了，這是不可能的事. 實際上，$\overline{b_1b_2}$ 和 $\overline{c_1c_2}$ 僅有一個共通點 d, d 的原像也只有一點 a，若將一對一的條件撤銷則綫分 A 可以連續

映照於正方形B上且塡充着B．這是

彼阿諾的充實空間的連續曲綫　設S是一區間，Q是一正方形，g是大於1的整數*．將S等分爲g^2個小區間

$$S_1^{(1)}, S_2^{(2)}, \cdots, S_{g^2}^{(1)},$$

其中$S_\nu^{(1)}$的右端就是$S_{\nu+1}^{(1)}$的左端．又將Q等分爲g^2個小正方形

$$Q_1^{(1)}, Q_2^{(1)}, \cdots, Q_{g^2}^{(1)},$$

其中$Q_\nu^{(1)}$與$Q_{\nu+1}^{(1)}$有共通邊．復次，將$S_k^{(1)}$等分爲g^2個小區間

$$S_{(k-1)g^2+1}^{(2)}, S_{(k-1)g^2+2}^{(2)}, \cdots\cdots, S_{kg^2}^{(2)},$$

$$(k=1, 2, \cdots, g^2).$$

如是，S被等分爲g^4個的小區間$S_1^{(2)}, S_2^{(2)}, \cdots, S_{g^4}^{(2)}$；其中$S_\nu^{(2)}$與$S_{\nu+1}^{(2)}$有共通點．又將$Q$等分爲$g^4$個小正方形

$$Q_1^{(2)}, Q_2^{(2)}, \cdots, Q_{g^4}^{(2)},$$

其中$Q_{(k-1)g^2+1}^{(2)}, \cdots Q_{kg^2}^{(2)}$都在$Q_k^{(1)}$之中，$Q_\nu^{(2)}$與$Q_{\nu+1}^{(2)}$有共通點．

此手續進行至n次時，S等分爲g^{2n}小區間

$$S_1^{(n)}, S_2^{(n)}, \cdots, S_{g^{2n}}^{(n)}\ (S_\nu^{(n)}\text{ 與 }S_{\nu+1}^{(m)}\text{ 有共通點}).$$

Q等分爲g^{2n}小正方形$Q_1^{(n)}, Q_2^{(n)}, \cdots\cdots, Q_{g^{2n}}^{(n)}$，其中

$$Q_{(k-1)g^2+1}^{(n)}, Q_{(k-1)g^2+2}^{(n)}, \cdots, Q_{kg^2}^{(n)}$$

由等分$Q_k^{(n-1)}$而得，$Q_\nu^{(n)}$與$Q_{\nu+1}^{(n)}$有共通點．

今將S中任意一點a用下述的映照法照入Q之一點b．若$a \in S_k^{(n)}$，則使$b \in Q_k^{(n)}$．假如a非爲任何$S_k^{(n)}$的左端或右端，則常爲小區間的內點．因之有$k_1, k_2, \cdots\cdots$如下：

$$S_{k_1}^{(1)} \supset S_{k_2}^{(2)} \supset \cdots,$$

a爲$S_{k_n}^{(n)}$的內點．因之$Q_{k_1}^{(1)} \supset S_{k_2}^{(2)} \supset \cdots$．當$n \to \infty$時，$Q_{k_n}^{(n)}$收斂於$b$．假如$a$是$S_{k_n}^{(n)}$的左端或右端，那末$a$也是$S_{k_{n+p}}^{(n+p)}$ $(p>>0)$的左端或右端．

若a不是S的左端或右端，則對於任一p，a爲相鄰兩區間

* 在彼阿諾(1890)的作法，$g=3$．希爾裒脫(1891)取$g=2$，見圖．

$S_{k_{n+p}}^{(n+p)}$ 與 $S_{k_{n+p}+1}^{(n+p)}$ 的共通端點．由

$$S_{k_n}^{(n)} + S_{k_n+1}^{(n)} \supset S_{k_{n+1}}^{(n+1)} + S_{k_{n+1}+1}^{(n+1)} \supset \cdots\cdots$$

得

$$Q_{k_n}^{(n)} + Q_{k_n+1}^{(n)} \supset Q_{k_{n+1}}^{(n+1)} + Q_{k_{n+1}+1}^{(n+1)} \supset \cdots\cdots.$$

當 $n\to\infty$ 時 $Q_{k_n}^{(n)} + Q_{k_n+1}^{(n)}$ 收斂於 b．

今證當 a 從 S 的左端逐漸移動到 S 的右端時，a 的像 b 填滿了 Q 中所有的點．記上述之映照法爲 φ．則對於 S 中任意一點，Q 中有 b 適合於 $b=\varphi(a)$．又設 b 是 Q 的任意一點，則必有如下的 $Q_{k_n}^{(n)}$ $(n=1,2,\cdots)$：

$$b\in Q_{k_n}^{(n)} \supset Q_{k_{n+1}}^{(n+1)} \quad (n=1,2,\cdots).$$

因之 $S_{k_n}^{(n)} \supset S_{k_{n+1}}^{(n+1)}$ $(n=1,2,\cdots)$．當 $n\to\infty$ 時 $S_{k_n}^{(n)}$ 收斂於 S 中的一點 a，此即 b 的原像．所以 $b=\varphi(a)$充實了 Q．

最後證明 $b=\varphi(a)$是一連續映照．設 $a_n\to a$, $a_n\in S$,

$$b_n=\varphi(a_n), \quad b=\varphi(a).$$

證明 $b_n\to b$ 好了．若 a 常爲小區間的內點，則有如下的 $k_1, k_2,\cdots$：

$$S_{k_1}^{(1)} \supset S_{k_2}^{(2)} \supset \cdots, \ a\in S_{k_n}^{(n)} \quad (n=1,2,\cdots)$$

除有限個之 a_n 而外，$\{a_n\}$ 之點屬於 $S_{k_n}^{(n)}$；因之固定 m，有 p：當 $n>p$ 時

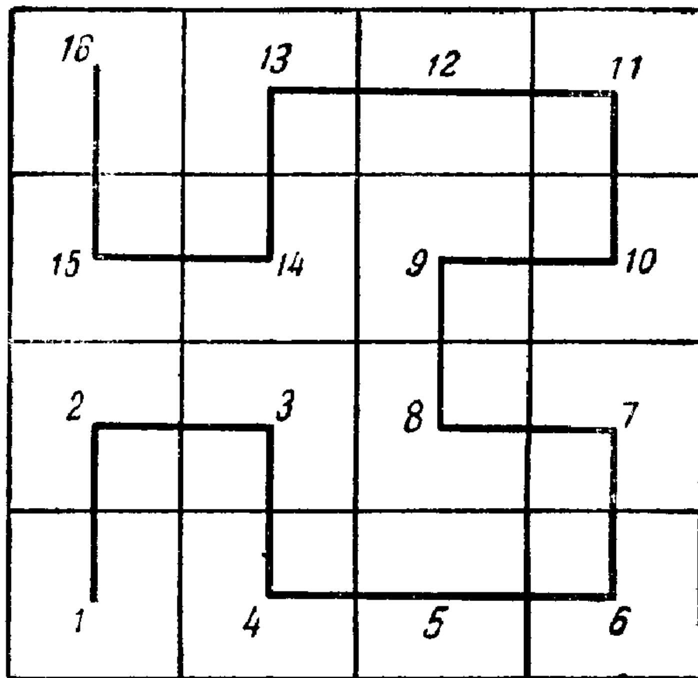
$$b_n\in Q_{k_m}^{(m)}.$$

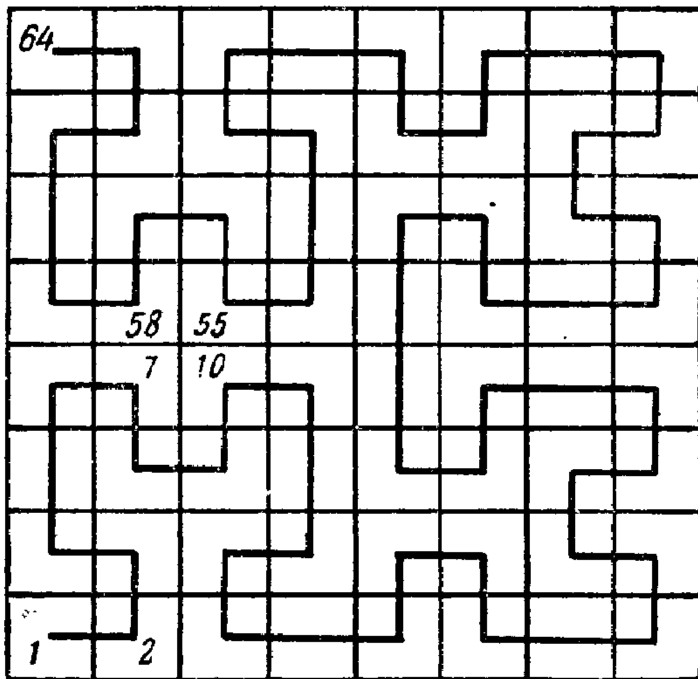
因 $Q_{k_m}^{(m)}$ 收斂於 b，故 $b_n\to b$．同樣可證 a 爲小區間的端點時，$b_n\to\to b$；實際上 $Q_{k_m}^{(m)} + Q_{k_{m+1}+1}^{(m+1)}$ 收斂於 b．由是可述如下的結論：若 $\varphi(x)$是 $a\leqslant x\leqslant b$ 上之連續函數，則連續曲綫

$$y=\varphi(x), \quad a\leqslant x\leqslant b$$

有充實一個正方形的可能．

當$y=2$時，將十六等分與六十四等分的情形，圖示如下：—當六十四等分正方形時，其 7, 10, 55, 58 四個正方形有一共通點．由是可知此點的原像不止一個．一般而論，對於 Q 的一點 b，含有





b 的 $Q_{k_n}^{(n)}$ $(n=1, 2, \cdots)$ 不止一個．設

$$b \in Q_{k_n}^{(n)}, \quad b \in Q_{k'_n}^{(n)}, \quad k_n \neq k'_n,$$

則 $\{S_{k_n}^{(n)}\}$ 與 $\{S_{k'_n}^{(n)}\}$ 所決定之點可以不相同．

5. 半連續點　設 $f(x)$ 是點集 M 上所定義之一函數，x 是 M

之一點。假如

$$S(x, f, M) = f(x),$$

稱 f 在點 x 是上半連續. 又若

$$I(x, f, M) = f(x),$$

則稱 f 在點 x 是下半連續. 所以 x 為 f 之一連續點的充要條件是 f 在點 x 上半連續且下半連續. 例如 $x \in E_1$,

$$f(x) = a + (b - a) \lim_{m\to\infty} \operatorname{sgn} (\sin^2 m! \pi x), a < b;$$

那末當 x 是一有理數時, $f(x) = a$. 假如 x 是一無理數, 那末

$$\sin^2 m! \pi x > 0,$$

因之 $f(x) = b$. 由是, 若 x 是一有理點, 則

$$a = I(x) = f(x) < b = S(x).$$

若 x 是一無理點, 則

$$a = I(x) < b = f(x) = S(x).$$

所以一切有理點都是 f 的下半連續點, 一切無理點都是 f 的上半連續點.

定理 1. 設點集 M 是 $f(x)$ 的定義區, $x \in M$. 點 x 成為 f 的上半連續點之充要條件是: 對於任一正數 ε. 有 $O(x)$, 當 $x \in M \cdot O(x)$ 時.

$$f(x') < f(x) + \varepsilon.$$

又 f 在 x 為下半連續的充要條件是: 對於 $\varepsilon > 0$, 有 $O(x)$, 當 x' 屬於 $MO(x)$時.

$$f(x') > f(x) - \varepsilon.$$

證明 若 x 是 f 之一上半連續點, 則對於任一正數, 有 $O(x)$, 當 $x' \in M \cdot O(x)$時, 成立着

$$f(x') < S(x) + \varepsilon = f(x) + \varepsilon.$$

反過來說, 從這個關係, 得着 $S(x, f, M) \leqslant f(x) + \varepsilon$. 令 $\varepsilon \to 0$, 則得

$$S(x) \leqslant f(x), \quad S(x) = f(x).$$

同樣可證定理 1 的後半．定理證畢．

設 $x_n \in M$, $x_n \to x$, 則上限 $\lim f(x_n)$ 的上界等於 $S(x)$. 由是可述下記的

定理 2. x 是 f 之一上(下)半連續點的充要條件是關係

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ f(x_n) \leqslant f(x)\ (\underline{\lim}\ f(x_n) \geqslant f(x))$$

對於 M 中之收斂於 x 的任何點列 $\{x_n\}$ 成立．

定理 3. 設 f 與 g 都是在 M 上定義的函數, x 是兩函數的一個共通上(下)半連續點,那末 x 也是 $f+g$ 的上(下)半連續點．

證明 設 $x_n \to x$, x 爲 f 與 g 的共通上半連續點,則

$$\overline{\lim}\ (f(x_n)+g(x_n)) \leqslant \overline{\lim}\ f(x_n) + \overline{\lim}\ g(x_n)$$
$$\leqslant f(x) + g(x),$$

所以 x 是 $f+g$ 的上半連續點．又由

$$\underline{\lim}\ f(x_n)+g(x_n) \geqslant \underline{\lim}\ f(x_n) + \underline{\lim}\ g(x_n),$$

知 f 與 g 之共通下半連續點,也是 $f+g$ 的下半共通點． 證明完畢．同樣可證

定理 4. 設 f 與 g 都在 M 上定義的函數, $f \geqslant 0$, $g \geqslant 0$. 假如 x 是 f 與 g 的共通上(下)半連續點,那末它也是 f, g 的上(下)半連續點．

定理 5. 設有限個函數 $f, g, \cdots, h$ 的定義區是 M, 若 x 是它們的共通上半連續點,那末 x 也是

$$\max(f, g, \cdots, h) = F$$

的上半連續點．

證明 設 $\varepsilon > 0$, $x_n \to x$. 由假設

$$\overline{\lim}\ f(x_n) \leqslant f(x), \cdots, \overline{\lim}\ h(x_n) \leqslant h(x).$$

因此有 m, 當 $n > m$ 時,

$$f(x_n) < f(x) + \varepsilon, \cdots, h(x_n) < h(x) + \varepsilon.$$

所以當 $n > m$ 時, $F(x_n) < F(x) + \varepsilon$. 因之

$$\overline{\lim}\ F(x_n) \leqslant F(x) + \varepsilon.$$

令 $\varepsilon \to 0$,得

$$\overline{\lim}\ F(x_n) \leq F(x).$$

定理證畢. 同樣可證

定理 6. 設有限個函數 $f, g, \cdots, h$ 都在點 x 爲下半連續, 那末 x 也是

$$G = \min(f, g, \cdots, h)$$

的下半連續點.

6. 半連續函數 設 M 是函數 f 的定義區. 假如 M 中的點都是 f 的上(下)半連續點,稱 f 是 M 中之一上(下)半連續函數. 所以連續函數是一上半連續函數,也是一下半連續函數.

定理 1. 設 M 是一緻密閉集,在 M 上 f 是一上(下)半連續函數,則 M 中必有點 x_0 適合

$$f(x_0) = S(f, M) \quad (I(f, M)).$$

證明 M 的包 M^0 中必有點 x_0 適合於 $S(x_0, f, M) = S(f, M)$. 因 M 是一閉集,故 $x_0 \in M$. 由 f 的上半連續性,

$$S(x_0, f, M) = f(x_0).$$

所以 $f(x_0) = S(f, M)$. 當 f 是一下半連續函數的時候, M 中有 x_0 適合

$$f(x_0) = I(f, M).$$

證明完畢.

點集 M 中的點 x, 適合條件 Y 的全體,記它做

$$(Y)_{x \in M} = (Y, x \in M).$$

定理 2. f 在 M 爲一上半連續函數的充要條件是對於任一實數 c ,點集

$$M_1 = (f(x) \geq c, x \in M)$$

在 M 中是閉的.

證明 設 f 是一上半連續函數, $x \in MM_1'$, 那末 M_1 中有點列 x_n 收斂於 x, 而

$$\overline{\lim}\ f(x_n) \leqslant f(x).$$

然 $f(x_n) \geqslant c$, 故 $f(x) \geqslant c$. 因之 $x \in M_1$. 所以 M_1 對於 M 是閉的.

次設 M_1 對於 M 常爲閉的,而 f 在 M 上不是上半連續,那末,M 中必有如下的點列 $x_n (n = 1, 2, \cdots)$ 和點 x:

$$x_n \to x, \quad \overline{\lim}\ f(x_n) > f(x).$$

取 c 使 $\overline{\lim}\ f(x_n) > c > f(x)$. 則當 n 甚大時. $x_n \in M_1$ 而

$$x \bar{\in} M_1.$$

這是不可能的事,因為 M_1 對於 M 是閉的. 定理證畢.

同樣可證

定理 2₂. f 在 M 成一下半連續函數的充要條件是對於任一實數 c,點集

$$(f(x) \leqslant c, x \in M)$$

在 M 中是閉的.

定理 3. 設 $f_1, f_2, \cdots$ 都是 M 上之上(下)半連續函數. 若

$$f_1 \geqslant f_2 \geqslant f_3 \geqslant \cdots \ (f_1 \leqslant f_2 \leqslant f_3 \leqslant \cdots)$$

則極限函數 $\lim f_n = f$ 在 M 上具有上(下)半連續性.

證明 設 $x \in M$. 由假設 $f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x)$. 所以

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

有一定的意義. 假如 $f(x)$ 在 M 上不是上半連續,則 M 中有如下的點列 x_n 與點 x:

$$x_n \to x, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\ f(x_n) > f(x).$$

取 m 甚大,則得 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ f(x_n) > f_m(x)$. 又由

$$f_m(x_n) \geqslant f(x_n),$$

得 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ f_m(x_n) \geqslant \overline{\lim}\ f(x_n)$. 由是

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ f_m(x_n) > f_m(x).$$

這是與 f_m 的上半連續性相抵觸的. 所以 $f(x)$ 是一上半連續函數. 同樣可證定理之又一半. 證畢.

系 連續函數之減少(增加)函數列, 其極限函數是一上(下)

半連續函數.

此系之逆,亦成定理:

定理 4. 凡上(下)半連續函數,一定是一減少(增加)連續函數列的極限函數[1].

證明 設 f 是 M 上所定義之一上半連續函數. 設 $\overline{\lim}\, c_n \leqslant \leqslant c$, 則恆等式

$$\frac{c_n}{1+|c_n|}-\frac{c}{1+|c|}=\frac{c_n-c}{(1+|c_n|)(1+|c|)}+\frac{|c|c_n-c|c_n|}{(1+|c_n|)(1+|c|)},$$

的末項的極限 $\leqslant 0$:實際上,當

$$c\cdot c_n\geqslant 0 \text{ 時}, \quad |c|c_n-c|c_n|=0;$$

$$c\cdot c_n< 0 \text{ 時}, \quad |c|c_n-c|c_n|=2cc_n<0.$$

所以 $\overline{\lim}\, c_n/(1+|c_n|)\leqslant c/(1+|c|)$. 由是可知:函數

$$f^*=\frac{f}{1+|f|}.$$

在 M 上也是上半連續,且 $-1\leqslant f^*\leqslant 1$。置

$$F=\frac{1+f^*}{2}$$

F 也是 M 上所定義之一上半連續函數,且 $0\leqslant F\leqslant 1$. 假如

$$f\neq+\infty, \quad f\neq-\infty,$$

則 $0<F<1$. 若有單調減少的連續函數列 g_ν 適合

$$g_\nu\to F, \quad 0<g_\nu<1,$$

則因 $f^*=2F-1$,得着 $2g_\nu-1\to f^*$. 又因 $f=\dfrac{f^*}{1-|f^*|}$,得着

$$\frac{2g_\nu-1}{1-|2g_\nu-1|}\to f.$$

左邊是一連續函數 f_ν. 置 $b_\nu=2g_\nu-1$ 則

$$f_\nu-f_{\nu+1}=\frac{b_\nu-b_{\nu+1}-b_\nu|b_{\nu+1}|+|b_\nu|b_{\nu+1}}{(1-|b_\nu|)(1-|b_{\nu+1}|)},$$

---

1) 這是貝勒(Baire)與帝尺(Tietze)的定理.

右邊分母是一正數；分子當 $b_\nu b_{\nu+1}\geqslant 0$. 時，其値等於

$$b_\nu - b_{\nu-1}\geqslant 0.$$

若 $b_\nu b_{\nu+1}<0$，則 $b_\nu>0$，$b_{\nu+1}<0$，由於 $|b_\nu|<1$，$|b_{\nu+1}|<1$，所以

$$b_\nu-b_{\nu+1}-b_\nu|b_{\nu+1}|+|b_\nu|b_{\nu+1}=|b_\nu|+|b_{\nu+1}|-2|b_\nu b_{\nu+1}|\geqslant 0.$$

由是 $f_\nu\geqslant f_{\nu+1}$.

現在證明對於 F 必有上述的 $g_\nu(\nu=1,2,\cdots)$. 設 $r\geqslant 0$，作 r 之函數 $h_\nu(r)(\nu=1,2,\cdots)$：

$$\begin{aligned} h_\nu(r) &= 1 & 0\leqslant r\leqslant \frac{1}{\nu},\\ &= 0 & x\geqslant \frac{2}{\nu},\\ &= \nu\left(\frac{2}{\nu}-r\right) & \frac{1}{\nu}\leqslant r\leqslant\frac{2}{\nu}.\end{aligned}$$

設 $x\in M$, $x'\in M$, 置

$$F(x')h_\nu(r(x,x'))=g_{\nu x}(x').$$

固定 x，則 $g_{\nu x}(x')$是 M 上所定義的函數，記其上界爲

$$S(g_{\nu x},M)=g_\nu(x).$$

那末，$g_\nu(x)\leqslant S(F,M)\leqslant 1$；$g_\nu(x)\geqslant h_\nu(r(x,x))F(x)=F(x)>$ >0. 又因 $h_\nu(r)$不小於 $h_{\nu+1}(r)$，所以

$$h_\nu(r(x,x'))F(x')\geqslant h_{\nu+1}(r(x,x'))F(x').$$

因之，$g_\nu(x)\geqslant g_{\nu+1}(x)$. 所以 $\{g_\nu\}$ 是一減少函數列. 現在要證 $\{g_\nu\}$ 中一切函數 g_ν 都是連續的。實際上，對於 $\varepsilon>0$，有如下的 ρ：當 $|r-r'|<\rho$ 時

$$|h_\nu(r)-h_\nu(r')|<\varepsilon.$$

設 $x''\in O(x,\rho)$，則 $|r(x,x')-r(x'',x')|<\rho$. 因之

$$|g_{\nu x}(x')-g_{\nu x''}(x')|\leqslant|h_\nu(r(x,x'))-h_\nu(r(x'',x'))|<\varepsilon.$$

假如 $g_\nu(x)\geqslant g_\nu(x'')$，那末從上式得到

$$0\leqslant g_\nu(x)-g_\nu(x'')\leqslant\varepsilon.$$

因此當 $r(x'',x)<\rho$ 時,$|g_\nu(x)-g_\nu(x'')|<\varepsilon$. 所以 g_ν 在 x 是連續的. 由是知 $g_\nu(x)$是一連續函數.

最後證明 $\lim g_\nu(x)=F(x)$. 因

$$g_{\nu x}(x)=h_\nu(0)F(x)=F(x).$$

故 $g_\nu(x)\geqslant F(x)$. 由 F 的上半連續性,對於 $\varepsilon>0$, 有 m, 當

$$r(x',x)<\frac{2}{m}$$

時, $F(x')<F(x)+\varepsilon$, 故設 $\nu\geqslant m$, $r(x,x')<\frac{2}{\nu}$,則

$$g_{\nu x}(x')=h_\nu(r(x,x'))F(x')\leqslant F(x')<F(x)+\varepsilon.$$

然若 $r(x,x')>\frac{2}{\nu}$,則 $g_{\nu x}(x')=0$. 由是對於 M 中任何點 x',成立着

$$g_{\nu x}(x')<F(x)+\varepsilon. \quad \nu\geqslant m.$$

取其上界,乃得 $g_\nu(x)\leqslant F(x)+\varepsilon(\nu\geqslant m)$. 左端不小於 $F(x)$,所以

$$|g_\nu(x)-F(x)|<\varepsilon \quad (\nu\geqslant m).$$

因之 $g_\nu(x)\to F(x)$. 又當 $F(x)$爲下半連續時 $-F(x)$爲上半連續,因此有如下的 $g_\nu(x)$:

$$-F(x)=\lim(-g_\nu(x)),\ -g_\nu(x)\geqslant -g_{\nu+1}(x).$$

所以 $F(x)=\lim g_\nu(x)$, $g_\nu(x)\leqslant g_{\nu+1}(x)$. 定理證畢.

定理 5.[1] 在點集 M 上,設有下半連續函數 g, 上半連續函數 h. 若 $h\leqslant g$,則必有連續函數 f 界於 h 與 g 之間:

$$h\leqslant f\leqslant g.$$

證明[2] 由定理 4,有如下的連續函數列$\{g_\nu\}$與$\{h_\nu\}$.

$$g_\nu\leqslant g_{\nu+1}\to g,\quad h_\nu\geqslant h_{\nu+1}\to h.$$

1) 這是漢 (H. Hahn) 的定理.

2) 此處的證明是好斯多夫 (Hausdorff) 所做的. 見德國數學時刊第五卷(1919).

那末，$h_1 - g_1 \geqslant h_1 - g_2 \geqslant h_2 - g_2 \geqslant h_2 - g_3 \geqslant h_3 - g_3 \geqslant \cdots$,

$$h_\nu - g_\nu \to h - g \leqslant 0, \quad h_\nu - g_{\nu+1} \to h - g \leqslant 0.$$

用記號$[X]$表示 X 和 0 兩數中較大的數，那末

$$[h_1 - g_1] \geqslant [h_1 - g_2] \geqslant [h_2 - g_2] \geqslant \cdots,$$

$$[h_\nu - g_\nu] \to [h - g] = 0, [h_\nu - g_{\nu+1}] \to [h - g] = 0.$$

由是，級數

$$g_1 + [h_1 - g_1] - [h_1 - g_2] + [h_2 - g_2] - [h_2 - g_3] + - \cdots\cdots$$

收斂於一函數 $f(x)$. 設 S_n 表示此級數最初 n 項的和，則 $S_n \to f$. 當 φ 爲連續函數時，$[\varphi]$ 也是連續函數. 因此 $S_n(n = 1, 2, \cdots)$ 都是連續函數. 由於

$$S_1 \leqslant S_3 \leqslant S_5 \leqslant \cdots, \quad S_2 \geqslant S_4 \geqslant S_6 \geqslant \cdots,$$

由定理 4，f 是一上半連續函數，也是一下半連續函數. 所以 f 是一連續函數.

現在只要證明 $h \leqslant f \leqslant g$ 好了. 當 $g(x) = h(x)$時，從

$$g_\nu(x) \leqslant g(x) = h(x) \leqslant h_\mu(x),$$

得$[h_\mu(x) - g_\nu(x)] = h_\mu(x) - g_\nu(x)$; 因此

$$S_{2n-1}(x) = g_n(x), \quad S_{2n}(x) = h_n(x);$$

$$f(x) = \lim h_\mu(x) = \lim g_\nu(x).$$

此時，$f(x) = h(x) = g(x)$.

假如 $g(x) > h(x)$, 那末 $\lim (h_\nu - g_\nu) = \lim (h_\nu - g_{\nu+1}) < < 0$. 此時有兩種可能的情形，第一種情形是：

$$h_1 - g_1 \geqslant 0, h_1 - g_2 \geqslant 0, \cdots, h_{\nu-1} - g_\nu \geqslant 0, h_\nu - g_\nu < 0,$$

那末，$f(x) = g_1 + (h_1 - g_1) - \cdots - (h_{\nu-1} - g_\nu) = g_\nu(x)$;因之

$$f(x) = g_\nu(x) > h_\nu(x) \geqslant h(x),$$

$$h(x) < f(x) \leqslant g(x).$$

第二種情形是：$f(x) = g_1 + (h_1 - g_1) + \cdots + (h_\nu - g_\nu) = h_\nu$. 此時 $h(x) \leqslant f(x) < g(x)$. 定理證畢.

連續區的拓廣 現在利用定理 5，證明連續函數的定義區，在

適當的條件下,有拓廣的可能.

定理 6.[1] 設 f 是 M 上之一連續函數,點集 M 對於 S 是閉的,則必有 S 上之連續函數 F 適合

$$F(x) = f(x), \quad x \in M.$$

證明 於 S 上定義如下的兩函數 g 與 h:

當 $x \in M$ 時, $g(x) = f(x) = h(x)$;

當 $x \in S - M$ 時, $g(x) = S(f, M)$, $h(x) = I(f, M)$.

那末在 S 上,成立着 $h(x) \leqslant g(x)$.

設 x_n 與 x 都是 S 中的點, $x_n \to x$. 若 $\{x_n\}$ 有部分點列屬於 M, 則 x 屬於 M, 此時

$$\underline{\lim}\, g(x_n) \geqslant f(x) = g(x).$$

若不然,則當 n 甚大時 $g(x_n) = S(f, M) \geqslant g(x)$. 由是可知 g 爲一下半連續函數,同樣可證 h 是一上半連續函數.

由定理 5, S 上有連續函數 F 適合 $h \leqslant F \leqslant g$, F 就是從 f 拓廣出來的連續函數. 定理證畢.

注意 M 必須對於 S 是閉的時候,才有拓廣的可能. 例如函數

$$f(x) = \sin\frac{1}{x}$$

在開區間 $0 < x < 1$ 上是連續的. 然而在閉區間$[0, 1]$上決無連續函數 $F(x)$適合 $f(x) = F(x)$ $(0 < x < 1)$.

7. 不連續點 設 M 是可析空間中之一點集,設 M 之勢是$\aleph$. 那末 M 上所定義的任何實函數,就是以實數全體 R 蓋 M 所得之一蓋集. 這些實函數所成之集 $\mathscr{F}$, 其勢是 $\aleph^{\aleph}$. 而 M 上連續函數的全體 C, 其勢等於

$$\aleph^{\aleph_0} = \aleph < \aleph^{\aleph}.$$

這是因爲 M 中有可列點集 B,B 對於 M 是稠密的緣故;在 M 上的

1) 好斯多夫的定理.

連續函數 f，假如 f 在 B 上之值爲已知，則 f 在 $M-B$ 上的函數值也跟着决定。事實上，設

$$x_n \in B, \quad x_n \to x \in M-B,$$

由 f 的連續性，$f(x)=\lim f(x_n)$. 所以 C 不過 $\mathscr{F}$ 之很小的一部分． 要討論非連續函數之性質，就是要研究函數之連續點的分佈．今先說振幅的

定義 設 f 是 M 上定義之一函數，$x \in M$. 稱

$$S(x,f,M)-I(x,f,M)$$

爲 f 在點 x 的振幅，以記號 $\omega(x)=\omega(x,f)=\omega(x,f,M)$ 表示它．

假如 $S(x,f,M)$ 與 $I(x,f,M)$都是 $+\infty$ 或 $-\infty$，那末規定 $\omega(x)$ 爲 0．當 $\omega(x)$ 爲 0 時，稱 x 爲 f 的一連續點．當

$$f(x)=S(x)=I(x)$$

時，不問其值是有限或無限，x 是 f 之一連續點，此時規定 $\omega(x)=$ $=0$．當 $\omega(x)>0$ 時，x 是 f 之一不連續點．點集

$$(\omega(x,f)>0,\ x \in M)$$

是 f 之不連續點的全體，簡記它做 $M\cdot(\omega>0)$；又簡記

$$(\omega(x,f)=0,\ x=M)=M\cdot(\omega=0).$$

稱 $S(f,M)-I(f,M)=\omega(f,M)$ 爲函數 f 的振幅．

定理 1. 設 f 是一有限函數（就是說，函數值都是有限數），f 之定義區是M，那末，點集 $M\cdot(\omega(x)\geqslant c)$ 對於 M 是閉的（從而 $M\cdot(\omega<c)$ 對於 M 是開的）．

證明 設 $x_n \to x, x_n \in M, x \in M$，在 $O\left(x_n, \dfrac{1}{n}\right)M$中必有點 ξ_n 適合

$$f(\xi_n)>S(x_n)-\frac{1}{n},$$

所以 $S(x)\geqslant \overline{\lim}\, S(x_n)$． 此即證明 $S(x,f,M)$ 是一上半連續函數；所以 $-I(x,f,M)$是一上半連續函數，其和 $\omega(x,f,M)$也是一

上半連續函數. 由 §36 定理 2, $M(\omega \geqslant c)$對於 M 是閉的. 定理證畢.

定理 2. 設 f 的定義區是M,那末不連續點的集$M(\omega > 0)$對於 M 是一外限點集,連續點集 $M(\omega = 0)$ 對於 M 是內限點集.

證明　由定理 1, 證明

$$M(\omega > 0) = M(\omega \geqslant 1) + M\left(\omega \geqslant \frac{1}{2}\right) + \cdots + M\left(\omega \geqslant \frac{1}{n}\right) + \cdots,$$

$$M(\omega = 0) = M\left(\omega < \frac{1}{2}\right) \cdots\cdots M\left(\omega < \frac{1}{n}\right) \cdots$$

好了. 現在證明更一般的等式: 當數列 c_n 單調減少而收斂於 c 時

$$M \cdot (f \leqslant c) = \prod_{1}^{\infty} (f < c_n),$$

$$M \cdot (f > c) = \sum_{1}^{\infty} (f \geqslant c_n).$$

因為 $\omega(x)$ 不取負值, 所以 $M(\omega \leqslant 0) = M(\omega = 0)$. 　若 x 是 $M \cdot (f \leqslant c)$中之一點,那末從

$$f(x) \leqslant c \leqslant c_n \quad (n = 1, 2, \cdots\cdots)$$

得着 $x \in \Pi(f < c_n)$. 又若 $x \in \Pi(f < c_n)$,那末從 $f(x) < c_n$得着 $f(x) \leqslant c$. 又 $M(f > c)$等於

$$M - \prod_{1}^{\infty} (f < c_n) = \sum_{1}^{\infty} (f \geqslant c_n).$$

定理證畢.

下述定理是均匀連續性定理($\rho = 0$, §3)的拓廣:

定理 3. 設函數 f 的定義區 M 是一有界閉集,假如有常數 ρ 使不等式

$$\omega(x, f, M) \leqslant \rho$$

對於 M 中之任何點 x 成立, 那末, 對於任一正數 ε, 必有 δ, 當 $r(x, x') < \delta$, $x \in M$, $x' \in M$ 時,

$$|f(x) - f(x')| < \rho + \varepsilon.$$

證明　可仿§3 定理 4 的證明完成.

定義　設 f 的定義區是 M, 其連續點全體是 S, 當 S 在 M 中是稠密的時候, 稱 f 爲一概連續函數. 無連續點的函數, 稱爲全不連續的函數.

連續函數是一概連續函數. 今證

定理 4.　設 M 是 f 的定義區, f 在 M 上爲概連續的充要條件是對於任何正數 c, 點集

$$M\cdot(\omega<c)$$

在 M 中是稠密的.

證明　因 $A(\omega=0)$ 爲 $A(\omega<c)$ 之一子集, 故條件是必要的. 今證條件的充足性. 由定理 1, $M(\omega<c)$ 對於 M 是開的, 故有開集 O_c 適合於

$$M(\omega<c)=O_cM.$$

由假設, 此點集在 M 中是稠密的. 記 $O_c\cdot M$ 爲 $M_{\frac{1}{c}}$, 則因 O_1, O_2, …皆爲開集之故點集

$$M_1M_2M_3\cdots=M(\omega<1)\cdot M\left(\omega<\frac{1}{2}\right)\cdot M\left(\omega<\frac{1}{3}\right)\cdots$$

在 M 中是稠密的, 這個點集 ΠM_n 就是 $M(\omega=0)$, 所以定理成立.

定理 5.　半連續的局部有界函數是一概連續函數. 所謂局部有界, 就是定義區之任何點, 必有一環境, 在此環境中, 函數爲有界.

證明　設上半連續函數 f 的定義區是 M, $x\in M$, $c>0$, 取適當之 $O(x)$, 可使

$$I(f,M\cdot O(x))=I$$

爲一有限數. 設 $O_1(x)$ 是 x 的任一環境, $MO(x)\cdot O_1(x)$ 中必有點 x' 適合 $f(x')<I+c$, 而

$$I\leqslant I(x')\leqslant f(x')=S(x').$$

所以 $\omega(x')=S(x')-I(x')<c$, 因之 $x'\in M(\omega<c)$. 由是知

$M(\omega < c)$ 在 M 中是稠密的，由定理 4，f 是一概連續函數. 定理證畢.

8. 一個或兩個實變數的函數 設 $M \subset E_1$，則在 M 上所定義的函數 $f(x)$，稱爲實變數 x 的函數. 設 $x \in M, \delta > 0$，簡記

$$S(f, M(x, x \pm \delta)) = S_{\pm}(x, \delta),$$
$$I(f, M(x, x \pm \delta)) = I_{\pm}(x, \delta).$$
$$\lim_{\delta \to 0} S_{\pm}(x, \delta) = S_{\pm}(x), \quad \lim_{\delta \to 0} I_{\pm}(x, \delta) = I_{\pm}(x).$$

所以 M 中任何一點 x，有下列五數：$S_{\pm}(x)$，$I_{\pm}(x)$，$f(x)$. 使五数互等的 x，是 f 之一連續點；若不然，x 是 f 之一不連續點.

例 1 设 $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ $(0 < x \leqslant 1)$，$f(0) = 0$，$f(x) = 2\sin\frac{1}{x}(-1 \leqslant x < 0)$. 則五數

$S_+(0) = 1$，$I_+(0) = -1$，$S_-(0) = 2$，$I_-(0) = -2$，$f(0) = 0$ 中，沒有兩個相等.

例 2 設 $0 \leqslant x \leqslant 1$，$x$ 爲無理數時，$f(x) = 0$；x 爲既約分數 $\frac{p}{q}$ 時，$f(x) = q$；$f(0) = 1$，那末，當 $0 < x < 1$ 時，

$$S_+(x) = S_-(x) = +\infty, \quad I_-(x) = I_+(x) = 0;$$
$$S_+(0) = +\infty, \quad I_+(0) = 0.$$

所以 $f(x)$ 是一全不連續的函數.

當 $S_+(x) = I_+(x)$ 時，稱 f 在點 x 有右方極限值，記之以

$$f(x+0) = S_+(x) = I_+(x).$$

同樣可定 $f(x-0)$ 的意義. 假如極限值 $f(x+0)$ $(f(x-0))$ 存在且等於 $f(x)$，那末，f 在點 x，是右(左)方連續的. 假如

$$f(x+0) = f(x-0) \neq f(x),$$

則稱 x 是 f 之一可改不連續點；事實上適當地，改變在 x 點的函數值，x 就可成爲 f 之一連續點，例如

$$f(x)=\frac{\sin x}{x},\quad x\neq 0;\quad f(0)=c\neq 1,$$

原點 $x=0$ 是 $f(x)$ 之一可改不連續點。

當 $f(x+0)$ 和 $f(x-0)$，皆存在而不相等時，稱 x 爲 f 之一普通不連續點．例如 $f(0)=c$, $x\neq 0$ 時，

$$f(x)=(1-e^{\frac{1}{x}})^{-1}.$$

那末，當 $x\to+0$ 時，$f(x)\to 0$, $f(-x)\to 1$，所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 之一普通不連續點．若 $c=0$，則 $f(x)$ 在 $x=0$，是右方連續的。又若 $c=1$，則 $f(x)$ 在 $x=0$，是左方連續的．

普通不連續點，又稱第一種不連續點．假如

$$S_+(x)\neq I_+(x),\ S_-(x)\neq I_-(x)$$

兩者有一成立，稱 x 爲函數 f 之第二種不連續點． 例如 $x=0$ 爲函數

$$f(x)=\sin\frac{1}{x},\qquad (x\neq 0)$$
$$f(0)=c$$

之第二種不連續點。

五數 $S_\pm(x)$, $I_\pm(x)$, $f(x)$ 中之最大者，減去其最小者，稱其結果 $\omega(x)$ 爲 f 在 x 的振幅．

定理 1. 設 $M\subseteq E_1$, M 爲 f 的定義區．設 $x\in M$, $x_n\in M$,

$$x<x_n(x>x_n),\ x_n\to x,\ f(x_n)\to y.$$

那末這種極限值 y 的全體 $Y_+(Y_-)$ 成一閉集．

證明　設 $y_n\in Y_+$, $y_n\to y$，要證 $y\in Y_+$，點集 M 中必有點 x_{n_ν} 適合

$$x<x_{n_\nu},\ \lim_{\nu\to\infty}f(x_{n_\nu})=y_n,\ \lim_{\nu\to\infty}x_{n_\nu}=x.$$

對於 n，必有 v_n，當 $\nu\geqslant v_n$ 時，

$$|x_{n\nu}-x|<\frac{1}{n},\ |f(x_{n_\nu})-y_n|<\frac{1}{n}.$$

置 $N=n_{n_\nu}$, $\xi_n=x_N$。則 $\xi_n\to x$, $f(\xi_n)\to y$，故 $y\in Y$。

同樣可證 Y_- 是一閉集．定理證畢．

定理 2*． 設 $M \subseteq E_1$，f 是 M 上所定義之一函數，下記關係

$$I_-(x) = I_+(x) \leqq f(x) \leqq S_+(x) = S_-(x)$$

不成立之點 $x(x \in M)$ 所成之集 $D(M)$ 是可列的．

證明 $D(M)$ 是下列六個點集的和集：

$$D_1 = (S_+(x) = S_-(x) < f(x), x \in M),$$
$$D_2 = (S_+(x) < S_-(x), x \in M),$$
$$D_3 = (S_-(x) < S_+(x), x \in M),$$
$$D_4 = (f(x) < I_+(x) = I_-(x), x \in M),$$
$$D_5 = (I_-(x) < I_+(x), x \in M),$$
$$D_6 = (I_+(x) < I_-(x), x \in M).$$

證明 $D_1, \cdots, D_6$ 都是可列點集好了．設 $r_1, r_2, r_3, \cdots$ 是有理數的全體．先證 D_1 是一可列集；置 $S_0(x) = S_+(x) = S_-(x)$．因

$$D_1 = \sum_{k=1}^{\infty} (S_0(x) < r_k < f(x), x \in M)$$

證明其中任何一項都是可列點集就够了．設 x 是其第 k 項的一點，取正數 ε 甚小，可得

$$S_0(x) + \varepsilon < r_k < f(x).$$

因 $S_0(x) = \overline{\lim\limits_{x' \to x}} f(x')$，$(x' \neq x)$，故取正數 δ 甚小，當 $x - \delta < x' < x$ 或 $x < x' < x + \delta$ 且 $x' \in M$ 時，

$$f(x') < S_0(x) + \varepsilon.$$

由是 $f(x') < r_k$，所以 x' 不屬於第 k 項點集．這就是證明，第 k 項點集是一孤立點集．孤立點集是可列的，所以 D_1 是可列個可列點集的和，D_1 也是可列的．

---

* 這是 W. H. 楊格 (Young) 的定理 (1908)．

次證 D_2 是一可列點集，置 $(S_+(x) < r_k < S_-(x)) = \mathscr{E}_k$ 則

$$D_2 = \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 + \mathscr{E}_3 + \cdots\cdots.$$

固定 k，證明 $\mathscr{E}_k$ 是一可列點集好了．設 $x \in \mathscr{E}_k$，取正數 ε 使

$$S_+(x) + \varepsilon < r_k < S_-(x).$$

因 $S_+(x) = \overline{\lim} f(x')(x' > x)$，故取 δ 甚小，當 $x < x' < x + \delta$，$x' \in M$ 時，

$$f(x') < S_+(x) + \varepsilon.$$

因之 $f(x') < r_k, S_-(x') \leqslant r_k, x' \bar{\in} \mathscr{E}_k$．就是說：$\mathscr{E}_k$ 中任何點 x 的右方有區間 $(x, x + \delta)$，…在此區間中無 $\mathscr{E}_k$ 的點．所以 $\mathscr{E}_k$ 是可列的．因之，$D_2 = \Sigma \mathscr{E}_k$ 是可列的．同樣可證 D_3 也是一可列點集．

將上面三集 D_1, D_2, D_3，就 $-f(x)$ 而言，知 D_4, D_5, D_6 都是可列的．定理證畢．

系 1 設 f 的定義區 $M \subseteq E_1$，則 f 之第一種不連續點所成的集是一可列點集．

證明 因為一切第一種不連續點含在 $D_2 + D_3 + D_5 + D_6$ 之中之故．證畢．

設 f 之定義區是 M，M_1 是它的連續點的全體，當 $M_1 = M$ 時，f 為一連續函數；當 M_1 為空集時，f 是一全不連續的函數．全不連續的函數 f，可能

$$I_0(x) \leqslant f(x) \leqslant S_0(x)$$

處處成立．例如當 f 為有理數時，$f(x) = 1$；x 為無理數時，$f(x) = 0$，那末

$$I_0(0) = 0,\ S_0(x) = 1,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant 1.$$

點集 M_2 在 M 中是稠密的話，f 是一概連續函數．假如 $f(x)$ 的一切不連續點，都是第一種，那末 $f(x)$ 一定是一概連續函數．又若 $x < x'$ 含有 $f(x) \leqslant f(x')(f(x) \geqslant f(x'))$，稱 $f(x)$ 為一單調增加（減少）函數，這種函數——單調函數——顯然是一概連續函數．

例　設 $\varphi(x)=\sin\frac{1}{x}(x\neq 0)$，$\varphi(0)=0$，又設 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 爲$[-1, 1]$中一切有理點，置 $M=[-1, 1]$，$x\in M$.

$$f(x)=\varphi(x-a_1)+\frac{1}{2^2}\varphi(x-a_2)+\frac{1}{2^3}\varphi(x-a_3)+\cdots,$$

則當 x 爲 M 中之一無理點時，對於 $\varepsilon>0$，可取 $\delta>0$，使

$$|f(x+h)-f(x)|<\varepsilon,\ (|h|<\delta)$$

成立．事實上，假如 $\sum_m^\infty n^{-2}<\frac{1}{3}\varepsilon$，則因

$$|f(x+h)-f(x)|<\frac{2}{3}\varepsilon+\left|\sum_1^m\frac{1}{n^2}(\varphi(x+h-a_n)-\varphi(x-a_n))\right|,$$

當 δ 甚小時，得所要的結果．又若 $x=a_s$，則

$$f(x)-\frac{\varphi(x-a_s)}{s^2}$$

在 $x=a_s$ 爲連續，由是可知：$S_\pm(a_s)=s^{-2}$，$I_\pm(a_s)=-s^{-2}$，$f(x)$是一概連續函數.

第四章　習　題

1. 設 $f(x)=\left|\sin\frac{1}{x}\right|$，$x\in M=(0, 1)$．求 $S(f, M)$ 和 $I(f, M)$，並問 $S(f, M)$ 是 $I(f, M)$ 是否爲 $f(x)$ 的函數值?

2. 設$f(x)=\frac{1}{x}$，$x\in M=(0, 1)$．求 $S(f, M)$．問此函數是否有界?

3. 設 $f(x)$ 的定義域是 M，$x\in M^0$，$\rho_n>0$，$\rho_n\to 0$，

$$O_n=M\cdot O(x, \rho_n).$$

證明 $\lim I(f, O_n)=I(x, f, M)$.

4. $f(x)=\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}$．求 $S(O, f, M)$ 和 $I(O, f, M)$；但 $M=[-1, 1]$.

5. 設 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的定義域都是 M, $x_0 \in M$. 設 x_0 是 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的公共連續點,證明

(i) x_0 是 $|f(x)|$ 的連續點,

(ii) x_0 是 $f(x)g(x)$ 的連續點,

(iii) 當 $g(x_0) \neq 0$, x_0 是 $f(x)/g(x)$ 的連續點.

6. 設 $x = 0$, $y = 0$ 是 $f_n(x, y)(n = 1, 2, \cdots)$ 的連續點,即使

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x, y) = f(x, y)$$

當 $0 < |x| + |y| < 1$ 時成立; $x = 0$, $y = 0$ 未必是 $f(x,y)$ 的連續點,試舉例以明其故.

7. 設 M 是平面上之一聯絡點集, $f(x, y)$ 是 M 上之一連續函數,證明 M 中有點 (ξ, η) 適合

$$\iint_M f(x, y)dx\,dy = f(\xi, \eta)\iint_M dx\,dy.$$

8. 證明在 $(0, 1)$ 上所定義的連續函數 $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ 不是均勻連續的.

9. 利用葛羅斯的掩蓋定理,證明 §3 的定理 4.

10. 設 $F(x, y)$ 與 $F_y(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 之一環境中是連續的.若

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad F_y(x_0, y_0) \neq 0,$$

則當正數 ε 甚小時, $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ 中有連續函數 $f(x)$ 適合

$$F(x, f(x)) = 0 \quad (x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon).$$

假如 $F_x(x, y)$ 在 $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ 也是連續,那末

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} \quad (x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon).$$

11. 設 $F(x, y, z)$ 與其一次導函數 F_x, F_y, F_z 在 (x_0, y_0, z_0) 之一環境中都是連續的. 若

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0,$$

則有唯一的函數 $f(x, y)$ 在 (x_0, y) 之一環境中適合

$$F(x, y, f(x, y)) = 0,$$

$$z_0 = f(x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}.$$

12. 作希爾褒脫充滿正方形的連續曲綫時 $(g = 2)$，將正方形 Q 分為 4^n 個小正方形，問 Q 中有幾個點為四個小正方形所公有？證明 Q 中具有三個原像的點在 Q 中稠密地分佈着.

13. 設 $\phi(x)$ 在 M 上是一上半連續函數．假如

$$\phi(x) = \frac{f(x)}{1 + |f(x)|} > -1,$$

那末 $f(x)$ 在 M 也是上半連續.

14. 設 m 和 n 都是正整數，求出函數

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} (\cos m!\, \pi x)^{2n}$$

的上半連續點.

15. 設 $f(x) \geqslant 0$，$g(x) \geqslant 0$，若 x 是 f 與 g 的共通上半連續點，則 x 也是 fg 的上半連續點.

16. 設 x 是 $f_1, \cdots, f_k$ 的共通下半連續點，則 x 也是

$$\min(f_1, f_2, \cdots, f_k)$$

的下半連續點.

17. 函數 $f(x)$ 在 M 是下半連續的充要條件是對於任一實數 c，點集

$$(f(x) \leqslant c, x \in M)$$

對於 M 是閉的.

18. 函數 $f(x) = \lim\limits_{\lambda\to\infty} \dfrac{(1 + \sin \pi x)^\lambda - 1}{(1 + \sin \pi x)^\lambda + 1}$ 的不連續點是

$$x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\cdots.$$

19. 設 $p>0$, $f(x)=|x|^p$.　證明當 $p\leqslant 1$ 時, $f(x)$ 是一均勻連續函數; 當 $p>1$ 時, $f(x)$ 在 $0\leqslant x<\infty$ 中沒有均勻連續性.

第五章

連續函數列的極限

1. 裴勒的函數[1]　設 M 是一點集，一切 M 上的連續函數，稱爲 M 上的 0 級函數，以 $B_0 = B_0(M)$ 記之. 設 $f_n(x) \in B_0(M)$，且

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

在M上成立，則當 $f_n \bar{\in} B_0(M)$時，稱 f 爲M上的 1 級函數. 記 1 級函數的全體爲 $B_1(M)$. 不具有連續性的M上之半連續函數都屬於 $B_1(M)$. 設 α 是一序數，當 $\beta < \alpha$ 時假如 $B_\beta(M)$ 已經有了定義，那末，當

$$f_n \in B_\beta(M). \quad \beta < \alpha \ (\beta \text{ 可能與 } n \text{ 有關}),$$
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad (x \in M),$$
$$f \bar{\in} B_\beta(M) \quad (0 \leqslant \beta < \alpha)$$

時，稱 f 爲 $B_\alpha(M)$中的函數. 由是對於任何序數 α，定義了函數族 $B_\alpha(M)$，這些函數族中的函數，稱爲裴勒的函數.

定理 1. 設 $f_1, f_2, \cdots$ 是 M 上的裴勒函數列. 假如

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad (x \in M),$$

那末，f 是一裴勒函數.

證明　設 $f_n \in B_{\alpha_n}(M) (n = 1, 2, 3, \cdots)$，設序數 α 剛剛大於 $\{\alpha_n\}$ 中一切數. 假如 $f \bar{\in} B_\beta(M) (\beta < \alpha)$，那末

$$f \in B_\alpha(M).$$

證明完畢.

函數族 $B_0(M), B_1(M), B_2(M), \cdots$ 中一切函數，一般地說，不

1) 裴勒 (Rene Baire) (1874—1932)、這種理論的創設，在 1899 年.

能包括 M 上可定義的所有的函數；因爲這些函數的全體，其勢是 $\aleph^{p}$，p 是 M 的勢，假如 $p=\aleph$，那末

$$\aleph^{p}>\aleph.$$

然而 $\sum_{n=0}^{\infty}B_n(M)$ 中一切函數的勢是 $\aleph$，此事實含在下述定理中.

定理 2. 設 M 是可析空間中之一無限點集，那末

$$\sum_{n=0}^{\infty}B_n(M)+\sum_{\beta}B_{\beta}(M)\quad[\beta\in Z(\aleph_0)]$$

中一切函數所成的集，其勢是 $\aleph$.

證明 $B_0(M)$ 的勢是 $\aleph$，已詳於前. 我們用超限歸納法來證 $B_{\beta}(M)$ 的勢是 $\aleph$，但 $\beta\leqslant\alpha\in Z(\aleph_0)$. 假如當 $\beta<\alpha,\alpha\leqslant\alpha_0$，$\alpha_0\in Z(\aleph_0)$ 時，$B_{\beta}(M)$ 的勢都不大於 $\aleph$. 那末，

$$\sum_{\beta<\alpha}B_{\beta}(M)=B^{\alpha}(M)$$

中一切函數的集，其勢不過 $\aleph\cdot\aleph_1=\aleph$ (見第一章 §11). 然 B_0 的勢已經是 $\aleph$，所以 B^{α} 的勢是 $\aleph$. 以 B^{α} 中函數蓋自然數列

$$1,2,3,\cdots$$

得一函數列：$f_1,f_2,f_3,\cdots$. 這種函數列的全體，其勢是

$$\aleph^{\aleph_0}=\aleph.$$

所以 B_{α} 的勢不過 $\aleph$. 因之 $B^{\alpha}(M)+B_{\alpha}(M)$ 的勢不過 $\aleph$. 所以

$$\sum_{\beta\leqslant\alpha}B_{\beta}(M)$$

中一切函數所成之集，其勢是 $\aleph$.

因 $Z(\aleph_0)$ 的勢是 $\aleph_1\leqslant\aleph$，所以

$$\Sigma B_{\beta}(M)\quad(\beta\in Z(\aleph_0))$$

中一切函數所成之集，其勢不過 $\aleph\cdot\aleph_1\leqslant\aleph\aleph=\aleph$. 證明完畢.

定義區 M 的勢爲 $\aleph$ 時，一切函數所成之集，其勢 $\aleph^{\aleph}$ 大於

8. 但是下述定理,值得注意.

定理 3. 假如 M 是一可列點集,那末當 $\beta > 1$ 時,$B_\beta(M)$是一空集.

證明 設 $x_1, x_2, \cdots$ 是 M 所含有的一切點. 设 f 是在 M 上所定義之一函數. 對於 f, 作$\{f_n\}$如下:設 $\lambda_n = \lambda_n(x)$, $\frac{1}{\lambda_n} = r(x, x_n)$. 定

$$f_n(x_\nu) = f(x_\nu), \quad \nu = 1, 2, \cdots, n;$$

當 $x \neq x_1, x_2, \cdots, x_n$ 時,定

$$f_n(x) = \frac{\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n)}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n}.$$

設 $x \in M$, 則有 m 適合 $x = x_m$. 當 $n > m$ 時,

$$f_n(x) = f(x_m) = f(x).$$

故極限關係 $\lim f_n(x) = f(x)$ 成立. 函數

$$\lambda_\nu(x) = \frac{1}{r(x, x_\nu)}$$

當 $x \neq x_\nu$ 時,是連續的. 所以當 $x \neq x_1, x_2, \cdots, x_n, x \in M$ 時,

$$\lim_{x' \to x} f_n(x') = f_n(x).$$

又若 $x = x_\nu$, $\nu < n$, 則當 $x' \in M$, $x' \to x$ 時, $\lambda_\nu(x') \to \infty$,

$$\lim_{x' \to x} f_n(x') = f(x_\nu) = f_n(x_\nu) = f_n(x).$$

所以 $f_n(x)(n = 1, 2, \cdots)$是一連續函數列. 因之,若 $f \overline{\in} B_0$ 則必 $f \in B_1$. 證明完畢.

定理 4. 若 $f \in B_\alpha(M)$, $T \subset M$, 則 f 亦爲 T 上之函數,此函數屬於 $B_\beta(T)$, $\beta \leqslant \alpha$.

證明 若 $\alpha = 0$, 則由

$$I(x, f, M) \leqslant I(x, f, T) \leqslant S(x, f, T) \leqslant S(x, f, M),$$

知 $f \in B_0(T)$. 若定理對於小於 α 之一切 β 成立,則當

$$f=\lim_{n\to\infty} f_n,\quad f_n\in B_\beta(M),\quad \beta<\alpha$$

時，$f_n\in B_\gamma(T)$，$\gamma\leqslant\beta$．由是 $f\in B_\beta(T)$，$\beta<\alpha$．由超限歸納法，知定理 4 成立，定理證畢．

利用超限歸納法，易證下述定理：

定理 5. 設 $f, g, f\pm g, fg, \frac{f}{g}$ 都是 M 上所定義的函數[1]．若 $f\in B_\alpha(M)$，$g\in B_\beta(M)$，$\beta\leqslant\alpha$，則下列諸函數屬於 $B_\gamma(M)$，但 $\gamma\leqslant$ $\leqslant\alpha$：

(i) $|f|, f+g, fg, \frac{f}{g}$;

(ii) $\max(f,g)$, $\min(f,g)$.

定理 6. 設 $f\in B_\beta(M)$，$\beta\leqslant\alpha$，那末，$B^\alpha(M)$ 中必有有界函數列 $\{f_n\}$ 收斂於 f．

證明 因 $f\in B_\beta$，$\beta\leqslant\alpha$，$B^\alpha(M)$ 中必有函數列 φ_n 收斂於 f．設 $q<p$，置

$$[g]_q^p=\min(\max(g,q),p).$$

這是一個有界函數：當 $q<g<p$ 時，其值與 g 相同；假如 $g<q$，其值為 q；假如 $p<g$ 則其值為 p．因此 $q\leqslant[g]_q^p\leqslant p$．由定理 5，當 $f_\nu\in B^\alpha(M)$ 時，函數

$$\varphi_\nu=[f_\nu]_{-\nu}^{\nu}\in B^\alpha(M).$$

固定 $x\in M$，當 $f(x)$ 是一有限數時，取 n 足夠大可使 $f(x)$ 落在 $(-n,n)$ 中．取 m 足夠大，

$$-n<f_\nu(x)<n,\ -n<\varphi_\nu(x)<n\quad(\nu>m).$$

由是 $f_\nu(x)=\varphi_\nu(x)\to f(x)$．假如 $f(x)=\pm\infty$，那末當 ν 甚大時 $\varphi_\nu(x)=\pm\nu\to\pm\infty$．定理證畢．

定理 7. 設 $f\in B_\beta(M)$，$\beta\leqslant\alpha$．$q\leqslant f\leqslant p$，則 $B^\alpha(M)$ 中有如下的函數列 $\{f_n\}$：

---

1) 這就是說 $f\pm g, fg, \frac{f}{g}$ 在 M 的任何點，都有一定函數值(有限或無限)．

$$q \leqslant f_n \leqslant p, \quad \lim f_n = f.$$

證明 設 $\varphi_n \in B^\alpha$, $\varphi_n \to f$, 則置 $f_n = [\varphi_n]_q^p$ 時, $f_n \to f$. 定理證畢.

定理 8. 設 $f_n \in B^\alpha(M) + B_\alpha(M) = \overline{B}_\alpha(M) (n = 1, 2, \cdots)$. 若函數列 $\{f_n\}$ 在 M 上均勻收斂於 f, 則必

$$f \in \overline{B}_\alpha(M).$$

證明 置 $\varphi_n = \dfrac{f_n}{1 + |f_n|}$, 則當 $n \to \infty$ 時, φ_n均勻收斂於

$$\varphi = \frac{f}{1 + |f|}.$$

事實上, $\varphi_n - \varphi_m = \dfrac{f_n - f_m}{(1 + |f_n|)(1 + |f_m|)}$ 當 $f_n f_m \geqslant 0$ 時成立.

因 $f = \dfrac{\varphi}{1 - |\varphi|}$, 由定理 5, 證明 $\varphi \in B^\alpha(M) + B_\alpha(M)$好了. 對於正整數 n, 取正整數 $(n) = \nu_n$ 甚大, 可使

$$|\varphi - \varphi_{(n)}| < \frac{1}{2^n}$$

在 M 上均勻地成立. 那末

$$\varphi = \varphi_{(1)} + (\varphi_{(2)} - \varphi_{(1)}) + (\varphi_{(3)} - \varphi_{(2)}) + \cdots.$$

此級數的各項都屬於 $B^\alpha + B_\alpha$. 由定理 7, B^α 中有如下的函數 $\varphi_{k,n}$ $(k, n = 1, 2, \cdots)$:

$$\varphi_{(1)} = \lim_{n\to\infty} \varphi_{1n}, \ \varphi_{(k)} - \varphi_{(k-1)} = \lim_{n\to\infty} \varphi_{kn} \ (k = 2, 3, \cdots).$$

由於 $|\varphi_{(k)} - \varphi_{(k-1)}| \leqslant |\varphi_{(k)} - \varphi| + |\varphi - \varphi_{(k-1)}| < 2^{-k} + 2^{-k+1}$,

$$|\varphi_{kn}| < \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k-1}}.$$

置 $\psi_n = \varphi_{1n} + \varphi_{2n} + \cdots + \varphi_{nn}$, 則 $\psi_n \in B^\alpha$. 從

$$\lim_{n\to\infty} (\varphi_{1n} + \varphi_{2n} + \cdots + \varphi_{kn}) = \varphi_{(1)} + (\varphi_{(2)} - \varphi_{(1)}) + \cdots + $$
$$+ (\varphi_{(k)} - \varphi_{(k-1)}) = \varphi_{(k)},$$

$$|\varphi_{k+1,n} + \cdots + \varphi_{nn}| < \frac{1}{2^{k+1}} + 2\sum_{\nu=k}^{\infty} \frac{1}{2^{\nu+2}} = \frac{3}{2^{k+1}},$$

得到

$$|\varphi - \psi_n| \leqslant |\varphi - \varphi_{(k)}| + |\varphi_{(k)} - (\varphi_{1n} + \cdots + \varphi_{kn})| + \frac{3}{2^{k+1}}.$$

右方第一項小於 $\frac{1}{2^k}$. 令 $n \to \infty$, 則得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\varphi - \psi_n| \leqslant \frac{5}{2^{k+1}}.$$

令 $k \to \infty$,即知上式右端等於 0, 因之 $\psi_n \to \varphi$, $\varphi \in B^\alpha + B_\alpha$. 定理證畢.

定義 設 f_n 的定義區是 M. 記 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 之最大值函數為 F_n. 稱極限函數 $\lim F_n$ 為 $\{f_n\}$ 之上界函數,又稱

$$\lim \min (f_1, \cdots, f_n)$$

為 $\{f_n\}$ 的下界函數.

定理 9. 設 $f_n \in B^\alpha(M)(n = 1, 2, \cdots)$, 則 f_n 的上界函數 G 與下界函數 g 皆屬於 $\overline{B}_\alpha$,

證明 由假設與定理 5, $f_1, \cdots, f_n$ 之最大值函數 F_n 屬於 B^α. 所以

$$\lim F_n = G \in \overline{B}_\alpha.$$

同樣, $g \in \overline{B}_\alpha$. 定理證畢.

定義 設 f_n 的定義區是 M; $f_n, f_{n+1}, \cdots$ 的上界函數為 G_n, 下界函數為 g_n, 稱 $\lim G_n$ 為 f_n 之上限函數,以

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} f_n = \lim G_n$$

記之. 又稱 $\lim g_n$ 為 $\{f_n\}$ 的下限函數, 記之以 $\underline{\lim} f_n$.

定理 10. 設 $f_n \in B^\alpha(M)$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 則 $\overline{\lim} f_n$ 和 $\underline{\lim} f_n$ 皆屬於 $\overline{B_{\alpha+1}}(M)$.

證明 由定理 9, G_n 與 g_n 皆屬於 $\overline{B}_\alpha$. 所以

$$\overline{\lim} f_n \text{ 與 } \underline{\lim} f_n$$

皆屬於 $\overline{B_{\alpha+1}}$.证明完毕

定理 11. 設 M 是 n 維歐幾里得空間 E_n 中的點集. $f_\nu \in \overline{B}_\alpha(M)$ $(\nu = 1, 2, \cdots, k)$. 設 $x \in M$, 則

$$x_\nu^* = f_\nu(x), \quad \nu = 1, 2, \cdots, k$$

決定 E_k 中之一點集 $M^* = \{(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_k^*)\}$. 若

$$F(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_k^*) \in B_\beta(M^*),$$

則 $F(f_1, f_2, \cdots, f_k) \in \overline{B_{\alpha+\beta}}(M)$.

證明 當 $\alpha = \beta = 0$ 時,定理顯然成立,今用超限歸納法完成定理的證明.

(i) 設 $\gamma < \alpha, \beta = 0$. 設定理當 γ, β 時成立. 要證它當 α, β $(\beta = 0)$時也成立. 由假設 $B^\alpha(M)$中有函數 $f_{\nu n}$ 適合

$$\lim_{n\to\infty} f_{\nu,n} = f_\nu \quad (\nu = 1, 2, \cdots, k).$$

因 $\beta = 0$,故由

$$F(f_1, f_2, \cdots, f_k) = \lim_{n\to\infty} F(f_{1n}, f_{2n}, \cdots, f_{kn}),$$

知 $F(f_1, f_2, \cdots, f_k) \in B_\alpha(M)$. 故定理對於 $\alpha, \beta = 0$ 時成立.

(ii) 設 $\delta < B$. 若定理對於任何 α 與 $F \in B_\delta(M^*)$ 時成立,則當 $B^\beta(M^*)$中有函數列 $\{F_n\}$ 收斂於F時,從

$$F_n(f_1, f_2, \cdots, f_k) \in \overline{B_{\alpha+\delta}} \quad (\delta < \beta)$$

得到

$$F(f_1, f_2, \cdots, f_k) \in \overline{B_{\alpha+\beta}}.$$

定理證畢.

2. 波雷耳的點集 設 M 是一點集. 對於M是閉的集,記其全體為 $\delta_1(M)$. 對於 M 是開的集,記其全體為 $\sigma_1(M)$. 又記

$$(M)_1 = \delta_1(M) + \sigma_1(M).$$

設序數 β_ν 小於序數 α, 若 $C_\nu \in \delta_{\beta_\nu}(\nu = 1, 2, \cdots)$,則稱和集

$$C_1 + C_2 + C_3 + \cdots$$

屬於 $\sigma_\alpha(M)$. 凡 $\sigma_\alpha(M)$中的集,都具有這種形式 ΣC_ν. 又設O_ν 為 $\sigma_{\beta\nu}(M)$中之集,稱通集 ΠO_ν 屬於$\delta_\alpha(M)$. $\delta_\alpha(M)$中的集都具有此

形式 ΠO_ν. 記

$$(M)_\alpha = \delta_\alpha(M) + \sigma_\alpha(M).$$

當 $\alpha \in Z(\aleph_0)$時,稱 $(M)_\alpha$ 中的任何點集,爲 M 上波賴耳(Borel)點集.

定理 1. 若 $B \in \delta_\alpha(M)$, 則 $M - B \in \sigma_\alpha(M)$. 又若 $B \in \sigma_\alpha(M)$, 則 $M - B \in \delta_\alpha(M)$.

證明 當 $\alpha = 1$ 時, 此定理已詳第三章 §2. 現在假設定理對於小於 α $(\alpha > 1)$之一切 β 成立, 當 $B \in \delta_\alpha(M)$時,

$$B = \Pi B_\nu, \quad B_\nu \in \sigma_{\beta_\nu}(M), \quad \beta_\nu < \alpha.$$

由 $M = \Pi B_\nu + \Sigma(M - B_\nu)$, 得 $M - B = \Sigma(M - B_\nu)$. 由假設

$$M - B_\nu \in \delta_{\beta_\nu}(M).$$

故 $M - B \in \sigma_\alpha(M)$. 同樣可證定理之後半. 定理證畢.

定理 2. (i) 若點集 $B_1, B_2, \cdots$ 皆屬於 $\sigma_\alpha(M)$, 則和集 ΣB_n 也屬於 $\sigma_\alpha(M)$.

(ii) 若點集 $B_1, B_2, \cdots$ 皆屬於 $\delta_\alpha(M)$, 則通集 ΠB_n 也屬於 $\delta_\alpha(M)$.

證明 當 $\alpha = 1$ 時, 這就是第三章 §2 的定理 5. 今設 $\alpha > 1$.

(i) 因 $B_\nu \in \sigma_\alpha(M)$, 故有 $\beta_{\nu n} < \alpha$, $B_{\nu n} \in \delta_{\beta_{\nu n}}(M)$, 適合

$$B_\nu = B_{\nu 1} + B_{\nu 2} + \cdots.$$

由是 $B_1 + B_2 + \cdots = \Sigma\Sigma B_{\nu n} \in \sigma_\alpha(M)$.

(ii) 因 $B_\nu \in \delta_\alpha(M)$, 故有 $B_{\nu n} \in \sigma_{\beta_{\nu n}}(M)$, $\beta_{\nu n} < \alpha$, 使

$$B_\nu = \Pi B_{\nu n}$$

因之. $\Pi B_\nu = \Pi\Pi B_{\nu n} \in \delta_\alpha(M)$. 證明完畢.

定理 3. (i) 若 k 個集 $B_1, B_2, \cdots, B_k$ 都屬於 $\sigma_\alpha(M)$, 則通集

$$B_1 B_2 \cdots B_k \in \sigma_\alpha(M).$$

(ii) 若 k 個集 $B_1, B_2, \cdots, B_k$ 都屬於 $\delta_\alpha(M)$, 則和集

$$B_1 + B_2 + \cdots + B_k \in \delta_\alpha(M).$$

證明 $\alpha = 1$ 時, 此即第三章 §2 的定理 3. 當 $\alpha > 1$ 時, 假設

$k=2$ 來證明好了. 設 $\alpha<\alpha'$ 時定理成立,用超限歸納法來完成定理的證明. 設

$$B_1=B_{11}+B_{12}+B_{13}+\cdots,\ B_{1n}\in\delta_{\beta_n}(M),\ \beta_n<\alpha';$$
$$B_2=B_{21}+B_{22}+B_{23}+\cdots,\ B_{2n}\in\delta_{\gamma_n}(M),\ \gamma_n<\alpha'.$$

則通集 $B_1B_2=\Sigma\Sigma B_{1n}B_{2m}$. 由定理 2 的(ii),

$$B_{1n}B_{2m}\in\delta_{\max(\beta_n,\gamma_n)}(M).$$

一切 $\max(\beta_n,\gamma_n)$ 都小於 α', 故必 $B_1B_2\in\sigma_{\alpha'}(M)$. 又由 B_1+ $+B_2+(M-B_1)(M-B_1)=M$,知(ii)爲眞. 證明完畢.

定理 4. (i) 若 $B\in\sigma_\alpha(M),C\in\delta_\alpha(M),B\supset C$, 則 $B-C\in\sigma_\alpha(M)$.

(ii) 若 $B\in\delta_\alpha(M),C\in\sigma_\alpha(M),B\supset C$, 則 $B-C\in\delta_\alpha(M)$.

證明 關係 $B=C+(B-C)$可以寫做 $B-C=B(M-$ $-C)$. 在(i)的假設下,B和 $M-C$ 皆屬於 $\sigma_\alpha(M)$. 由定理 3 的(i) $B-C$屬於$\sigma_\alpha(M)$. 在(ii)的假設下, B 與 $M-C$ 皆屬於 $\delta_\alpha(M)$, 故由定理 3 的(ii), $B-C$ 屬於 $\delta_\alpha(M)$. 定理證畢.

定理 5. 設 $C\subseteq B\subseteq A$. 若 $C\in\delta_\alpha(B)$ $(\sigma_\alpha(B))$, 則必有如下的點集 E

$$E\in\delta_\alpha(A)\quad(\sigma_\alpha(A)),\ C=EB.$$

證明 當 $\alpha=1$ 時,證明同第三章 §3 的定理 8 與定理 9 的證明. 今用超限歸納法完成本定理的證明. 假設定理當小於 α 的任何序數時成立,那末

$$C=C_1C_2C_3\cdots,\ C_\nu\in\sigma_{\alpha_\nu}(B),\quad \alpha_\nu<\alpha;$$
$$C_\nu=E_\nu B,\ E_\nu\in\sigma_{\alpha_\nu}(A),\quad(\nu=1,2,\cdots).$$

由是 $C=B\cdot E_1E_2E_3,\cdots$. 置 $E=E_1E_2,\cdots$, 則 $E\in\delta_\alpha(A)$, $C=BE$. 證明完畢.

定理 6. 若 $C\in\sigma_\alpha(B),B\in\sigma_\alpha(A)$, 則 $C\in\sigma_\alpha(A)$. 簡單地說: σ_α 具有傳遞性. δ_α 也有傳遞性.

證明　由定理 5,有 E 適合於 $C = EB$, $E \in \sigma_\alpha(A)$. 又由假設 $B \in \sigma_\alpha(A)$,故由定理 3, C 也屬於 $\sigma_\alpha(A)$. 證明完畢.

定理 7.　設 B_n 屬於 $(M)_{\alpha_n}$, $\alpha_n < \alpha$, 則 $\Sigma B_n \in \sigma_\alpha(M)$, $\Pi B_n \in \delta_\alpha(M)$.

證明　因 $B_n \in (M)_{\alpha_n} = \sigma_{\alpha_n} + \delta_{\alpha_n}$, 故必 $B_n \in \sigma^\alpha \cdot \delta^\alpha$. 因之 $\Sigma B_n \in \sigma_\alpha$, $\Pi B_n \in \delta_\alpha$; 此由於定理 2. **定理證畢.**

3. 波雷耳點集與裴勒函數　設 $B \subseteq M$, $p > 0$. 若

$$f(x) = p(x \in B),\ f(x) = 0\ (x \in M - B),$$

則名 f 關於 M, 是 B 上具有特徵 p 的函數,簡言之: f 在 B 上具有特徵 p.

定理 1.　若 $B \in (M)_\alpha$, 則在 B 上具有特徵 p $(p > 0)$ 的函數 f 必屬於 $\overline{B}_\alpha(M)$. 詳細地說:

(i)　若 $B \in \delta_\alpha(M)$, 則對於 B 上之特徵函數 f, 必有收斂於 f 的函數列 f_n 如下:

$$f_n \in B_\alpha(M);\quad f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x)$$
$$(x \in B,\ x = 1, 2, \cdots);$$

(ii)　若 $B \in \sigma(M)_\alpha$, 則對於 B 上之特徵函數 f, 必有單調增加的函數列 $\{f_n\}$ 收斂於 f, 且 $f_n \in B_\alpha(M)$.

證明　此定理可用超限歸納法證明. 先證(ii). 設 $B \in \sigma_1(M)$, 則當 $c \geqslant p$ 時, $M(f(x) > c)$ 是一空集.

若 $p > c \geqslant 0$, 則 $M(f > c) = B$. 又若 $c < 0$, 則 $M(f > c) = M$. 點集 B, M 和空集都對於 M 是開的,所以點集

$$M(f(x) > c)$$

對於 M 一定是開的. 由第四章 §6 定理 2_2, f 是一下半連續函數. 由第四章 §6 的定理 4,有增加連續數列收斂於 f.

其次,假設 (ii) 對於一切小於 α 之序數 β 成立. 若 B 屬於 $\sigma_\alpha(M)$, 則

$$B = B_1 + B_2 + \cdots,\ B_n \in (M)_{\alpha_n},\ \alpha_n < \alpha.$$

故和集 $B_1 + B_2 + \cdots + B_n = S_n \in (M)_{\beta_n}$, $\beta_n < \alpha$(前節定理 7). 由假設 S_n 之 p 特徵函數 f_n 屬於 $\bar{B}_{\beta_n}(M)$, $\beta_n < \alpha$. 從

$$f_1 \leqslant f_2 \leqslant \cdots, f_n \to f$$

知道 $f \in \bar{B}_\alpha(M)$.

同樣可證(i). 定理證畢.

定理 2. 若 $B \in \sigma_{\alpha+1}(M)$ $(\alpha > 0)$,則有附級不超過 α 之函數 f 使在 B 上取正的值,在 $M-B$ 上 $f = 0$.

證明 因 $B \in \sigma_{\alpha+1}(M)$, 故 B 可分解為

$$B = B_1 + B_2 + B_3 + \cdots, \ B_n \in \delta_\alpha(M).$$

作函數 f_n: 在B_n上, $f_n = \dfrac{1}{2^n}$; 在 $M - B_n$ 上, $f_n = 0$. 由定理 1, f_n 之附級決不超過 α. 置

$$f_1 + f_2 + f_3 + \cdots = f,$$

此級數在 M 上均匀收斂. 由 §1 的定理 8, $f \in \bar{B}_\alpha(M)$. 又

$$\text{當 } x \in B \text{ 時}, \ x \in B_n, \ f_n(x) = \frac{1}{2^n} > 0, \ f(x) > 0;$$

$$\text{當 } x \in M - B \text{ 時}, f_n(x) = 0, f(x) = 0.$$

定理證畢.

在第四章證明了如下的定理: f 在 M 上為連續的充要條件是對於任何 c, 點集 $M(f < c)$與$M(f > c)$在 M 中都是開的. 換句話說:連續的條件是

$$M(f < c) \in \sigma_1(M), \ M(f > c) \in \sigma_1(M).$$

今用超限歸納法,將此定理拓廣.

定理 3. 若 $f \in \bar{B}_\alpha(M)$, 則 $M(f > c)$ 與 $M(f < c)$ 皆屬於 $\sigma_{\alpha+1}(M)$.

證明 假設定理對小於 α 之一切序數成立. 因 $f \in \bar{B}_\alpha(M)$, 故有 $f_n \in B^\alpha(M)$ 適合

$$\lim f_n = f.$$

設 $f_k, f_{k+1}, \cdots$ 之上界函數為 G_k，則因 $f = \overline{\lim} f_n$，f 也是 $\{G_k\}$ 的極限函數.

因 $M(G_k > c) = M(f_k > c) + A(f_{k+1} > c) + \cdots$，故由假設，知

$$M(f_\nu > c) \in \sigma_\alpha(M).$$

因此 $M(G_k > c) \in \sigma_\alpha(M)$. 然 $M(G_k \geqslant c) = M(G_k > c-1)\cdot \cdot M\left(G_k > c - \frac{1}{2}\right)\cdots$，故

$$M(G_k \geqslant c) \in \delta_{\alpha+1}(M).$$

從 $M(f \geqslant c) = M(G_1 \geqslant c) \cdot M(G_2 \geqslant c) \cdots$ 知道 $M(f \geqslant c) \in \delta_{\alpha+1} \times \times (M)$. 因此

$$M(f < c) = M - M(f \geqslant c) \in \sigma_{\alpha+1}(M).$$

又 $M(f > c) = M(-f < -c) \in \sigma_{\alpha+1}(M)$. 定理證畢.

此定理之逆也成定理:

定理 4. 對於任何 c，假如 $M(f > c)$ 和 $M(f < c)$ 都屬於 $\sigma_{\alpha+1}(M)$，那末 $f \in \overline{B}_\alpha(M)$.

證明 當證明時，我們可以假設 $-1 \leqslant f \leqslant 1$. 將 $[-1, 1]$ 等分為 $2k$ 個小區間，分點為

$$a_i = \frac{i}{k} - 1 \quad (i = 0, 1, \cdots, 2k).$$

在點集 B 上取正値，在其餘的點取 0 的函數，簡稱為 B 上的正値函數. $B_\beta(M)$ $(\beta \leqslant \alpha)$ 中必有在點集 $M(f > a_{i-1})$ 上有正値函數函數 φ_i 屬於 $\overline{B}_\alpha(M)$ (定理 2). 又在點集 $M(f < a_i)$ 上有正値函數 ψ_i 屬於 $\overline{B}_\alpha(M)$. 那末

$$F_i = \frac{\varphi_i}{\varphi_i + \psi_i} \in \overline{B}_\alpha(M).$$

若 $x \in M(f \leqslant a_{i-1})$，則 $F_i(x) = 0$；若 $x \in M(a_{i-1} < f < a_i)$，則 $F_i(x)$ 小於 1 而大於 0；又若 $x \in M(f \geqslant a_i)$，則 $F_i(x) = 1$. 作函數

$$f_k = \frac{1}{k}(F_1 + F_2 + \cdots + F_{2k}) - 1,$$

則 $f_k \in \bar{B}_\alpha(M)$. 當 $x \in M(a_{i-1} \leqslant f \leqslant a_i)$時, $F_1(x) = F_2(x) = = \cdots = F_{i-1}(x) = 1$, $F_i(x)$在 0 與 1 之間,而

$$F_{i+1}(x) = F_{i+2}(x) = \cdots = F_{2k}(x) = 0.$$

故得 $f_k(x) = \dfrac{i-1+\varepsilon}{k} - 1 = a_{i-1} + \dfrac{\varepsilon}{k}$,此地 $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$. 由是

$$|f(x) - f_k(x)| < \frac{1}{k}.$$

因此函數列 $f_k(x)(k = 1, 2, \cdots)$均勻收斂於 $f(x)$.故 $f \in \bar{B}_\alpha(M)$. 定理證畢.

由定理 3 與定理 4,得勒貝格的定理:函數 f 屬於 $\bar{B}_\alpha(M)$的充要條件是一切點集

$$M(f > c) \text{ 與 } M(f < c)$$

都屬於 $\sigma_{\alpha+1}(M)$.

定理 5. *f 在 M 上成一裴勒函數的充要條件是一切點集 $M(f > c)$ 都成波雷耳集.*

證明 由定理 3,知道條件是必要的. 今設一切點集$M(f>c)$都是波雷耳集,要證 f 是一裴勒函數. 設

$$r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots$$

是有理數的全體. 由於 $M(f > r_n)$都是波雷耳集,所以他們都屬於某一$(M)_\alpha$. 設 c 是一實數,則必有 $\{r_{n_\nu}\}$ 適合

$$r_{n_\nu} \to c, \quad r_{n_\nu} < r_{n_{\nu+1}}.$$

因 $M(f > c) = \Pi M(f > r_{n_\nu})$, 故$M(f \geqslant c) \in \delta_{\alpha+1}(M)$. 由是

$$M(f > c) = \sum_1^\infty \left(f \geqslant c + \frac{1}{n}\right) \in \sigma_{\alpha+2}(M),$$

$$M(f < c) = M - M(f \geqslant c) \in \sigma_{\alpha+1}(M).$$

由定理 4, $f \in \bar{B}_{\alpha+1}(M)$. 定理證畢.

定理 6. *設在 M 上所定義之函數 f ,其函數值限於數列 $\{c_n\}$*

中之數. 若 $f \in \bar{B}_\alpha(M)$ 則一切點集.

$$M(f = c_1), \quad M(f = c_2), \cdots$$

皆屬於 $\sigma_{\alpha+1}(M)$; 其逆亦眞.

證明 這是定理 3 與定理 4 的特別情形. 證明完畢.

例 設 $0 < x < 1$, $x = 0.a_1a_2a_3\cdots$ 是十進位小數, 當

$$a_n < 9, \ a_{n+p} = 9 \ (p = 1, 2, \cdots)$$

時, 記 $x = 0. a_1a_2\cdots a_{n-1}(a_n + 1), a_{n+2} = \cdots 0$. 此時

$$a_n(x) \quad (0 < x < 1)$$

是 x 之一函數. 今證 $a_n(x)$ 是 1 級的函數. 適合方程 $a_n(x) = 2$ 的 x 之集, 是區間

$$[0, a_1a_2\cdots a_{n-1}2, \quad 0, a_1a_2\cdots a_{n-1}3)$$

的和; $a_1, \cdots, a_{n-1}$ 取一切 $0, 1, 2, \cdots, 9$ 的值. 置 $M = (0 < x < 1)$, 則

$$(a_n(x) = 2) \in \sigma_2(M).$$

同樣 $(a_n(x) = 3), \cdots, (a_n(x) = 9)$ 皆屬於 $\sigma_2(M)$. 最後之點集 $(a_n(x) = 9)$ 是區間

$$\left[0, a_1a_2\cdots a_{n-1}9, 0, a_1a_2\cdots a_{n-1} + \frac{1}{10^{n-1}}\right)$$

的和. 由定理 6, 知 $a_n(x)$ 是一級的函數.

定理 7. 在區間 $[0,1]$ 上必有階級不高於 1 的函數列 $\{u_n(x)\}$ 具有如下的性質: 對於適合條件 $0 \leqslant s_n < 1$ 的任一數列 $\{s_n\}$, $[0, 1]$ 中必有一點 x_0 使 $s_n = u_n(x_0) \quad (n = 1, 2, \cdots)$.

證明 利用上述之函數 $a_n = a_n(x)$, 作函數列

$$u_1(x) = 0, a_1a_3a_5\cdots\cdots,$$

$$u_2(x) = 0, a_2a_6a_{10}\cdots\cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_{n+1}(x) = 0, a_{2^n}a_{3\cdot 2^n}\cdots\cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

設 $s_\nu = 0.\ \alpha_{\nu_1}\alpha_{\nu_2}\cdots$. 置 $\alpha_{\nu_k} = a_{2^{\nu-1}(2k-1)}$, $a_{2^{\nu-1}(2k-1)}$, $x_0 = 0$, a_1a_2, $\cdots$,即得所要之結果. 定理證畢.

利用定理 3 與定理 4. 可以證明

定理 8. (裴勒的定理). $f \in \overline{B}_1(M)$ 之充要條件爲: f 在通集 $C \cdot M$ 中常爲概連續,但 C 表示任一閉集.

證明從略.

4. 通用的連續函數列 設 $f(x)$在閉區間$[0, 1]$上是一有界連續函數, 其上界爲 S, 下界爲 I. 對於 $\varepsilon > 0$, 取正整數 k 甚大,當 $|x - x'| \leqslant \frac{1}{k}$時,可使

$$|f(x') - f(x)| < \frac{\varepsilon}{5}.$$

對於整數 $\nu(= 0, 1, \cdots, k)$,取有理數 r_ν 使

$$0 < \left| f\left(\frac{\nu}{k}\right) - r_\nu \right| < \frac{\varepsilon}{5}.$$

作折綫函數

$$h(x) = r_\nu + (r_{\nu+1} - r_\nu)(kx - \nu)$$

$$(\nu \leqslant kx \leqslant \nu + 1, \nu = 0, 1, \cdots, k + 1).$$

則在區間 $\nu \leqslant kx \leqslant \nu + 1$ 上,成立着

$$|f(x) - h(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \left| f(x) - f\left(\frac{\nu}{k}\right)\right| + \left| f\left(\frac{\nu}{k}\right) - h\left(\frac{\nu}{k}\right)\right| + \left| h\left(\frac{\nu}{k}\right) - h(x) \right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{5} + \left| f\left(\frac{\nu}{k}\right) - r_\nu \right| + |(r_{\nu+1} - r_\nu)(k_{x-\nu})| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + |r_{\nu+1} - r_\nu|.$$

最後的項小於 $\left| f\left(\frac{\nu+1}{k}\right) - f\left(\frac{\nu}{k}\right) \right| + \frac{2}{5}\varepsilon < \frac{3}{5}\varepsilon$. 因此在 $[0, 1]$ 中 $|f(x) - h(x)| < \varepsilon$. 取 $|r_k| < \left| f\left(\frac{\nu}{k}\right) \right|$,則 $h(x)$又滿足

$$I \leqslant h(x) \leqslant S.$$

此種折綫函數 $h(x)$ 由其'頂點'之值 $r_0, r_1, \cdots, r_k$ 決定．有理點

$$\{(r_0, r_1, \cdots, r_k)\}$$

爲一可列集，一切 $h(x)$ 也成一可列集．給 k 以 1, 2, 3, …，又給 ε 以 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots$，得一函數列

$$h_1(x), h_2(x), h_3(x), \cdots.$$

對於連續函數 $f(x)$，正數 ε 及正整數 N，$\{h_n(x)\}$ 中必有 $h_n(x)$ 適合

$$|h_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad n > N.$$

因此，我們可述下面的

定理 1. 對於 [0, 1] 中任一連續函數 $f(x)$，$\{h_n(x)\}$ 中有一子函數列 $\{h_{n_\nu}(x)\}$ 均匀收斂於 $f(x)$．若 $I \leqslant f(x) \leqslant S$，則可取 $h_{n_\nu}(x)$ 適合

$$I \leqslant h_{n_\nu}(x) \leqslant S.$$

定理 2. 區間 [0, 1] 上有如下的連續函數列 $\{h_n(x)\}$：在 [0, 1] 上，若函數 $f(x)$ 的階級不過 1，則有子函數列 $\{h_{n_\nu}(x)\}$ 收斂於 $f(x)$．

證明 因 $f(x)$ 的階級不過 1，故有連續函數列 $\{f_\nu(x)\}$ 收斂於 $f(x)$．由定理 1，有 $h_{n_\nu}(x)$ 適合

$$-\frac{1}{2\nu} < f_\nu(x) - h_{n_\nu}(x) < \frac{1}{2\nu}.$$

由是，$h_{n_\nu}(x) \to f(x)$．證明完畢．

關於匀迫的理論，最初瓦也司脫拉斯有如下的定理：

定理 3. 設 $f(x)$ 是在 $[a, b]$ 中之一有界連續函數，則必有多項式列匀斂於 $f(x)$．

證明 置 $\varphi_\nu(x) = \left|x - \frac{\nu}{k}\right| + \left(x - \frac{\nu}{k}\right)$，則當 $x < \frac{\nu}{k}$ 時，

$\varphi_\nu(x)$等於 0; $x > \frac{\nu}{k}$ 時, $\varphi_\nu(x) = 2x - \frac{2\nu}{k}$, 故若 $a_0, \cdots, a_{k-1}$ 都是常數,則

$$\varphi(x) = a_0 + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_{k-1}\varphi_{k-1}(x)$$
$$(0 \leqslant x \leqslant 1)$$

是一折綫函數. 當 $\nu < kx < \nu + 1$ 時, $\varphi(x)$ 等於 $a_0 + 2a_1 \times \times \left(x - \frac{1}{k}\right) + \cdots + 2a_\nu\left(x - \frac{\nu}{k}\right)$ 取適當之 $a_0, a_1, \cdots$ 可使 $\varphi(x)$ 在頂點之值爲

$$r_j = a_0 + 2a_1\left(\frac{j}{k} - \frac{1}{k}\right) + \cdots + 2a_\nu\left(\frac{j}{k} - \frac{j_\nu}{k}\right)$$
$$(j = 0, 1, 2, \cdots, k).$$

如是, $h(x)$ 與 $\varphi(x)$相同:

$$h(x) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{k-1} a_\nu\varphi_\nu(x).$$

利用此關係,我們可以證明:對於 $\varepsilon > 0$,有多項式 $P(x)$適合

$$|h(x) - P(x)| < \varepsilon \quad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

這種 $P(x)$ 的存在, 就證明了定理 3. 因 $\varphi_\nu(x) = \left|x - \frac{\nu}{x}\right| + \left(x - \frac{\nu}{x}\right)$ 中的末項是一多項式,所以證明有多項式 $P(x)$適合

$$\left||x - \frac{\nu}{k}| - P(x)\right| < \varepsilon \quad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

好了. 置 $t = x - \frac{\nu}{k}$,在區間$\left[-\frac{\nu}{k}, 1 - \frac{\nu}{k}\right]$中, 證有多項式 $P(t)$ 適合

$$\left||t| - P(t)\right| < \varepsilon$$

好了, 當 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 時, 級數 $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2.4}x^2 - \frac{1.3}{2.4.6}x^3 - \cdots$ 均匀收斂. 設 $S_n(t)$是這個級數的開始 n 項之和. 當

n 甚大時，可使當 $-\frac{k-1}{k}\leqslant t\leqslant\frac{k-1}{k}$ 時，

$$\Big|\,|t|-S_n(t)\Big|<\varepsilon.$$

置 $P(t)=S_n(t)$，即得所要之結果.

設 $f(x)$為$[0,1]$中之一連續函數. 對於正整數 ν，有折綫函數 $h(x)$適合

$$|f(x)-h(x)|<\frac{1}{2\nu}\quad(0\leqslant x\leqslant 1).$$

又有多項式 $P_\nu(x)$ 適合 $|h(x)-P_\nu(x)|<\frac{1}{2\nu}$。 由是

$$|f(x)-P_\nu(x)|<\frac{1}{\nu}\quad(0\leqslant x\leqslant 1).$$

故當 $n\to\infty$ 時，$P_n(x)$均匀收斂於 $f(x)$. 置 $t=\frac{x-a}{b-a}$. 知定理在一般的有限區間$[a,b]$上成立. 定理證畢.

利用數學歸納法，定理 3 可以推廣到 n 個變數的連續函數.

5. **存在定理**　函數的定義域 M 爲可列點集時，M 上的不連續函數，其階級决不會超過 1；這個事實已在上文說明. 假如 M 是一不可列的點集，那末當 $\alpha>1$ 時 α 級之函數是否存在? 今設 M 是區間$[0,1]$，要證 $(M)_\alpha$ 不是空集. 先證

定理 1.　設 $\alpha\in Z(\aleph_0)$，$M=[0,1]$，則正方形

$$Q:\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant t\leqslant 1$$

上必有裴勒函數 $\varphi(x,t)$ 具有如下的性質：當 $\beta<\alpha$，$f(x)\in B^\alpha\times\times(M)$時，區間 $[0,1]$ 中必有適當之數 t_0 適合 $f(x)=\varphi(x,t_0)$.

證明　利用超限歸納法證明此定理.

先設 $\alpha=1$ 而利用前節的連續函數列：$h_1(x),h_2(x),\cdots$. 置

$$H_\nu(x,t)\equiv h_\nu(x),\quad (x,t)\in Q;$$

$$g_\nu\left(x,\frac{1}{\nu}\right)=1,\quad g_\nu(x,t)=0\quad\left(t\neq\frac{1}{\nu}\right);$$

$$\psi(x,t) = \sum_1^{\infty} g_\nu(x,t) H_\nu(x,t).$$

設 N 表示自然數列 1, 2, 3, ⋯ 的子數列 $\nu_1, \nu_2, \cdots$ 之全體,則閉區間[0, 1]中的數 t 與 N 中之數列 $\{\nu_n\}$ 成一一對應.

$$\varphi\left(x, \frac{1}{\nu}\right) = \psi\left(x, \frac{1}{\nu}\right).$$

對於[0, 1]上之連續函數 $f(x)$, 必有子列 $h_{\nu n}(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 均勻收斂於 $f(x)$。若 $\{\nu_n\}$ 對應於 $t_0, 0 \leqslant t_0 \leqslant 1$, 則令

$$\varphi(x, t_0) = \lim \psi\left(x, \frac{1}{\nu_n}\right).$$

此時

$$\psi\left(x, \frac{1}{\nu_n}\right) = H_\nu\left(x, \frac{1}{\nu_n}\right) = h_{\nu n}(x) \to f(x)$$

故 $\varphi(x,t_0) = f(x)$.

次設 α 爲一孤立序數, 此時 $\alpha - 1$ 也是序數. 假如當序數 $\alpha - 1$ 時定理 1 成立, 則有裴勒函數 $\psi(x,t)$, 當 $f(x) \in B^{\alpha-1}(M)$ 時, [0, 1] 中有 t 適合

$$\psi(x,t) = f(x).$$

利用 §3 定理 7 中之函數列 $u_n(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, 作函數

$$\varphi(x,t) = \overline{\lim_{\nu\to\infty}} \psi(x, u_\nu(t)).$$

若 $f(x) \in B^\alpha(M)$, 則有 $\{f_n(x)\}$ 如下:

$$f_n(x) \to f(x), f_n(x) \in B^{\alpha-1}(M).$$

取適當之數列 $\{s_n\}$, $0 \leqslant s_n \leqslant 1$, 可得 $f_n(x) = \psi(x, s_n)$, 取適當之數 t_0 可使 $s_n = u_n(t_0)$. 如是,從

$$\begin{aligned} f_n(x) = \psi(x, u_n(t_0)) \varphi(x,t_0) &= \overline{\lim} \psi(x, u_n(t_0)) \\ &= \lim f_n(x) = f(x) \end{aligned}$$

知道定理當序數 α 時也成立,因此當 $\beta \leqslant \alpha$ 時都成立.

最後,設 α 爲一極限序數,則有遞增的序數列$\{\beta_n\}$適合 $\beta_n \to \alpha$. 假設定理當一切 β_ν 時成立, 則對於 ν 有如下的裴勒函數 $\varphi_\nu(x,t)$:

當 $f(x)\in B^{\beta_\nu}(M)$時，有 t_0 適合

$$0\leqslant t_0\leqslant 1,\quad f(x)=\varphi_\nu(x,t_0).$$

設 $(a_1,b_1),(a_2,b_2),\cdots$ 是 $(0,1)$ 中不相重疊的可列個區間，函數 $\varphi_\nu\left(x,\dfrac{t-a_\nu}{b_\nu-a_\nu}\right)$ 在矩形

$$R_\nu:\ 0\leqslant x\leqslant 1,\quad a_\nu\leqslant t<b_\nu$$

上是裴勒函數．又作裴勒函數 $\psi_\nu(x,t)$：

$$\psi_\nu(x,t)=\begin{cases}0\ ((x,t)\in Q-R_\nu),\\ \varphi_\nu\left(x,\dfrac{t-a_\nu}{b_\nu-a_\nu}\right)\quad((x,t)\in R_\nu).\end{cases}$$

易知 $\psi_\nu(x,t)$ 在 Q 上是一裴勒函數．又設

$$\begin{aligned}Q_\nu(x,t)&=0\quad((x,t)\in Q-R_\nu),\\&=1\quad((x,t)\in R_\nu).\end{aligned}$$

$Q_\nu(x,t)$ 在 Q 上也是裴勒函數．所以

$$\varphi(x,t)=\sum_{\nu=1}^{\infty}Q_\nu(x,t),\ \psi_\nu(x,t)$$

在 Q 上是一裴勒函數．若 $f(x)$ 之階級 β 低於 α，則 β 必小於某一 β_ν．取適當之 t_1，$f(x)$ 等於 $\varphi_\nu(x,t_1)$．置

$$\frac{t_0-a_\nu}{b_\nu-a_\nu}=t_1,$$

則得 $\varphi(x,t_0)=\psi_\nu(x,t_0)=\varphi_\nu(x,t_1)=f(x)$，定理證畢．

定理 2. 設 $M=[0,1]$；$\alpha\in Z(\aleph_0)$，那末 $B_\alpha(M)$ 中必有函數存在(不是空集)．

證明 對於 α 有裴勒函數 $\varphi(x,t)$ 如定理 1 所述，作 $f(x)$ 如下：

(1) $\varphi(x,x)\neq 0$ 時，$f(x)=0$，

(2) $\varphi(x,x)=0$ 時，$f(x)=1$．

適合 (1)，(2) 的點集 M_1, M_2 都是波雷耳集，所以 $f(x)$ 在 M 上是

一裴勒函數．假如 $f(x)$ 的階級小於 α，則必有 t_0 適合

$$\varphi(x, t_0) = f(x) \quad (0 \leqslant t_0 < 1).$$

由是 $f(t_0) = \varphi(t_0, t_0)$，此有背於 (1) 與 (2)． 所以 $f(x)$ 的階級不低於 α．因之 $B_\alpha(M)$ 决不是空集．證明完畢．

第五章 習 題

1. 設 $B \in \delta_\alpha(M)$． 函數 $f(x)$在 B 上等於 1，在其他的點其值爲 0．證明在 M 上有級小於 α 的單調減少函數列收斂於 $f(x)$．

2. 當 $f(x) \in \bar{B}_\alpha(M)$ 時，點集 $M(f(x) > c)$ 屬於 $\sigma_{\alpha+1}(M)$．

3. 證明 [0, 1] 中存在着連續函數列 $\chi_1(t), \chi_2(t), \cdots$： 當 $f(t)$ 在 [0, 1] 中是連續時——可能不是有界——$\{\chi_n(t)\}$ 有子函數列 $\{\chi_{n_\nu}(t)\}$ 勻斂於 $f(t)$．

4. 設 $f(x, y)$ 是正方形 $0 \leqslant x \leqslant 1$，$0 \leqslant y \leqslant 1$ 上的連續函數，則對於 $\varepsilon > 0$，必有 x 與 y 的多項式 $P(x, y)$ 滿足

$$|f(x, y) - P(x, y)| < \varepsilon.$$

第六章

微　分

1. 導數　設 M 是直綫 X 上之一點集，$f(x)$ 的定義區是 M，固定 M 中之一點 ξ，設 $x \in M$，$x \neq \xi$，函數

$$f(x, \xi) = \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$$

的定義區是 M 除去 ξ. 當 $x \to \xi + 0$ 時，$f(x, \xi)$可能有種種極限值，記這些極限值的全體爲 $Y_+(\xi)$，假如 $f(x)$ 在 ξ 的右方環境中無意義，則 Y_+ 是一空集，假如 $Y_+(\xi)$不是空集，那末稱 $Y_+(\xi)$中之任一數爲 $f(x)$ 在 ξ 右方之一導數，稱 $Y_+(\xi)$ 的上界（下界）爲 $f(x)$在點 ξ 右上(下)導數. 記號

$$D^+f(x) \text{ 與 } D_+f(x)$$

表示 $f(x)$在點 x 右上導數和右下導數，假如兩者相等：

$$D^+f(x) = D_+f(x)$$

那末 $Y_+(\xi)$僅含一个數，以 $f'_+(x)$記此數，稱之爲 $f(x)$在點 x 的右方是可導的，它具有唯一的右方導數 $f'_+(x)$. 同樣

$$D^-f(x),\ D_-f(x),\ f'_-(x)$$

表示左方的導數. 假如 $f'_+(x)$與 $f'_-(x)$都存在且相等，那末稱函數 $f(x)$在點 x 是可導的，它具有唯一的導數

$$f'(x) = f'_+(x) = f'_-(x).$$

此時又稱函數 $f(x)$在點 x 可以微分；導數 $f'(x)$爲 $f(x)$在點 x 的微分係數. 此時寫

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) = \frac{df(x)}{dx}.$$

假如區間 $[a, b]$ 上的函數 $f(x)$，在開區間 (a, b) 中存在着導數

$f'(x)$，並且 $f'_+(a)$ 和 $f'_-(b)$ 皆存在，則稱 $f(x)$ 在閉區間上可以微分，簡寫

$$f'_+(a) = f'(a), f'_-(b) = f'(b).$$

此時名 $f'(x)$ 爲 $f(x)$ 之導函數.

假如 $f'(x_0)$ 是一有限數，那末 x_0 是 $f(x)$ 之一連續點. 然在 $f(x)$ 的不連續點 x_0，$f'(x_0)$ 可能存在而为 $+\infty$ 或 $-\infty$. 例如

$$f(0) = 0, f(x) = 1 + \sqrt{x} \quad (x > 0),$$
$$f(x) = -\sqrt{-x} \quad (x < 0),$$

則當 $x > 0$ 時，

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{x} + 1}{x} \to +\infty \, (x \to 0),$$

所以 $f'_+(0) = +\infty$. 又當 $x < 0$ 時，

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{-\sqrt{-x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{-x}} \to +\infty \, (x \to 0),$$

所以 $f'_-(0) = +\infty$. 因此 $f'(0) = +\infty$.

函數之連續點，未必是它的可以微分的點. 例如函數

$$f(0) = 0, f(x) = x \sin\frac{1}{x} \, (x \neq 0)$$

在 $x = 0$ 是連續的，但是當 $x \to 0$ 時，

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \sin\frac{1}{x}$$

並無極限，所以 $f'(0)$ 不存在. 事實上在 $x = 0$ 的導數的全部成一閉區間 $[-1, 1]$.

函數具有導函數時，其導函數未必是連續函數. 例如

$$f(0) = 0, f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x} \, (x \neq 0).$$

$f'(0) = 0, f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$. 導數 $f'(x)$ 雖處處存在，然在 $x = 0$，導函數有一不連續點.

定理 1. 設 $f(x)$ 在點 x_1 取極大值，在點 x_2 取極小值，那末

$$D^+f(x_1) \leqslant 0 \leqslant D_-f(x_1),\ D^-f(x_2) \leqslant 0 \leqslant D_+f(x_2).$$

證明　取正數 h 甚小，則

$$f(x_1+h, x_1) \leqslant 0,\ f(x_1-h, x_1) \geqslant 0,$$

$$f(x_2+h, x_2) \geqslant 0,\ f(x_2-h, x_2) \leqslant 0.$$

令 $h \to 0$，即得所要的結果.

系　若 $f(x)$ 在 (a, b) 可以微分；則在取極大值或極小值之點 x_0，導數 $f'(x_0)$ 必等於 0.

定理 2. 若 $D^+f(x_0) < 0 < D_-f(x_0)$，則 $f(x)$ 在點 x_0，取極大值. 若 $D^-f(x') < 0 < D_+f(x')$，則 $f(x)$ 在點 x' 取極小值.

證明　取正數 h 甚小，由假設得

$$f(x_0+h, x_0) < 0 < f(x_0-h, x_0),$$

$$f(x'-h, x') < 0 < f(x'+h, x').$$

由是即得

$$f(x_0 \pm h) < f(x_0),\ f(x' \pm h) > f(x').$$

證明完畢.

定理 3. 區間 (a, b) 上所定義之函數 $f(x)$，極大值點和極小值點的全部，成一可列點集.

證明　設 $f(x)$ 在 (a, b) 中取極大值之點，成一點集 E_1，設 $x' \in E_1$，取適當之有理數 $a_{x'}$ 與 $b_{x'}$，可使

$$f(x) < f(x'),\ a_{x'} < x < b_{x'}$$

若 $x'' \in E_1$，$x' \neq x''$，則 $(a_{x'} \cdot b_{x'})$ 與 $(a_{x''} \cdot b_{x''})$ 不會一致. 有理點爲兩端之區間，其全體成一可列集 I，而

$$\{(a_x \cdot b_x)\}\ (x \in E_1)$$

爲 I 之一子集，也是可列的，所以 E_1 是可列的. 由是可知 $f(x)$ 在 (a, b) 中取極小值之點，也成一可列點集 E_2，所以 $E_1 + E_2$ 是可列的. 定理證畢.

由定理 3，可以導出導函數之一性質.

定理 4. 設 $f(x)$ 之定義區是(a, b). 兩關係

$$D^+f(x) \geqslant D_-f(x) \text{ 與 } D^-f(x) \geqslant D_+f(x)$$

不能同時成立之點 x, 成一可列點集[1].

證明 設 $r_1, r_2, \cdots$ 是有理數的全體,又設 M 是關係

$$D^+f(x) \geqslant D_-f(x)$$

不成立之點 x 的全體,若 $x \in M$, 則必有 r_n 適合

$$D^+f(x) < r_n < D_-f(x). \tag{1}$$

置 $f_n(x) = f(x) - r_n x$ 則因 $D^+f_n(x) = D^+f(x) - r_n$, $D_-f_n(x) = = D_-f(x) - r_n$, 得

$$D^+f_n(x) < 0 < D_-f_n(x).$$

故由定理 2,在點 x, $f_n(x)$取極大值. 記適合(1)之點 x 之全體爲 M_n,則由定理 3, M_n 是一可列點集. 故 $\Sigma M_n = M$ 是一可列點集, 同樣可證關係 $D_-f(x) \geqslant D_+f(x)$不成立之點成一可列點集. 定理證畢.

2. 中值定理及其應用

中值定理 在閉區間$[a, b]$上之連續函數 $f(x)$, 假如在開區間(a, b)中處處可以微分,則開區間(a, b)中必有點 ξ 適合

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(\xi).$$

證明 證明之前, 應該注意的, 有兩事: 第一, $f'(x)$可以爲 $+\infty$ 或 $-\infty$;第二,導函數 $f'(x)$可以不必在$[a, b]$爲連續.

當證明時,我們不妨假設 $f(x)$非爲一次函數 $Ax + B$. 置

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

設連續函數 $\varphi(x)$在點 x' 取最大值,在點 x'' 取最小值. 由於

$$\varphi(a) = \varphi(b) = 0,$$

且 $f(x) \neq Ax + B$. 故 x', x'' 兩點中至少有一點屬於(a, b). 設 $a < x' < b$, $h > 0$,則

---

1) 楊格 (G. C. Young) 的定理.

$$\frac{\varphi(x'+h)-\varphi(x')}{h}\leqslant 0,\ \frac{\varphi(x'-h)-\varphi(x')}{-h}\geqslant 0.$$

令 $h\to 0$，得 $\varphi'(x')=0$. 由是 $f'(x')=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.證明完畢.

中值定理,又名平均值定理,應用甚多,今舉例於下:利用中值定理與 $\dfrac{de^x}{dx}=e^x$，證明 e 是一超越數. 假如 e 不是超越數則必有整數 $c_0, c_1, c_2, \cdots, c_n$ 適合

$$c_0+c_1e+c_2e^2+\cdots+c_ne^n=0\ \ (c_0\neq 0).$$

設 p 是一很大的質數，置 $f(x)=\dfrac{1}{(p-1)!}x^{p-1}(x-1)^p(x-2)^p\cdots(x-n)^p$, $f^{(n)}(x)=(f^{(n-1)}(x))'$, $F(x)=f(x)+f'(x)+\cdots+f^{(r)}(x)$，其中 r 表示多項式 $f(x)$的次數. 因函數 $e^{-x}F(x)$ 之導函數為 $-e^{-x}f(x)$，故由中值定理

$$e^{-x}F(x)-e^{-0}F(0)=-xe^{-\xi(x)}f(\xi(x)),0<\xi(x)<x.$$

由是 $e^xF(0)=F(x)+xe^{x-\xi(x)}f(\xi(x))$. 所以

$$0=F(0)(c_0+c_1e+\cdots+c_ne^n)=c_0F(0)+\cdots+c_nF(n)+\rho,$$

但 ρ 表示

$$\sum_{k=1}^{n}ke^{k-\xi(k)}c_kf(\xi(k)).$$

取 p 甚大,可使其絕對值小於1，事實上，M 表示

$$|(x-1)(x-2)\cdots(x-n)|\ (0\leqslant x\leqslant n)$$

的最大值時.

$$|\rho|<\frac{(nM)^p}{(p-1)!}(|c_0|+|c_1|e+\cdots+|c_n|e^n).$$

由是若能證明 $c_0F(0)+\cdots c_nF(n)$是一不等於 0 的整數則必

$$c_0F(0)+\cdots+c_nF(n)+\rho\neq 0.$$

而證明完成. 顯然，$F(1), F(2), \cdots, F(n)$都是 p 的倍數所以

$$c_1F(1)+\cdots c_nF(n)$$

是可用 p 除盡之一整數. 又 $F(0)-f^{(p+1)}(0)$ 也是 p 的倍數. 由於

$$f^{(p-1)}(0) = (-1)^p \quad (n!)^p$$

不是 p 的倍數，所以 $c_0F(0) + \cdots + c_nF(n)$ 與 $(-1)^p(n!)^pc_0$，就除數 p 而言，是同剩餘的。

因此，$\Sigma c_kF(k) + \rho$ 不會等於 0，e 是一超越數。

假如 $f'(x)$ 在閉區間 $[a, b]$ 上是連續的話，那末 $f(x)$ 在此區間中，均勻的可以微分。換句話說：對於任一正數 ε，必有如下的正數 δ，當 x 與 x' 距離小於 δ 而皆在 $[a, b]$ 中時，

$$\left|\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} - f'(x)\right| < \varepsilon.$$

這是因為 $f'(x)$ 是一連續函數，所以對於 ε，有如下的 δ：當 $|x'-x| < \delta$ 時，

$$|f'(x') - f'(x)| < \varepsilon.$$

由中值定理，$f(x') - f(x) = (x' - x)\, f'(\xi)$，$\xi$ 是 (x', x) 或 (x, x') 中適當的一點。從 $|\xi - x| < |x - x'| < \delta$，知道

$$\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} - f'(x) = f'(\xi) - f'(x)$$

之絕對值小於 ε。

中值定理還可以拓廣為如下的形式：閉區間上的連續函數 $f(x)$ 和 $g(x)$，假如在開區間 (a, b) 中處處可以微分，且 $f'(x)$ 與 $g'(x)$ 不同時為 0，亦不同時為 ∞，那末當 $g(b) \neq g(a)$ 時，(a, b) 中必有一點 ξ 適合

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

欲事證明，作函數 $\varphi(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot (g(x) - g(a))$。因 $\varphi(a)$ 與 $\varphi(b)$ 都等於 0，故由中值定理，(a, b) 中有 ξ 使 $\varphi'(\xi)$ 為 0。由是即得所要的結果。

從這樣拓廣的中值定理，即得計算極限之一定理：

假如極限值 $f(a + 0)$ 與 $g(a + 0)$ 皆等於 0，當區間 (a, b) 甚

短時，$f'(x)$與$g'(x)$在(a,b)中都存在，且函數$f'(x)/g'(x)$具有一定的意義．在此情形下，若極限值

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$$

存在，則當$x\to a+0$時，極限$f(x)/g(x)$也存在，其值等於A.

第二種不連續點 若$f(x)$在(a,b)中有導函數$f'(x)$而$x=a$是$f(x)$之一(右方)第二種不連續點．那末$f'(x)$在(a,b)中取$(-\infty,\infty)$中一切數值．

此事實可利用中值定理證明．設λ是一實數，證明(a,b)中有點ξ能使$f'(x)=\lambda$好了．由於$x=a$是函數

$$\varphi(x)=f(x)-\lambda x.$$

之一第二種不連續點，故當$x\to a+0$時．$\varphi(x)$的上限大於其下限．設

$$\varliminf_{x\to a+0}\varphi(x)<c<\varlimsup_{x\to a+0}\varphi(x).$$

正數h雖然很小，區間$(a,a+h)$中必有如下的兩點x_1與x_2:

$$\varphi(x_1)<c<\varphi(x_2).$$

不妨假設$x_1<x_2$，那末$x_1<x_2$中必有點x'適合$\varphi(x')=C$．區間(a,x_1)中必有點x_0使$\varphi(x_0)>c$．由是

$$\varphi(x_1)<c<\varphi(x_0),\ a<x_0<x_1<x'<x_2<a+h.$$

區間(x_0,x_1)中必有點x''使$\varphi(x'')=c$.由中值定理，

$$0=\varphi(x')-\varphi(x'')=(x''-x')\varphi'(\xi),\ x''<\xi<x'.$$

由是$\varphi'(\xi)=0$, $f'(\xi)=\lambda, a<\xi<a+h$.

3. **高次導數** $f(x)$有導函數$f'(x)$時，稱$f'(x)$的導數與導函數爲$f(x)$的二次導數與二次導函數．三次，四次…之$f(x)$的導數與導函數，可以逐次定義．下文稱這些導數爲通常的導數，除了通常導數而外，我們可用種種方法，將導數的意義拓廣．

第一種拓廣法——逐次法 設在點$x=a$，當$h\to 0$時，有(與h無關係的)常數$a_0, a_1, \cdots, a_k$適合於關係

(1) $f(a+h)=a_0+ha_1+\frac{h^2}{2!}a_2+\cdots+\frac{h^k}{k!}a_k+o(|h|^k)$

時*，稱函數 $f(x)$ 在點 $x=a$ 具有 k 次廣義導數 a_k，用記號

$$D^k f(a)=a_k$$

來表示它．所以 $D^k f(a)$ 的存在，包含 $D^{k-1}f(a),\cdots,D'f(a)$ 和 $D^0 f(a)=f(a\pm 0)$ 的存在。$D^k f(a)$ 的確是 $f^{(k)}(a)$ 的拓廣，可從下述定理明白。

拓廣的戴勞定理 設在點 $x=a$ 的附近 $(a+\varepsilon, a-\eta)$，函數 $f(x)$ 的導數 $f'(x),\cdots,f^{(n-1)}(x)$ 都存在，且在點 $x=a$，$f^{(n)}(a)$ 也存在，則當

$$a+\varepsilon<a+h<a-\eta,\ h\to 0$$

時，

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\cdots+$$
$$+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+\frac{h^n}{n!}(f^{(n)}(a)+0(1)).$$

證明 作 h 之函數

$$\phi(h)=f(a+h)-f(a)-hf'(a)-\cdots-\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a).$$

當 $h\to 0$ 時，$\phi(h)\to 0$，$\phi'(h)\to 0$，…；所以

$$\lim\frac{\phi(h)}{h^n}=\lim\frac{\phi'(h)}{nh^{n-1}}=\cdots=\lim\frac{\phi^{(n)}(h)}{n!}=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

由是即得所要的結果．證明完畢．

第二種拓廣法——直接法 置

$$\Delta_1(x,h)=f\left(x+\frac{h}{2}\right)-f\left(x-\frac{h}{2}\right),$$

$$\Delta_k(x,h;f)\equiv\Delta_k(x,h)=\Delta_{k-1}\times\left(x+\frac{h}{2},h\right)-\Delta_{k-1}\left(x-\frac{h}{2},h\right),$$

$$(k=2,3,\cdots).$$

---

* $Y=o(|x|)$ 的意義是 $\lim\frac{Y}{x}=0$.

固定 x，若極限

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta_k(x,h)}{h^k}$$

存在，則名此極限值爲 $f(x)$ 在 x 之 k 次(對稱)廣義導數，記之以 $\mathscr{D}^k f(x)$.

定理 1. 假如 $D^k f(a)$ 存在，那末 $\mathscr{D}^k f(a)$ 一定存在，兩者相等.

證明 當 $\nu = 0, 1, 2, \cdots, k-1$ 時，顯然

$$\left[\left(x\frac{d}{dx}\right)^{\nu}(x-1)^k\cdot x^{-\frac{k}{2}}\right]_{x=1} = 0,$$

而

$$\left[\left(x\frac{d}{dx}\right)^{\nu}(x-1)^k, x^{-\frac{k}{2}}\right]_{x=1} = k!.$$

故置 $H_j = \left(j-\frac{k}{2}\right)h$，設 $\nu < k$，得

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}H_j^{\nu} = \left[\left(x\frac{d}{dx}\right)^{\nu}(x-1)^k\cdot x^{-\frac{k}{2}}\right]_{x=1}h^{\nu} = 0,$$

又

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}H_j^{k} = h^k k!.$$

因 $\Delta_2(x,h) = f(x+h)+f(x-h)-2f(x)$，故由數學歸納法，

$$\Delta_k(x,h) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}f\left(x+jh-\frac{1}{2}kh\right).$$

然 $f(x+h) = a_0 + a_1 k + \cdots + a_k h^k/k! + o(h^k)$. 故得

$$\Delta_k(x,h) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\left\{a_0 + a_1 H_j + \cdots + \right.$$

$$\left. + \frac{a_k}{k!}H_j^k + o(|h^k|)\right\} = a_k h^k + o(|h|^k).$$

由是 $\mathscr{D}^k f(x) = a_k = D^k f(x)$.

若 $f''(a)$ 存在，則 $D^2 f(a)$ 亦存在，由定理 1，$\mathscr{D}^2 f(a) = f''(a)$. 由是得到

系 當 $f''(a)$存在時, $\mathscr{D}^2 f(x) = f''(x)$.

此結果容易直接證明:置

$$\varphi(h) = f(a+h) + f(a-h) - 2f(a),$$

則

$$\varphi(h) = \varphi(0) + h\varphi'(0) + \frac{h^2}{2}\varphi''(0) + o(h^2) =$$
$$= f''(a)h^2 + o(h^2).$$

然 $\mathscr{D}^2 f(x)$之存在,並不含有 $f''(x)$的存在. 例如

$$f(0) = 0, f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}\ (x \neq 0),$$

則因 $f'(0) = 0$, $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$, 故 $f''(0)$不存在;然

$$\mathscr{D}^2 f(0) = 0.$$

定理 2. 若 $\varphi(x)$ 在$[a, b]$爲連續且 $\mathscr{D}^2\varphi(x) = 0$,則 $\varphi(x)$ 是 x 的一次函數[1].

證明 設 $\varepsilon > 0$, 置 $\psi_{\pm}(x) = \pm\chi(x) + \varepsilon(x-a)(x-b)$,

但

$$\chi(x) = \varphi(x) - \varphi(a) - \frac{x-a}{b-a}(\varphi(b) - \varphi(a)).$$

當 $\mathscr{D}^2\varphi(x) = 0$時, $\mathscr{D}^2\psi_{\pm}(x) = 2\varepsilon > 0$. 連續函數 $\psi_{\pm}(a)$在$[a, b]$不能取正數,若不然,則其最大值 $\psi_{\pm}(\xi) > 0$,因之

$$\frac{\psi_{\pm}(\xi+h) + \psi_{\pm}(\xi-h) - 2\psi(\xi)}{h} < 0, \quad \mathscr{D}^2\psi_{\pm}(\xi) \leqslant 0.$$

此與 $\mathscr{D}^2\psi_{\pm}(\xi) > 0$ 不相容,所以 $\psi_{\pm}(x) \leqslant 0$ $(a \leqslant x \leqslant b)$. 由是可證 $\chi(x) \equiv 0$. 假如 $\chi(x') > 0$, 則取 ε 甚小,可使

$$\psi_{+}(x') = \chi(x') + \varepsilon(x'-a)(x'-b) > 0.$$

假如 $\chi(x'') < 0$,則取 ε 甚小,可使

$$\psi_{-}(x') = -\chi(x') + \varepsilon(x'-a)(x'-b) > 0.$$

---

1) 這是許瓦茲(Schwarz)的定理。

兩者皆與 $\psi_{\pm}(x)\leqslant 0$ 不相容，故必 $\chi(x)\equiv 0$，$\varphi(x)$ 是一次函數.證明完畢.

應用定理 2，可以解決三角級數之一問題．設 a_n 和 $b_n(n=0,1,\cdots)$ 都和 x 無關係，則稱

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\sum_{0}^{\infty}A_n(x)$$

爲一三角級數，其中 $A_0=\frac{1}{2}a_0$，$A_n(x)=A_n=a_n\cos nx+b_n\sin nx$．現在要問假如兩個三角級數處處收歛於相同的和，兩級數是否相同？下述定理予以肯定的回答.

定理 3. 設 $b_n(n=1,2,\cdots)$ 爲一有界數列[1]．若三角級數 $\sum_{0}^{\infty}A_n(x)$ 處處收歛於 0，則一切係數 a_n 和 b_n 都等於 0.

證明 先證一個補助定理：若 Σu_n 收歛於 s，則當 $h\to 0$ 時，

$$S(h)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2\to s.$$

置 $r_n=u_n+u_{n+1}+\cdots$，則對於 $\varepsilon>0$，有 n；當 $\nu\geqslant n$ 時，$|r_\nu|<\varepsilon$．級數

$$\sum_{\nu=n}^{\infty}u_\nu\left(\frac{\sin\nu h}{\nu h}\right)^2=\sum_{\nu=n}^{\infty}(r_\nu-r_{\nu+1})\left(\frac{\sin\nu h}{\nu h}\right)^2=$$

$$=r_n\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2-\sum_{\nu=n}^{\infty}r_{\nu+1}\Delta\left(\frac{\sin\nu h}{\nu h}\right)^2$$

的絕對值小於

$$\varepsilon+\varepsilon\sum_{\nu=n}^{\infty}\int_{\nu h}^{(\nu+1)h}\left|\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin^2 t}{t^2}\right)\right|dt<\varepsilon+\varepsilon\int_0^{\infty}\left|\frac{d}{dt}\frac{\sin^2 t}{t^2}\right|dt.$$

由於 $\frac{d}{dt}\frac{\sin^2 t}{t^2}=\frac{t\sin 2t-2\sin t}{t^3}$，所以 $A=\int_0^{\infty}\left|\left(\frac{\sin^2 t}{t^2}\right)\right|dt$ 是一有限數．因此，級數 $\Sigma u_\nu(\sin\nu h/\nu h)^2$ 對於 h 是均勻收歛的．今

1) 這條假設，爲證明的便利而設；事實上，可以把它除去.

以 $S_\nu(h)$ 表示它的開始 ν 項的和，

$$S(h) = S_\nu(h) + r_\nu(h)$$

的話，那末 $r_\nu(0) = r_\nu$，

$$|S(h) - \Sigma u_\nu| \leqslant |S_n(h) - \sum_{\nu=0}^{n-1} u_\nu| + |r_n| + |r_n(h)|,$$

最後兩項之和 $|r_n| + |r_n(h)|$ 小於 $\varepsilon(2 + A)$. 故當 $h \to 0$ 時，$|S(h) - S|$ 之上限小於或等於 $(A + 2)\varepsilon$. 令 $\varepsilon \to 0$，得

$$\lim_{h \to 0} S(h) = S.$$

置 $A_0 = \frac{1}{2} a_0$, $F(x) = a + bx + \frac{1}{2} A_0 x^2 - \sum_1^\infty \frac{A_n(x)}{n^2}$,

則得

$$\frac{F(x+2h)+F(x-2h)-2F(x)}{4h^2} = \sum_{n=0}^\infty A_n(x)\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2. \quad (1)$$

級數的第一項是 A_0，這是相當於 $n = 0$ 的一項. 由假設，$\Sigma A_n(x)$ 收斂於 0，故從補助定理知道，(1)之右端當 $h \to 0$ 時，其值爲 0. 由是

$$\mathscr{D}^2 F(x) \equiv 0.$$

從 $\Sigma A_n(0) = 0$，得 $a_n \to 0$. 又因 b_n 爲有界，所以 $F(x)$ 是一連續函數. 由定理2，$F(x)$ 是 x 的一次函數. 所以

$$\sum_1^\infty \frac{A_n(x)}{n^2} = A + Bx, \quad (2)$$

A 與 B 是兩個常數. 於(2)的左端以 $x + 2\pi$ 代 x，其值不變，故 B 必須等於 0.

級數 $\Sigma A_n(x)/n^2$ 關於 x 是均勻收斂的，所以從

$$A\int_0^{2\pi} dx = \sum_1^\infty \frac{1}{n^2}\int_0^{2\pi} A_n(x)dx = 0,$$

知 $A = 0$. 順次以 $\cos mx$ 與 $\sin mx$ 乘 $\sum_1^\infty n^{-2} A_n(x) = 0$，然後積分，乃得

$$\frac{1}{m^2}\int_0^{2\pi} a_m \cos^2 mx\, dx = 0,\ \frac{1}{m^2}\int_0^{2\pi} b_m \sin^2 mx\, dx = 0.$$

所以 $a_m = 0$, $b_m = 0$. 證明完畢.

廣義導數 $\mathscr{D}^2 f(x)$当然不一定存在,一般写

$$\overline{\mathscr{D}}^2 f(x) = \overline{\lim_{h\to 0}}\,\frac{\Delta_2(x, h; f)}{h^2},\ \underline{\mathscr{D}}^2 f(x) = \underline{\lim_{h\to 0}}\,\frac{\Delta_2(x, h; f)}{h^2}.$$

定理 4. 設 $f(x)$在開區間(a, b)中是一上半連續函數. 假如

$$\overline{\mathscr{D}}^2 f(x) \geqslant 0 \quad (a < x < b),$$

則 $f(x)$在(a, b)是一凸函數.

證明 區間(a, b)中的凸函數的意義是: 對於(a, b)中任何三點 x_1, x_2, x_3, 當 $x_1 < x_2 < x_3$ 時,

$$f(x_1)(x_2 - x_3) + f(x_2)(x_3 - x_1) + f(x_3)(x_1 - x_2) \leqslant 0 \quad (1)$$

成立. 設 $\varepsilon > 0$, $x_1 < x_2 < x_3$, 作 x 的上半連續函數 $f_1(x) = f(x) + \varepsilon x^2$. 函數

$$\varphi(x) = f_1(x) - f_1(x_1) - \frac{f_1(x_3) - f_1(x_1)}{x_3 - x_1}(x - x_1)$$

在 $[x_1, x_2]$ 中的某點 ξ, 取得最大値 $\varphi(\xi)$. 若 $\varphi(\xi) > 0$, 則因

$$\varphi(x_1) = \varphi(x_3) = 0, x_1 < \xi < x_3,$$

從 $\varphi(\xi + h) + \varphi(\xi - h) - 2\varphi(\xi) \leqslant 0$, 得 $\overline{\mathscr{D}}^2 \varphi(\xi) \leqslant 0$.

但是

$$\overline{\mathscr{D}}^2 \varphi(\xi) = \overline{\mathscr{D}}^2 f_1(\xi) = \overline{\mathscr{D}}^2 f(\xi) + 2\varepsilon \geqslant 2\varepsilon > 0,$$

所以 $\varphi(\xi) \leqslant 0$, $\varphi(x) \leqslant 0 (x_1 < x < x_3)$. 置 $x = x_2$, 則得

$$f_1(x_1)(x_2 - x_3) + f_1(x_2)(x_3 - x_1) + f_1(x_3)(x_1 - x_2) \leqslant 0.$$

令 $\varepsilon \to 0$, 乃得(1). 證明完畢.

系 1 設 $f''(x) \geqslant 0 (a < x < b)$, 那末 $f(x)$在(a, b)是一凸函數.

系 2 若 $f(x)$ 在 (a, b) 是一凸函數, 則必 $\underline{\mathscr{D}}^2 f(x) \geqslant 0$ $(a < x < b)$.

證明 於(1), 置 $x_1 = x - h$, $x_2 = x$, $x_3 = x + h (h > 0)$.

則從

$$f(x-h)+f(x+h)-2f(x)\geqslant 0,$$

即得 $\underline{\mathscr{D}}^2 f(x)\geqslant 0$. 證明完畢.

系 3 區間 (a, b) 中的上半連續函數 $f(x)$ 滿足條件

$$\overline{\mathscr{D}}^2 f(x)\geqslant 0,\ (a<x<b))\text{時},$$

必須 $\underline{\mathscr{D}}^2 f(x)\geqslant 0$.

下文將更述凸函數的性質:

定理 5. 設有常數 A 大於 $f(x)$ $(a<x<b)$, 且當

$$x-h<x<x+h$$

時,關係

$$f(x)\leqslant\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2}$$

常成立,則 $f(x)$ 在 (a, b) 是一凸函數.

證明 定理之意:是在 $x_2=\dfrac{x_1+x_3}{2}$ 之限制下,當

$$f(x_1)(x_2-x_3)+f(x_2)(x_3-x_1)+f(x_3)(x_1-x_2)\leqslant 0$$

時,有上界的函數 $f(x)$ 是一凸函數.

我們先證兩條件 $2f(x)\leqslant f(x+h)+f(x-h)$ 與 $f(x)<A$ 含有 $f(x)$ 在 (a, b) 的連續性. 首先還要建立不等式

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}. \quad (1)$$

當 $n=2$ 時,(1)就是假設的不等式. 若 $n=4$, 則(1)的右端小於或等於

$$\frac{1}{2}\left\{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+f\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)\right\}\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)}{4}.$$

由是可知(1)當 $n=2^m(m=1, 2, \cdots)$ 時,(1)成立. 設 n 是一正整數,取 m 使 2^m 大於 n. 置

$$X=\frac{x_1+\cdots+x_n}{n},\ x_{n+1}=x_{n+2}=\cdots=x_{2^m}=X,$$

那末

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2^m}}{2^m}\right)=$$

$$=f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n+(2^m-n)X}{2^m}\right)\ (=f(X))$$

$$\leqslant\frac{1}{2^m}\{f(x_1)+\cdots+f(x_n)+(2^m-n)f(X)\}.$$

故(1)成立．固定 x，取正整數 n 甚大，使 $0<\frac{A-f(x)}{n}<\varepsilon$．又取正數 δ 甚小，使

$$a<x-n\delta<x<x+n\delta<b,$$

則 $x\pm n\delta+(n-1)x=n(x\pm\delta)$．由(1)得

$$f(x\pm\delta)\leqslant\frac{f(x\pm n\delta)+(n-1)f(x)}{n}.$$

即

$$f(x\pm\delta)-f(x)\leqslant\frac{1}{n}\{f(x\pm n\delta)-f(x)\},$$

右邊小於 $\frac{A-f(x)}{n}<\varepsilon$，所以

$$f(x\pm\delta)-f(x)<\varepsilon.$$

從 $f(x)-f(x\mp\delta)\leqslant f(x\pm\delta)-f(x)$，得 $f(x\pm\delta)-f(x)>-\varepsilon$．由是

$$|f(x\pm\delta)-f(x)|<\varepsilon.$$

其中 δ 可以很小，所以 x 是 $f(x)$ 之一連續點．故 $f(x)$ 在 (a,b) 是連續的．

設 $a<x_1<x_2<x_3<b$．設 x_1 與 x_3 的中點 $\frac{x_1+x_3}{2}$ 是 x，則由假設，點 $(x,f(x))$ 在 $A=(x_1,f(x_1))$ 與 $B=(x_3,f(x_3))$ 連綫的下方（或在連綫上）．將 (x_1,x_3) 分為 2^n 等分，設其分點為 $\xi_1^{(n)}$，$\xi_2^{(n)},\cdots,\xi_N^{(n)}$ $(N=2^n)$：

$$x_1=\xi_0^{(n)}<\xi_1^{(n)}<\cdots<\xi_N^{(n)}=x_3,$$

一切點 $(\xi_\nu,f(\xi_\nu))$ 都在 AB 的下方或在 AB 上．設這些分點的全

體爲 E，則 E 中必有點列 $x^{(n)}$ 收斂於 x_2。由於點 $(x^{(n)}, f(x^{(n)}))$ 常在 AB 的下方或在 AB 上，且

$$f(x^{(n)}) \to f(x_2),$$

故 $(x_2, f(x_2))$ 也在 AB 的下方或在 AB 上．由是

$$f(x_1)(x_2 - x_3) + f(x_2)(x_3 - x_1) + f(x_3)(x_1 - x_2) \leqslant 0.$$

證明完畢．

系 (a, b) 中之連續函數具有凸性的充要條件是關係

$$f(x) \leqslant \frac{1}{2}\{f(x+h) + f(x-h)\}$$

對於 $a < x - h < x + h < b$ 常成立．

定理 6. 假如 $f(x)$ 在區間 (a, b) 中是凸的，則在此區間中 $f'_-(x)$ 和 $f'_+(x)$ 都存在．

證明 設 $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$，則

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}.$$

於此，先令 $x_2 \to x_1$，次設 $x_3 \to x_1$，則得 $D^+f(x_1) \leqslant D_+f(x_1)$．故必 $f'_+(x_1)$ 存在．又因

$$\frac{f(x_1) - f(x_3)}{x_1 - x_3} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3}.$$

於此先令 $x_2 \to x_3$，繼令 $x_1 \to x_3$，乃得 $D^-f(x_3) \leqslant D_-f(x_3)$．故 $f'_-(x_3)$ 存在．定理證畢．

定理 7. 設 $f(x)$ 在 (a, b) 中是凸的，則 (a, b) 中除一可列點集而外，導數 $f'(x)$ 必存在．

證明 由 §1 的定理 4（楊格的定理），(a, b) 除一可列點集 E，成立着

$$D^-f(x) \leqslant D^+f(x),\ D_+f(x) \leqslant D^-f(x). \tag{1}$$

故若 x 不屬於 E，則由定理 6 與(1)，

$$f'_-(x) \leqslant f'_+(x),\ f'_+(x) \leqslant f'_-(x).$$

故 $f'_+(x) = f'_-(x) = f'(x)$．證明完畢．

4. 單調函數 設 $f(x)$ 是區間 $[a, b]$ 上所定義之一函數，當 $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$ 時，若關係

$$f(x_1) \leqslant f(x_2)$$

常成立，稱 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 是一增加函數．假如 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ 常成立，稱 $f(x)$ 是一減少函數． 總稱增加函數與減少函數為單調函數．當 $f(x)$ 為減少函數時，$-f(x)$ 是一增加函數．因此，下面專論增加函數．

定理 1. 設 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 是一增加函數，則

(i) 當 $a \leqslant x \leqslant b$ 時，$f(x+0)$ 存在．

(ii) 當 $a < x \leqslant b$ 時，$f(x-0)$ 存在．

證明 (ii) 的證明，設 $\sigma(x)$ 為 f 在區間 $[a, x]$ 中的上界．則當

$$a \leqslant x_n < x, \ x_n \to x$$

時，從 $f(x_n) \leqslant \sigma(x)$ 得

$$\overline{\lim} f(x_n) \leqslant \sigma(x). \tag{1}$$

設 $G < \sigma(x)$，則有如下之 $\xi: a \leqslant \xi < x, f(\xi) > G$．設

$$x_n > \xi \quad (n > m),$$

則因 $f(x_n) \geqslant f(\xi)$，故 $\underline{\lim} f(x_n) \geqslant f(\xi) > G$．令 $G \to \sigma(x)$，乃得

$$\underline{\lim} f(x_n) \geqslant \sigma(x). \tag{2}$$

由(1)與(2)，$\lim f(x_n) = \sigma(x)$．故 $f(x-0)$ 存在，同樣可證(i)．證明完畢．

系 設 $f(x)$ 是一增加函數，則 $f(x+0) = S(x)$，$f(x-0) = I(x)$．

證明 因 $f(x-0) \leqslant f(x) \leqslant f(x+0)$ 之故．證明完畢．

定理 2. 單調函數 $f(x)$ 的不連續點成一可列點集．

證明 設 x 是 $f(x)$ 之不連續點，則必有正整數 n 適合

$$f(x+0) - f(x-0) > \frac{1}{n}.$$

固定 n，適合此不等式之一切點的全體，記他做 E_n，那末和集 ΣE_n

是 $f(x)$ 之一切不連續點所成之點集．要證這個點集是可列，證明 E_n——固定 n——是一可列點集好了．

於 E_n 中任取 k 個點 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k$．(假如 E_n 是一有限點集，那末 k 是 E_n 中點的個數)且設

$$a < \xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_k < b.$$

於區間 (ξ_i, ξ_{i+1}) 中取一點 x_i． 又設 $x_0 = a$, $x_k = b$ 那末 $x_{i-1} < < \xi_i < x_i$,

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) \geqslant f(\xi_i + 0) - f(\xi_{i-0}) > \frac{1}{n},$$

$$(i = 1, 2, \cdots, k).$$

從

$$f(b) - f(a) = \sum_1^\infty \{f(x_i) - f(x_{i-1})\} \geqslant$$

$$\geqslant \sum_1^k \{f(\xi_{i+0}) - f(\xi_{i-0})\} > \frac{k}{n}.$$

得

$$k < n\{f(b) - f(a)\}$$

這就是說：E_n 中點的個數小於 $n\{f(b) - f(a)\}$． 由於 E_n 是一有限點集，所以和集 ΣE_n 是一可列點集．

系　在閉區間中的單調函數，決不會有無數個的不連續點，其振幅都大於某一正常數之事．

定義　直綫上之開集，稱爲綫形開集．設 O 是一綫形開集，則 O 是不互相重疊的開區間之和：

$$O = \Sigma(a_k, b_k).$$

稱級數 $\Sigma(b_k - a_k)$ 之和爲 O 之(綫)測度，以 $|O|$ 表示它．設 M 是直綫上之點集，假如有測度可以任意小的開集包含 M 時，稱 M 是一零集，其測度 $|M|$ 等於 0．

凡可列點集必爲零集．事實上，設 $M = \{x_k\}$, x_k 都是一直綫

上的點，則以長爲 $\varepsilon 2^{-k}$ 的開區間 (a_k, b_k) 掩蓋 x_k 時，M 爲開集 $O = \Sigma(a_k, b_k)$ 所蓋．此時

$$|O| \leqslant \Sigma \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

ε 可以很小，故 M 是一零集．

可列無限個零集 M_n 的和集 $M = \Sigma M_n$ 是一零集．爲什麼呢？以 $|O_n| = \frac{\varepsilon}{2^n}$ $(\varepsilon > 0)$ 之開集 O_n 掩蓋 M_n 時，M 包含於開集．

$$\Sigma O_n = O$$

之中，因 $|O| \leqslant \Sigma \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$，故 $|M| = 0$．

定義 設 P 是與集 M 中的點有關的一個性質．M 中除一零集中的點而外，P 在 M 的其他各點皆成立的話，稱 P 在 M 上幾乎處處成立。

定理 3. 單調函數幾乎處處具有有限导数．

證明 設 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 是一增加函數，要證明 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 中幾乎處處存在，這個定理，首先由勒貝格(H. Lebesgue)於他的"積分論"(1904)的書中，在 $f(x)$ 是一連續函數的假設下證明的，此地的證明，依靠着

黎斯的引理[1] 設 $g(x)$ 是 $[a, b]$ 上所定義的連續函數，對於 (a, b) 中的一點 x，x 的右方有如下的點 ξ：

$$g(x) < g(\xi) \quad (x < \xi \leqslant b), \tag{1}$$

這種 x 的全體成一點集 E．假如 E 不是空集，則必是一開集，從而

$$E = \Sigma(a_k, b_k), (a_k, b_k) \cdot (a_{k'}, b_{k'}) = 0 (k \neq k').$$

對於 E 的任何 $(a_k \cdot b_k)$ 成立着 $g(a_k) \leqslant g(b_k)$．

假如 E 不是空集，那麼 E 一定是一個開集：事實上，當 $x \in E$ 時，有 ξ 滿足(1)；因此，從 $g(x)$ 的連續性，δ 很小的話當 $x - \delta <$ $< x' < x + \delta$ 時，不等式 $g(x') < g(\xi)$ 必須成立．

1) F. Riesz, Acta Szeged 5(1932)208—221.

設 $a_k < x < b_k$. 對於 x, $[x, b_k]$ 中必有最近於 b_k 的點 x_1 適合

$$g(x) \leqslant g(x_1).$$

我們證明 $x_1 = b_k$. 假如不然,那末 $x \leqslant x_1 < b_k$. 對於 x_1, 有如下的點 ξ_1:

$$g(x_1) < g(\xi_1).$$

此點 ξ_1 將在 b_k 之右: $b_k < \xi_1$. 因 $b_k \in E$, 故 $g(\xi_1) \leqslant g(b_k)$; 而 $g(b_k)$ 又小於 $g(x_1)$, 這樣一來,達到矛盾

$$g(x_1) < g(\xi_1) \leqslant g(b_k) < g(x_1).$$

故必 $x_1 = b_k$, 因此, $g(x) \leqslant g(b_k)$. 令 $x_1 \to a_k$, 就得到 $g(a_k) \leqslant$ $\leqslant g(b_k)$. 引理證畢. 現在證明定理 3. 事實上,我們只要證明

$$(1)\ D^+f(x) < +\infty \text{ 和 } (2)\ D^+f(x) \leqslant D_-f(x)$$

在(a, b)中幾乎處處成立就够了. 爲什麽呢? 我們將(2)應用於單調增加函數 $-f(-x)$, 就知道

$$(3)\ D^-f(x) \leqslant D_+f(x)$$

幾乎處處成立.從(1),(2),(3),得

$$D^+f(x) \leqslant D_-f(x) \leqslant D^-f(x) \leqslant D_+f(x) \leqslant D^+f(x) < +\infty.$$

所以 $D^+f(x) = D_-f(x) = D^-f(x) = D_+f(x) = f'(x)$ 幾乎處處成立.

記 $D^+f(x) = +\infty$ 的 x 所成之點集爲 E_∞, 要證 E_∞ 是一零集. 記 $D^+f(x) > c$ 的一切 x 所成之集爲 E_c, 則 $E_\infty \subset E_c$, 設 $x \in E_c$, 則必有如下的 ξ:

$$\xi > x, \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} > c.$$

寫 $g(x) = f(x) - cx$, 則得 $g(\xi) > g(x)$. 由是 E_c 是一開集 $\Sigma(a_k, b_k)$. 應用黎斯的引理,就得到 $f(b_k) - cb_k \geqslant f(a_k) - ca_k$. 即

$$c(b_k - a_k) \leqslant f(b_k) - f(a_k).$$

因此 $c\Sigma(b_k - a_k) \leqslant \Sigma(f(b_k) - f(a_k)) \leqslant f(b) - f(a)$.
所以

$$|E_\infty| \leqslant |E_c| \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{c}.$$

令 $c \to \infty$,知 E_∞ 是一零集.

其次,記 $D^+f(x) > D_-f(x)$ 的一切 x 所成之集爲 M,對於 M 中任何一點 x,必有兩個有理數 c 和 r 適合

$$D^+f(x) > r > c > D_-f(x).$$

固定有理數 r 和 c,滿足上式的一切 x,成一點集 M_{cr},證明 M_{cr} 是一零集好了. 作函數 $g(x) = f(-x) + cx$,點 x 屬於 M_{cr} 的話,$D_-f(x) < c$. 因此有 ξ 如下:

$$\xi < x, \quad \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} < c,$$

即 $g(-x) < g(-\xi)$, $-x < -\xi$. 因此,由黎斯的引理, M_{cr} 含在如下的一個開集 $\Sigma(a_k, b_k)$ 中:

$$f(b_k) - f(a_k) \leqslant c(b_k - a_k). \tag{1}$$

又設 $g(x) = f(x) - rx$,若 x 是 $(a_k, b_k) \cdot M_{cr}$ 中的一點,則必有 ξ 適合

$$x < \xi, \quad g(x) < g(\xi).$$

再由黎斯的引理,$(a_k, b_k)M_{cr}$ 含在如下的開集 $\sum_l (a_{kl}, b_{kl})$ 中:

$$r(b_{kl} - a_{kl}) \leqslant f(b_{kl}) - f(a_{kl}). \tag{2}$$

從(1)和(2)得到 $r|\Sigma_2| \leqslant V_2 \leqslant V_1 \leqslant c|\Sigma_1|$,但

$$|\Sigma_2| = \sum_k \sum_l (b_{kl} - a_{kl}), V_2 = \sum_k \sum_l (f(b_{kl}) - f(a_{kl})),$$

$$|\Sigma_1| = \sum_k (b_k - a_k), V_1 = \sum_k \sum_l (f(b_{kl}) - f(a_{kl})).$$

由是

$$|\Sigma_2| \leqslant \frac{c}{r}|\Sigma_1|. \tag{3}$$

在每一區間(a_{kl}, b_{kl})中,可以施行上面的議論而得類似於(3)的結果．因此 M_{cr} 被包含在如下的一個開集 Σ_3 中:

$$|\Sigma_3| \leqslant \frac{c}{r}|\Sigma_2|.$$

因此 $|\Sigma_3| \leqslant \left(\frac{c}{r}\right)^2|\Sigma_1|$. 將此手續繼續進行到 n 回,我們知道 M_{cr} 被包含在開集 Σ_{n+1} 中,

$$|\Sigma_{n+1}| \leqslant \left(\frac{c}{r}\right)^n|\Sigma_1|.$$

由於 $\frac{c}{r} < 1$. 所以從 $|M_{cr}| \leqslant \left(\frac{c}{r}\right)^n \cdot |\Sigma_1|$ 得到 $|\Sigma_{cr}| = 0$.

對於連續函數,定理已經證畢.

對於具有不連續點的函數 $f(x)$, 我們把黎斯引理拓廣成如下的形式後,來應用它好了.

拓廣的黎斯引理 設在開區間(a, b)中極限值 $g(x\pm 0)$ 到處存在,並且 $g(a+0)$ 和 $g(b-0)$ 也存在,那末當

$$g(x) = \max(g(x+0), g(x-0))$$

在 $a < x \leqslant b$ 中到處成立時, $g(a_k+0) \leqslant g(b_k)$; 此地 $E = \Sigma(a_k \cdot b_k)$是黎斯引理中的點集.

證明全同於黎斯引理的證明．不必重述.

利用拓廣的黎斯引理來證定理時,我們不妨假設

$$f(x) = f(x+0),$$

因此 $f(x) = \max(f(x+0), f(x-0))$. 由是,當 $f(x)$具有不連續點時——不連續點成一可列點集——$f'(x)$幾乎處處存在的證明,全同於 $f(x)$爲連續函數時的證明．定理證畢.

次設 $f(x)$的定義區是直綫上之一點集 M. 若對於 M 中任何兩點 x 與 x', 關係

$$(x'-x)\{f(x')-f(x)\} \geqslant 0$$

常成立．稱 $f(x)$在 M 上是一(單調)增加函數．設 M 之上界爲 α,

下界爲 β, $f(x)$ 在點集 $[\alpha,x]\cdot M$ 上之上界爲 $S_f(x)=S(x)$，則在 $[\alpha,\beta]$ 上是 x 之一增加函數．所以 $S'(x)$ 在 (α,β) 中幾乎處處存在．當 $x\in M$ 時，$S(x)$ 等於 $f(x)$，此時若 $S'(x)$ 存在，且 M 中有點列 x_n 收斂於 x，則

$$S'(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x}.$$

這種 x 在 M 中幾乎處處存在．寫 $S'(x)$ 做 $f'_M(x)$．

由是得

定理 4. 設 $f(x)$ 是在綫形點集 M 上之一增加函數，則 $f'_M(x)$ 幾乎處處存在．

關於增加函數的級數，有如下的重要定理．

定理 5.[1] 在區間 $a\leqslant x\leqslant b$ 中，設有增加函數 $f_n(x)$, $n=1,2,\cdots$ 能使級數 $f_1(x)+f_2(x)+\cdots$ 處處收斂，那末 $S(x)=\Sigma f_n(x)$ 的話，

$$S'(x)=f'_1(x)+f'_2(x)+\cdots$$

在 (a,b) 中幾乎處處成立．

證明 不妨假設 $f_1(a)=f_2(a)=\cdots=0$．置

$$S_n(x)=f_1(x)+\cdots+f_n(x),$$

則

$$S_n(x)\to S(x).$$

導數 $f'_1(x), f'_2(x),\cdots$; $S'(x)$ 除一零集 E 中的點 x 而外，都存在．由於 $f'_n(x)\geqslant 0$，所以當 $x\bar{\in}E$ 時，

$$S'_n(x)\leqslant S'_{n+1}(x)\leqslant S'(x).$$

由是，$\Sigma f'_n(x)$ 幾乎處處收斂，其和不大於 $S'(x)$．由於 $f'_n(x)\geqslant 0$，所以假如我們證得

1) 這是富璧尼的定理 (G. Fubini, 1915).

$$\lim(S'_{n_\nu}(x)-S'(x))=0 \quad (x \in E).$$

那末就得到 $\Sigma f'_n(x)=S'(x), x \in E$.

對於 k, 取 n_k 使

$$S(b)-S_{n_k}(b)<2^{-k}.$$

由於 $S(x)-S_n(x)$是 x 的單調增加函數,所以

$$\Sigma\{S(x)-S_{n_k}(x)\}<\Sigma\{S(b)-S_{n_k}(b)\}<\sum_1^\infty \frac{1}{2^k}=1;$$

此級數 $\Sigma\{S(x)-S_{n_k}(x)\}$ 和 $\Sigma f_n(x)$ 具有相同的性質,所以級數

$$\Sigma\{S'(x)-S'_{n_k}(x)\}$$

幾乎處處收斂. 因此 $S'_{n_k}(x)-S'(x)$幾乎處處收斂於 0. 定理證明完畢.

5. 有界變差之函數　在定義區中之任何點, 函數值都是有限數的,稱爲有限函數. 設 $f(x)$是在$[a,b]$上所定義之一有限函數於$[a,b]$作 n 個分點

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n<x_{n+1}=b.$$

作和

$$v=v(x_1\cdots x_n)=\sum_{k=0}^n |f(x_{k+1})-f(x_k)|.$$

假如 V 是有界的話,稱 $f(x)$在 $[a,b]$ 爲有界變差. 若 $f'(x)$存在且爲有界,那末 $f(x)$一定是有界變差. 事實上,當 $|f'(x)|\leqslant K$時上面的

$$v(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{k=0}^n |f'(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)<K(b-a).$$

一般言之,假如有常數 K 對於$[a,b]$中任何兩點 x 與 x 適合

$$|f(x)-f(x')|\leqslant K|x'-x|$$

的話,稱 $f(x)$在$[a,b]$滿足李普雪茲條件[1] 滿足此條件的 $f(x)$, 未

1) 李普雪茲(R. Lipschitz, 1832—1903).

必處處有導數，但是 $V \leqslant K(b-a)$，$f(x)$ 在 $[a, b]$ 爲有界變差．單調有界函數必爲有界變差，此時 V 等於 $|f(b)-f(a)|$．所宜注意的是，有界變差之函數未必是一連續函數；例如：

$$f(x) = 1 \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\right)$$
$$= 2 \left(\frac{1}{2} < x \leqslant 1\right),$$

則在 $[0, 1]$ 中，$V(x_1, \cdots x_n) \leqslant 1$，故 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 爲有界變差．但在 $x = \frac{1}{2}$ 處 $f(x)$ 有一不連續點． 又連續函數，也未必是有界變差；例如

$$f(0) = 0, f(x) = x \sin \frac{1}{x} \quad \left(0 < x < \frac{2}{\pi}\right),$$

則置 $x_0 = 0, x_{k+1} = \frac{2}{\pi}, \frac{1}{1+2n-2k}$ $(k = 0, 1, \cdots, n)$ 時，$V(x_1, x_2, \cdots x_n)$ 等於

$$\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{1+2n-2k}+\frac{1}{3+2n-2k}\right) > \frac{4}{\pi},$$

$$\sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{2\nu+1} \to \infty.$$

但是 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{2}{\pi}\right]$ 並無不連續點．

於 $f(x_{k+1}) - f(x_k)(k = 0, 1, \cdots, n)$ 中，將其正數全部相加得和 P，沒有正數時，P 等於 0；又設其中一切負數之和爲 $-N$；沒有負數時，N 爲 0．由是

$$P \geqslant 0, N \geqslant 0, P - N = f(b) - f(a),$$
$$P + N = v(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

當 $n, x_1, x_2, \cdots, x_n$ 變動時，稱 $P, N, P+N$ 的上界爲 f 之正變差，負變差，全變差，順次記做

$$p(a, b), \ n(a, b), \ t(a, b).$$

函數 $f(x)$ 爲常數時,此三數皆爲 0. 其逆亦眞. 因

$$p(a,b)\leqslant t(a,b),\ n(a,b)\leqslant t(a,b),$$

故正變差與負變差都小於或等於全變差. 又因

$$p(a,b)+f(a)=n(a,b)+f(b). \tag{1}$$

故正變差與負變差同時爲有限數或兩者都爲 $+\infty$. 由

$$t(a,b)\leqslant p(a,b)+n(a,b), \tag{2}$$

得如下的結果: 正變差,負變差,全變差三者都爲 $+\infty$,或都是有限數. 三者都是有限數時, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 爲有界變差.

定理 1. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 爲有界變差則

$$t(a,b)=p(a,b)+n(a,b).$$

證明 由(2)證明

$$t(a,b)\geqslant p(a,b)+n(a,b) \tag{3}$$

好了. $t(a,b)\geqslant P+N=2P-(P-N)$. 然 $P-N$ 等於

$$f(b)-f(a)=p(a,b)-n(a,b),$$

此由於(1). 所以 $t(a,t)\geqslant 2p(a,b)-(p(a,b)-n(a,b))$,由是得(3). 證明完畢.

定理 2. 設 $a<\xi<b$. 則 $p(a,b)=p(a,\xi)+p(\xi,b)$.

證明 設 P_1 是 $[a,\xi]$ 中之一正數和, P_2 是 $[\xi,b]$ 中之一正數和,則由

$$P_1+P_2\leqslant p(a,b)$$

得 $p(a,\xi)+p(\xi,b)\leqslant p(a,b)$. 取 ξ 爲 $x_0,x_1,\cdots,x_{k+1}$ 中之一點時,則由 $P\leqslant p(a,\xi)+p(\xi,b)$,得

$$p(a,b)\leqslant p(a,\xi)+p(\xi,b).$$

因此,定理成立.

設 $a<x<b$ 則由(1),

$$f(x)=[f(a)+p(a,x)]-n(a,x).$$

由定理 2, $p(a,x)$ 和 $n(a,x)$ 都是 x 的增加函數,所以有界變差函數是兩個增加函數的差;實際上,這是有界變分函數的特徵:

定理 3. $f(x)$在$[a, b]$中成一有界變差的充要條件是$[a, b]$中有單調增加函數$\varphi(x)$和$\psi(x)$適合

$$f(x) = \varphi(x) - \psi(x). \tag{1}$$

我們從(1)導出$t(a, b)$是一有限數好了. 顯然地從(1)得

$$P \leqslant \varphi(b) - \varphi(a),\ N \leqslant \psi(b) - \psi(a).$$

所以$p(a, b) \leqslant \varphi(b) - \varphi(a)$, $n(a, b) \leqslant \psi(b) - \psi(a)$. 因之

$$t(a, b) \leqslant \psi(b) + \varphi(b) - \varphi(a) - \Psi(a).$$

定理證畢.

系 在定理3的情形下,當$a \leqslant x < x' \leqslant b$時.

$$p(x') - p(x) \leqslant \varphi(x') - \varphi(x),$$
$$n(x') - n(x) \leqslant \psi(x') - \psi(x).$$

定理 4. 區間$[a, b]$中的有界變差的函數$f(x)$在點$x = x_0$, $a \leqslant x_0 \leqslant b$, 具有連續性的充要條件是$p(x)$與$n(x)$兩函數都在$x_0$爲連續.

證明 置$\varphi_0(x) = f(a) + p(x)$, $\psi_0(x) = n(x)$則

$$f(x) = \varphi_0(x) - \psi_0(x) \tag{1}$$

這是$f(x)$的常規分解. 若x_0是$p(x)$與$n(x)$的連續點,則x_0亦爲$\varphi_0(x)$與$\psi_0(x)$的連續點,因之$f(x)$在x_0是連續的.

若x_0是f之一不連續點,那末四個極限値

$$p(x_0 + 0) - p(x_0),\ n(x_0 + 0) - n(x_0), \tag{2}$$
$$p(x_0) - p(x_0 - 0),\ n(x_0) - n(x_0 - 0), \tag{3}$$

不能都等於0. 但是我們將證(2)的兩數中之小者h爲0,(3)的兩數中的小者l亦爲0. 先證$h = 0$. 作函數

$$\chi(x) = 0 \quad (a \leqslant x \leqslant x_0)$$
$$= h \quad (x_0 < x \leqslant b).$$

作增加函數$\varphi(x) = \varphi_0(x) - \chi(x)$與$\psi(x) = \psi_0(x) - \chi(x)$, 則由(1)得$f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$. 若$h > 0$,則

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi_0(b) - \varphi_0 \quad h <$$

$$< \varphi_0(b) - \varphi_0(a) = p(a,b),$$

此與定理 3 的系不相容，故 $h=0$. 同樣可證 $l=0$. 等式

$$|f(x\pm 0)-f(x)| = |\varphi_0(x\pm 0)+\psi_0(x\pm 0)-\varphi_0(x)+\psi_0(x)|$$

在$[a,b]$中處處成立. 在 $x=x_0$. 由於 $h=l=0$，所以上式可以寫成

$$|f(x\pm 0)-f(x)| = |\varphi_0(x\pm 0)-\varphi_0(x)|+|\psi_0(x\pm 0)-\psi_0(x)|;$$
$$(a\leqslant x\leqslant b).$$

證明完畢.

系　有界變差函數之不連續點的全體是可列的.

定理 5.　在$[a,b]$上，設 $f(x)$ 與 $g(x)$ 都是有界變差，那末下列諸函數也都是有界變差:

(i) $f(x)\pm g(x)$, (ii) $f(x)g(x)$, (iii) $|f(x)|$,

(iv) $f(x)$與$g(x)$的最大值函數與最小值函數,

(v) $f(x+0)$ 與 $f(x-0)$,

(vi) $\dfrac{1}{f(x)}$，但設 $|f(x)|>c>0$, c 是常數.

證明　設 f 與 g 的常規分解為 $f=\varphi_1-\psi_1$, $g=\varphi_2-\psi_2$, 那末從

$$f+g=(\varphi_1+\varphi_2)-(\psi_1+\psi_2),$$

知 $f+g$ 為有界變差. 又由 $f-g=f+(-g)$, 故 $f-g$ 也是有界變差，又從

$$fg=(\varphi_1\varphi_2+\psi_1\psi_2)-(\varphi_1\psi_2+\psi_1\psi_2)$$

知 fg 是有界變差. 從不等式

$$||f(x)|-|f(x')||\leqslant|f(x)-f(x')|,$$
$$v_{|f|}(x_1,\cdots,x_n)\leqslant v_f(x_1,\cdots,x_n)$$

知 $|f(x)|$ 是有界變差. f 與 g 的最大值函數與最小值函數是

$$\frac{1}{2}\{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|\},$$

$$\frac{1}{2}\{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|\}.$$

從(i)與(iii),知道這兩函數都是有界變差．又從

$$\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(x')}\right|\leqslant\frac{1}{c^2}|f(x)-f(x')|,$$

得

$$v_f(x_1,\cdots,x_n)\leqslant\frac{1}{c^2}v_f(x_1,\cdots,x_n).$$

所以 $\frac{1}{f(x)}$ 也是有界變差． 最後，$\varphi_1(x\pm 0)$ 與 $\psi_1(x\pm 0)$ 都存在,所以

$$f(x\pm 0)=\varphi_1(x\pm 0)-\psi_1(x\pm 0).$$

因 $\varphi_1(x\pm 0)$與 $\psi_1(x\pm 0)$都是單調增加,所以 $f(x\pm 0)$是有界變差．定理證畢．

單調函數幾乎處處可以微分,由是證得下述定理的前半：

定理 6. 有界變差之函數 $f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$幾乎處處可以微分,並且成立着等式 $|f'(x)|=T'(x)$．但 $T(x)=t(a,x)$是$f(x)$的全變差函數．

要證定理的後半,我們作如下的分點: $a_0=x_0<\cdots<x_n=b$,使

$$T(b)-\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|<\frac{1}{2^n}.$$

又作如下的函數$f_n(x)$：當 $f(x_k)\geqslant f(x_{k-1})$時,設 $c_1,\cdots,c_n$是 n 個常數,當 $f(x_k)\geqslant f(x_{k-1})$時，

$$f_n(x)=f(x)+c_k,\ x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k;$$

$f(x_k)<f(x_{k-1})$的話，$f_n(x)=-f(x)+c_k,x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k$.

定 $f_n(a)=0$．當$(f_k(x_k)-f(x_{k-1}))(f(x_{k+1})-f(x_k))<0$時，$c_k+c_{k+1}=2f(x_k)$．由是

$$|f(x_k)-f(x_{k-1})|=f_n(x_k)-f_n(x_{k-1}),$$

因此，

$$\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|=f_n(b),\ T(b)-f_n(b)<\frac{1}{2^n}.$$

另一方面：我們能證 $T(x)-f_n(x)$ 是一增加函數：就是說，當 $x<\xi$ 時，

$$T(\xi)-T(x)\geq f_n(\xi)-f_n(x).$$

當 x 和 ξ 屬於同一區間 $[x_{k-1}, x_k]$ 時，此不等式從 $T(\xi)-T(x)\geq|f(\xi)-f(x)|$ 立即明白．否則的話，$x<x_k<\cdots<x_p<\xi$. 因此，$T(\xi)-T(x)$ 等於

$$(T(\xi)-T(x_p))+(T(x_p)-T(x_{p-1}))+\cdots+(T(x_k)-T(x))\geq$$
$$\geq|f(\xi)-f(x)|+\cdots+|f(x_k)-f(x)|\geq|f(\xi)-f(x)|.$$

單調增加函數 $T(x)-f_n(x)$ 爲項的級數 $\Sigma[T(x)-f_n(x)]$ 具有優越級數 $\Sigma 2^{-n}$．它是一個匀斂的級數，由富弼尼的定理，

$$\lim_{n\to\infty}[T'(x)-f'_n(x)]=0$$

幾乎處處成立．由定義，$f'_n(x)=\pm f'(x)$ 幾乎到處成立．由於 $T'(x)\geq 0$，所以 $T'(x)=|f'(x)|$ 幾乎到處成立．定理證畢．

爲了要进一步探討有界變差函數的性質，我們引入**跳躍函數**的概念．區間(a, b)上的跳躍函數 $S(x)$ 是由如下的級數 $\sum_{1}^{\infty} f_n(x)$ 所表示的和．設 $a<x_n<b$，Σu_n 和 Σv_n 是兩個絕對收斂級數．當 $x<x_n$ 時，$f_n(x)=0$；$x>x_n$ 時，$f_n(x)=u_n+v_n$；而 $f_n(x_n)=u_n$．由是

$$S(x)=\sum_{x_n\leqslant x}u_n+\sum_{x_n<x}v_n.$$

稱 $x_1, x_2, \cdots$ 爲 $S(x)$ 的跳躍點．在 v_n 和 u_n 都是正數或是 0 的情况，一切 $f_n(x)$ 都是 x 的單調增加函數，除 $x=x_n$ 而外，$f'(x)=0$．故由富弼尼的定理，$S'(x)$ 幾乎到處等於 0．

對於 $u_n\gtrless 0$，$v_n\gtrless 0$ 的一般情况，同樣的事情 $S'(x)=0$ 也

成立．實際上我們能證如下的

引理 1. 區間 $a \leqslant x < b$ 上的跳躍函數 $S(x)$ 一定是有界變差．設 $S(x)$ 的跳躍點列是 $\{x_n\}$，跳躍數列是 $\{u_n\}$ 和 $\{v_n\}$，則 $S(x)$ 的全變差函數 $T(x)$，正變差函數 $p(x)$，負變差函數 $n(x)$ 都是以 $\{x_n\}$ 爲跳躍點列的跳躍函數；分別以 $\{|u_n|\}$，$\{|v_n|\}$；

$$\{\max(u_n, 0)\}, \quad \{\max(v_n, 0)\};$$

$$\{\min(u_n, 0)\}, \quad \{\min(v_n, 0)\}$$

爲跳躍數列．

置 $U = \Sigma(|u_n|+|v_n|)$．我們首先證明 $S(x)$ 的全變差 $T(b)$ 等於 U．對於 $\varepsilon > 0$，取 M 使

$$\sum_1^n (|u_n| + |v_n|) > U - \varepsilon.$$

劃分區間 $[a, b]$ 爲若干小區間，使其每一個閉的小區間 $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ 中只含有 $x_1, x_2, \cdots, x_M$ 中一個點，並且以這一點做 $[\alpha, \beta]$ 的一端．設 $r \leqslant M$，$\alpha \leqslant x_r$，則

$$|S(x_r) - S(\alpha)| = \Big|u_r + \sum_{\alpha < x_n < x_r} u_n + \sum_{\alpha \leqslant x_n < x_r} v_n\Big| \geqslant$$

$$\geqslant |u_r| - \sum_{\alpha < x_n < x_r} |u_n| - \sum_{\alpha \leqslant x_n < x_r} |v_n|.$$

由於區間 $\alpha \leqslant x \leqslant x_r$ 中不含有除 x_r 而外的 $x_1, x_2, \cdots x_M$ 中任何點，所以適合

$$\alpha \leqslant x_n < x_r$$

的 n 必大於 M．同樣，對於 $x_r \leqslant x \leqslant \beta$ 的小區間，成立着

$$|S(\beta) - S(x_r)| = \Big|\sum_{x_r < x_n \leqslant \beta} u_n + \sum_{x_r < x_n < \beta} v_n + v_r\Big| \geqslant$$

$$\geqslant |v_r| - \Big(\sum_{x_r < x_n \leqslant \beta} |u_n| + \sum_{x_r < x_n < \beta} |v_n|\Big),$$

其中的 $n > M$．因此

$$\sum |S(\beta) - S(\alpha)| \geqslant \sum_{r=1}^{M}(u_r, v_r) -$$

$$- \sum_{M+1}^{\infty}(|u_n| + |v_n|) > U - 2\varepsilon.$$

另一方面，由 $S(x)$的表示式，對於任何分點組，所對應的和决不超過 U. 所以 $S(x)$的全變差等於 $U = T(b)$. 以 x 代 b,即得 $T(x)$ 的表示式：

$$T(x) = \sum_{x_n \leqslant x} |u_n| + \sum_{x_n < x} |v_n|.$$

因此

$$2p(x) = T(x) + S(x) =$$

$$= \sum_{x_n \leqslant x} |u_n| + \sum_{x_n < x} |v_n| + \sum_{x_n \leqslant x} u_n + \sum_{x_n < x} v_n =$$

$$= 2\sum_{x_n \leqslant x} \max(0, u_n) + 2\sum_{x_n < x} \max(v_n, 0),$$

$$2n(x) = T(x) - S(x) =$$

$$= 2\sum_{x_n \leqslant x} \min(0, u_n) + 2\sum_{x_n < x} \min(0, v_n).$$

定理證畢.

引理 2. 設 $S(x)$是$[a, b]$上之一跳躍函數，跳躍點列是$\{x_n\}$，跳躍數列是$\{u_n\}$和$\{v_n\}$，則當 $x \bar{\in} \{x_n\}$ 時，x 是 $S(x)$之一連續點；又當 $x = x_n$ 時，

$$S(x_n) - S(x_n - 0) = u_n, S(x_n + 0) - S(x_n) = v_n,$$
$$n = 1, 2, \cdots.$$

這是可以利用上面"小區間法"來證明的：在(α, x_r)類型的小區間上，我們有不等式

$$|S(x_r) - S(\alpha) - u_r| < \varepsilon.$$

將 $\alpha \to x_r$，得到 $|S(x_r) - S(x_r - 0) - u_r| \leq \varepsilon$；$r = 1, 2, \cdots, M$. 由是

$$S(x_r) - S(x_r - 0) = u_r$$

對於一切 r 都成立. 同樣可以建立 $S(x_r + 0) - S(x_r) = v_r$，證明完畢.

在這些引理的基礎上，我們要建立下面的

定理 7. 有界變差的函數 $f(x)$ 是一連續函數 $g(x)$ 與一跳躍函數 $S(x)$ 之和——$g(x)$ 可以爲 0，$S(x)$ 也可以爲 0.

事實上，$f(x)$ 的不連續點 x_n 的全體成一可列點集 $\{x_n\}$. 置

$$u_n = f(x_n) - f(x_n - 0),\quad v_n = f(x_n + 0) - f(x_n).$$

以 $\{x_n\}$ 爲跳躍點列，$\{u_n\}$ 和 $\{v_n\}$ 爲跳躍數列，作跳躍函數 $S(x)$——由於 Σu_n 和 Σv_n 都是絕對收斂級數. 置 $g(x) = f(x) - S(x)$，就達到定理的證明.

系 假如 $f(x) = g(x) + S(x)$ 是一單調增加的函數. 那末 $g(x)$ 和 $S(x)$ 也都是單調增加的函數.

事實上，此時 $u_n \geq 0$，$v_n \geq 0$；所以 $S(x)$ 是一單調增加的函數. 當 $x \neq x_n (n = 1, 2, \cdots)$ 時，

$$g(x + 0) - g(x) = f(x + 0) - f(x) \geq 0.$$

假如 $x = x_n$，那末 $g(x_n + 0) - g(x_n) = 0$.

6. 導數的一般性質 設 $f(x)$ 是實變數 x 的實函數. 在一點 x，它有四個極值導數：$D^+f(x), \cdots, D_-f(x)$；稱其中兩個導數在同一方的——例如 $D^+f(x)$ 和 $D_+f(x)$——爲同側的兩個導數，而稱不在同一方的兩個導數——例如 $D_+f(x)$ 和 $D^-f(x)$——爲異側的兩個導數. 用這些名稱，我們可述下面的

導數定理 除開一個零集 E 中的點 x 而外（E 當然與 $f(x)$ 有關係），對於四個極值導數，不出如下的情況：兩個同側導數若不都等於一個有限數，則其中必有一個是無窮大，兩個異側導數若不相等則必一個是 $+\infty$，一個是 $-\infty$.

證明 事實上，我們只要證明定理的後半就够了。例如設 $D^+f(x)$ 和 $D_+f(x)$ 都是有限數。則當 $x \in E$ 時，由定理的後半，成立着

$$D^+f(x) = D^-f(x),\ D^+f(x) = D_-f(x);$$
$$D_+f(x) = D^-f(x),\ D_+f(x) = D_-f(x).$$

因此 $f'(x)$ 存在.

假如我們能證:除一零集而外,當 $D_-f(x) > -\infty$ 時,成立着

$$D_-f(x) = D^+f(x) < \infty. \tag{1}$$

那末定理就因此證明完畢。其實，对于函數 $-f(x)$，$f(-x)$，$-f(-x)$ 而言,從 $D^-f(x) < +\infty$, $D_+f(x) > -\infty$, $D^+f(x) < +\infty$ 分別得到

$$D^-f(x) = D_+f(x), D_+f(x) = D^-f(x),$$
$$D^+f(x) = D_-f(x).$$

設 $f(x)$ 的定義區是 (a, b). (a, b) 中 $D_-f(x) > -\infty$ 的 x 之全體爲 E,設 r 是 (a, b) 中的一個有理數,當 $r < x' < x$ 時,能使不等式

$$\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} > -n$$

成立的 x 之全體爲 $E_{n,r}$. 那末 $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{a<r<b} E_{n,r}$ 含有 E. 因此證明 $M \cdot E_{n,r}$ 是一零集就好了.

其實,我們只要證明 $|E_\infty| = 0$; 這是因爲對於函數

$$f(x + r) + nx$$

的 E_∞ 就是對於 $f(x)$ 的 $E_{n,r}$. 設 x_1 和 x_2 都屬於 E_∞, $x_1 < x_2$; 那末從

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$$

得 $f(x_1) < f(x_2)$. 所以 $f(x)$ 在 E_∞ 上是一單調增加函數,因此

$$f'_{E_{00}}(x)=\lim_{\substack{x'\to x\\ x\in E_{00}\\ x'\in E_{00}}}\frac{f(x')-f(x)}{x'-x}$$

在 E_{00} 中幾乎處處成立．現在假設 $x\in E_{00}$, $f'_{E_{00}}(x)$存在，且設 x 是 E_{00} 之一全密點，就是說，當含有 x 的區間 J 收斂於 x 時，極限

$$\lim\frac{\overline{JE_{00}}}{|J|}=1.$$

此地 $|J|$ 表示 J 的長，$\overline{M}$ 表示包含 M 的開集 O 的測度 $|O|$ 的下界，叫做 M 的外測度．

設 $x\in E_{00}$, $\xi_n<x$,

$$D_-f(x)=\lim_{\xi_n\to x}\frac{f(\xi_n)-f(x)}{\xi_n-x}.$$

於 ξ 的左方取一點 x_n 使 $x_n\in E_{00}$, $\dfrac{x_n-\xi_n}{x_n-x}\to 0$,那末從

$$\frac{f(\xi_n)-f(x)}{\xi_n-x}\geqslant\frac{f(x_n)-f(x)}{\xi_n-x}=$$

$$=\frac{x_n-x}{\xi_n-x}\cdot\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x}$$

得到 $D_-f(x)\geqslant f'_{E_{00}}(x)$. 同樣可證 $f'_{E_{00}}(x)\geqslant D^+f(x)$. 但是從 $f'_{E_{00}}(x)$的定義，不能不有

$$D_-f(x)\leqslant f'_{E_{00}}(x)\leqslant D^+f(x).$$

所以必須 $D_-f(x)=f'_{E_{00}}(x)=D^+f(x)$. 這樣一來，我們只要證明 E_{00} 中的非全密點成一零集就好了．這是密度定理的一個直接結果．

密度定理（勒貝格）．線性點集M中的一切點，幾乎點點是M的全密點．

證明　設 $M\subset(a,b)$, $a<x<b$. 所要證明的是函數$f(x)=\overline{M(a,x)}$ 的導數 $f'(x)$幾乎到處存在而等於1．設 O_n 是含有 M 之一開集，

$$\overline{O_n - M} < \frac{1}{2^n}, \ O_n \supset O_{n+1};$$

則 $|O_n| \to \bar{E}$. 設 $f_n(x) = \overline{O_n(a, x)}$, 則以增加函數爲項的級數

$$\sum^{\infty}(f_n(x) - f(x))$$

是收斂的. 從富弼尼的定理,知道 $f'_n(x) - f'(x) \to 0$. 但是 $f_n(x)$ 幾乎處處等於 1,所以 $f'(x)$ 幾乎處處等於 1. 證明完畢.

導數定理也可敘述爲如下的形式.

對於 (a, b) 上的任一有限函數 $f(x)$ 的導數,必有一個零集(或許是一空集) E. 當 $x \bar{\in} E$ 時,下述三種情況必居其一:

(一) $f'(x)$ 存在.

(二) 異側的兩個導數等於同一有限數; 還有兩個異側的導數,一個是 $+\infty$, 一個是 $-\infty$.

(三) 兩個上導數都等於 $+\infty$, 兩個下導數都等於 $-\infty$.

當 $f(x)$ 具有連續性的時候, 這個定理首先由當日瓦建立的[1], G.C. 楊格立刻把連續性除去[2], 但是她還假設 $f(x)$ 是一可測函數(可測函數的意義,下面有詳細的說明). 上面的導數定理,是由沙克思首先證明的[3].

單調函數之幾乎處處可以微分,容易從這個定理明白:設 $f(x)$ 是一單調增加的函數,則由

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geqslant 0,$$

知 $D_{\pm}f(x) > -\infty$. 因此(二)與(三)都不會實現, 所以 $f'(x)$ 幾乎處處存在.

系 假如 $f(x)$ 在它的定義區 $[a, b]$ 上,滿足李普雪茲條件,那

1) 當日瓦(A. Denjoy),(法國)數學期刊,(Journ. de Math.) (7) 1 (1915) 105—240.

2) 楊格(G. C. Young), 倫敦數學會誌(Proc. London Math. Soc.)(2) 15 (1916)360—384.

3) 沙克思(S. Saks), 數學基礎 (Fund. Math.) 5 (1924) 98—104.

末 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 中幾乎處處存在.

注意　本定理不能更事簡化:這就是說,(一)(二)(三)三種情形不可以省去一條.

(一)之不可以省去,明顯得很.

(二)之不可略,舉例如下:設 x 爲無理數時,$f(x)$ 等於 $2x$,當 x 爲有理數時,$f(x)$ 等於 $\frac{1}{2}x$.那末當 x 爲無理數時,

$$\frac{f(x')-f(x)}{x'-x}\begin{cases} = \dfrac{2x'-2x}{x'-x} = 2 & (x' \text{ 爲無理數}) \\ = \dfrac{\frac{1}{2}x'-2x}{x'-x} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}\dfrac{x}{x'-x} & (x' \text{ 爲有理數}) \end{cases}$$

故若 x 是一正無理數,則

$$D^+f(x) = D_-f(x) = 2,\ D_+f(x) = -\infty,\ D^-f(x) = +\infty;$$

又若 x 是一負無理數,則

$$D^-f(x) = D_+f(x) = 2,\ D_-f(x) = -\infty,\ D^+f(x) = +\infty,$$

同樣可證當 x 是一正有理數時,

$$D^-f(x) = D_+f(x) = \frac{1}{2},\ D_-f(x) = -\infty,\ D^+f(x) = +\infty;$$

若 x 是一負有理數,則

$$D^+f(x) = D_-f = \frac{1}{2},\ D_+f(x) = -\infty,\ D^+f(x) = +\infty.$$

(三)也不可以省去,例如 x 爲無理數時,$f(x)$ 等於 1;x 是一分母爲 $2^m (m = 1, 2, \cdots)$ 之有理數時 $f(x)$ 等於 2.在其他之有理數 x,$f(x)$ 等於 0,那末,當 x 爲無理數時.

$$\frac{f(x')-f(x)}{x'-x} = \pm\frac{1}{x'-x}.$$

故 $D^{\pm}f(x) = +\infty$,$D_{\mp}f(x) = -\infty$.因有理點是可列的,所以(三)幾乎處處成立.

7. 連續函數與微分　函數 $f(x)$ 在點 x 具有有限導數 $f'(x)$ 的

話，x 是 $f(x)$ 之連續點．說得更詳細點：

定理 1. 當 $x=x_0$ 時，若 $-\infty < D_{\pm}f(x) \leqslant D^{\pm}f(x) < \infty$，則必 $f(x_0)=f(x_0\pm 0)$。

證明 設 $x_n > x_0$, $x_n \to x_0$, 則

$$D_+f(x_0)=\underline{\lim}\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}\leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim}\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}\leqslant D^+f(x_0).$$

若 $D_+f(x_0)$ 與 $D^+f(x_0)$ 都是有限數，則當 n 甚大時，

$$(x_n-x_0)(D_+f(x_0)-1)\leqslant f(x_n)-f(x)\leqslant$$

$$\leqslant (x_n-x_0)(D^+f(x_0)+1).$$

故必 $f(x_n)\to f(x)$．由是 $f(x_0)=f(x+0)$．同樣可證

$$-\infty < D_-f(x_0)\leqslant D^-f(x_0) < \infty$$

含有 $f(x_0)=f(x_0-0)$．定理證畢．

此定理之逆，未必成立．例如 $f(x)=|x|^{1/3}$ 是一連續函數，但是

$$D^+f(0)=+\infty,\quad D_-f(0)=-\infty.$$

導數 $f'(x)\equiv 0$ 時，$f(x)$ 是一常數．此結果可拓廣如下：

定理 2. 在 $[a,b]$ 中之連續函數 $f(x)$．假如除一可列點集 M 中的點而外 $D^+f(x)$ 等於 0，那末 $f(x)$ 是一常數．

證明 假如 $f(x)$ 不是常數，那末 $[a,b]$ 中必有 c 如下：

$$f(c)\neq f(a).$$

今設 $f(c)-f(a)=p>0$ 取正數 $q<p$，又取正數 k 小於 $\dfrac{p-q}{c-a}$．作函數

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-k(x-a).$$

因 $\varphi(a)=0$, $\varphi(c)=p-k(c-a)>p-(p-q)=q$，故區間 (a,c) 中有 ξ 適合

$$\varphi(\xi)=q.$$

設此種 ξ 之上界爲 $\xi_0 = \xi_0(k)$，那末 $D^+\varphi(\xi_0) \geq 0$. 因之

$$D^+f(\xi_0) \geq k, \quad \xi_0 \in M.$$

若 $k' \neq k, 0 < k' < \dfrac{p-q}{c-a}$. 則 $\xi_0(k')$ 不等於 $\xi_0(k)$. 這是因爲從

$$\varphi(\xi_0(k)) = q = \varphi(\xi_0(k')) \text{ 與 } \xi_0(k) = \xi_0(k')$$

得 $k = k'$ 之故. 正數 k 在區間 $\left(0, \dfrac{p-q}{c-a}\right)$ 中是任意的，由是而得之 $\xi(k)$ 皆屬於 M，那末 M 不是可列點集了. 所以決無上述之 c，$f(x)$ 必爲常數. 定理證畢.

因 $D_+f(x) = -D^+(-f(x))$，故定理中之條件 $D^+f(x) = 0$ 可用 $D_+f(x) = 0$ 來代. 若以 $-x$ 代 x，則右方之導數 $D_+f(x)$，$D^+f(x)$，可易以左方之導數 $D_-f(x)$ 與 $D^-f(x)$. 由是得結果如下:

系　設 $f(x)$ 是在 $[a, b]$ 中之一連續函數.若四導數 $D^\pm_\pm f(x)$ 中有一個導數，除一可列點集，恆等於 0，則 $f(x)$ 是一常數.

連續函數可能處處無導數:

定理 3.　設 $0 < a < 1$，取奇數 b 大於 $\dfrac{1}{a} + \dfrac{3\pi}{2a}(1-a)$，則得一不可以微分的連續函數

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)^*.$$

證明　以連續函數爲項的級數 $\Sigma a^n \cos(b^n \pi x)$ 勻斂於 $f(x)$，所以 $f(x)$ 是一連續函數. 現在證明沒有一點 x，使 $f'(x)$ 存在. 由於 $f(-x) = f(x)$，$f(2) = f(0)$，所以 $f(x+2) \equiv f(x)$. 只要 $x > 0$，就有唯一的整數 C_n 適合

$$C_n - \frac{1}{2} \leq b^n x < C_n + \frac{1}{2},$$

置 $x_n = b^{-n}(C_n - 1)$，$x'_n = b^{-n}\left(C_n + \dfrac{1}{2}\right)$，則因

---

* 這是瓦也斯脫拉斯的例子.

$$0 < x - x_n < \frac{3}{2} b^{-n},\ 0 < x'_n - x < b^{-n},$$

故 $x_n \to x$, $x'_n \to x$. 置 $f(x, x') = \dfrac{f(x') - f(x)}{x' - x}$, 則

$$(x_m - x'_m) f(x_m, x'_m) = \Sigma_m + S_m.$$

此地

$$\Sigma_m = \sum_{m=0}^{m-1} a^n (\cos b^n \pi x_m - \cos b^n \pi x'_m),$$

$$S_m = \sum_{n=m}^{\infty} a^n (\cos b^n \pi x_m - \cos b^n \pi x'_m).$$

當 $n = m + r$, $r \geqslant 0$ 時, $\cos b^n \pi x_m = \cos b^n \pi (C_m - 1) = -(-1)^{C_m}$, $\cos b^n \pi x'_m = 0$, 所以

$$S_m = -a^m \sum_{r=0}^{\infty} a^r (-1)^{C_m} = \frac{-(-1)^{C_m} a^m}{1 - a}.$$

對於 Σ_m 中的項, 利用不等式 $|\cos x - \cos y| \leqslant |x - y|$, 得着

$$|\Sigma_m| \leqslant \sum_{n=0}^{m-1} \pi (x'_m - x_m)(ab)^n = \pi (x'_m - x_m)(\overline{ab}^m - 1)(ab - 1)^{-1}.$$

因 $ab - 1 > \frac{3}{2}\pi(1 - a)$, $x'_m - x_m = \frac{3}{2} b^{-m}$, 故得

$$f(x_m, x'_m) = \frac{(-1)^{C_m} 2(ab)^m}{3(1 - a)} + \theta \frac{2(ab)^m - 2}{3(1 - a)}, \qquad (1)$$

其中 $|\theta| < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 - a}{ab - 1} < 1$. 同樣, 置

$$\xi_m = b^{-m}\left(C_m - \frac{1}{2}\right),\ \xi'_m = b^{-m}(C_m + 1)$$

時, 得到

$$f(\xi_m, \xi'_m) = \frac{2}{3} \frac{1}{1 - a} \{-(ab)^m (-1)^{C_m} + \lambda (ab)^m - \lambda\}, \quad (2)$$

其中 $|\lambda| < \frac{1}{2}\pi(1 - a) < 1$.

若整數列 $\{C_n\}$ 中含有無數個的偶數, 則由 (1) 與 (2),

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, x'_n) = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} f(\xi_n, \xi'_n) = -\infty.$$

假如$\{C_n\}$中含有無數個的奇數,那末,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, x'_n) = -\infty, \quad \lim_{n\to\infty} f(\xi_n, \xi'_n) = +\infty.$$

但是假如$f'(x)$存在的話,這種現象決不會發生.一般地說:

定理 4. 導數$f'(x)$存在的充要條件是二重極限

$$\lim_{x'\to x, x''\to x} \frac{f(x') - f(x'')}{x' - x''} = \lim_{x'\to x, x''\to x} f(x', x'')$$

的存在,其中$x' < x < x''$.

事實上,兩正數$\frac{x''-x}{x''-x'}$與$\frac{x-x'}{x''-x'}$之和等於1,故由

$$f(x', x'') = \frac{f(x'') - f(x) + f(x) - f(x')}{x'' - x'} =$$

$$= f(x'', x)\frac{x''-x}{x''-x'} + f(x, x')\frac{x-x'}{x''-x'},$$

得

$$\min(f(x'', x), f(x, x')) \leqslant f(x', x'') \leqslant \max(f(x'', x), f(x, x')).$$

當$f'(x)$存在時,兩端的極限都等於$f'(x)$,因此上述之二重極限存在,其値爲$f'(x)$.反過來說,若上述之二重極限存在,其値爲l,則

$$\lim_{x''\to x}\lim_{x'\to x} f(x', x'') \text{ 與 } \lim_{x'\to x}\lim_{x''\to x} f(x', x'')$$

都存在,都等於l.換句話說:

$$f'_+(x) = f'_-(x) = l.$$

所以$f'(x) = l$.證明完畢.

當$f'(x) \geqslant 0$時,$f(x)$是一增加函數,此結果可拓廣如下:

定理 5. 設$f(x)$是在$[a, b]$中之一連續函數,若$D^+f(x) < 0$之x的全體成一可列點集E,那末$f(x)$是一增加函數.

證明 假如$f(x)$不是增加函數,則(a, b)中必有如下的兩點x', x'':

$$x' < x'',\ f(x') > f(x'').$$

設 $f(x') - f(x'') = p,\ 0 < q < p,\ 0 < k(x'' - x') < p - q$. 置

$$\varphi(x) = f(x') - f(x) - k(x - x'),$$

則 $\varphi(x') = 0,\ \varphi(x'') = p - k(x'' - x') > p - (p - q) = q$. 所以$(x', x'')$中必有 x 使 $\varphi(x) = q$. 今設此種 x 的上界爲 $\xi = \xi(k)$, 那末 $\varphi(\xi)$等於 q,

$$\frac{\varphi(\xi + h) - \varphi(\xi)}{h} > 0(\xi < \xi + h < x'').$$

由是 $D_+\varphi(\xi) \geqslant 0,\ D^+f(x) \leqslant -k$,因之 $\xi(k)$爲 E 之一點. 然而 k 可以在區間 $\left(0, \dfrac{p-q}{x''-x'}\right)$ 中任意變動, 相異之 k, 對應於不同的點 $\xi(k)$. 那末 E 必爲一不可列點集, 此與假設不相容, 故 $f(x)$ 是一增加函數. 證明完畢.

系 1 定理 5 中的条件 $D^+f(x) \geqslant 0$,可用 $D^-f(x) \geqslant 0$ 来代.

系 2 設 $f(x)$ 是在 $[a, b]$ 中的連續函數. 若 $D^+f(x)$ (或 $D^-f(x), D_+f(x), D_-f(x)$中之一個) 在$[a, b]$中之上界爲 Λ, 下界爲λ, 則

$$\lambda \leqslant \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} \leqslant \Lambda(a \leqslant x < x' < b).$$

證明 置 $\varphi(x) = f(x) - \lambda x$, 則 $D^+f(x) - \lambda \geqslant 0$, 所以 $\varphi(x)$ 是一增加函數. 由是得 $\varphi(x') \geqslant \varphi(x)$, 即 $\lambda(x' - x) \leqslant f(x') - - f(x)$. 同樣從函數

$$f(x) - \Lambda x$$

的單調減少性,得着 $f(x') - f(x) \leqslant \Lambda(x' - x)$. 證明完畢.

系 3 在系 2 的假設下, Λ 等於 $f(x', x) = \dfrac{f(x') - f(x)}{x' - x}$ 的上界, λ 等於 $f(x, x')$的下界.

證明 設 $f(x, x')$的上界, 下界爲 L, l. 由系 2,

$$\lambda \leqslant l \leqslant L \leqslant \Lambda.$$

要證明 $L \geqslant \Lambda$. $l < \lambda$. 當 Λ 爲 $-\infty$ 時，無待證明. 若 $\Lambda > -\infty$, 則對於 $p < \Lambda$,必有 x 使 $D^+f(x) > p$. 因之有 x' 適合 $f(x', x) > p$. 由是 $L \geqslant p, L \geqslant \Lambda$. 同樣可證 $l \leqslant \lambda$. 證明完畢.

定理 6. 連續函數 $f(x)$ 之一極值導函數——例如 $D^+f(x)$——在點 x_0 是連續的話，導數 $f'(x_0)$ 必存在.

證明 設 $D^-f(x)$在區間$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$中上界與下界是 Λ_δ 與 λ_δ. 從定理 5 的系 2.

$$\lambda_\delta \leqslant f(x, x') \leqslant \Lambda_\delta (x_0 - \delta \leqslant x < x' < x_0 + \delta).$$

所以 $\lambda_\delta \leqslant D^\pm_\pm f(x) \leqslant \Lambda_\delta$. 令 $\delta \to 0$, 則得 $D^+f(x_0) = \lim \Lambda_\delta = \lim \lambda_\delta$ 由是

$$D_+f(x_0) = D^-f(x_0) = D_-f(x_0) = D^+f(x_0).$$

證明完畢.

定理 7. 設連續函數$f(x)$在(a, b)中具有導函數 $f'(x)$. 若 $a < x' < x'' < b$, 則在 $f'(x')$ 與 $f'(x'')$間任何數 c 都是 $f'(x)$ 之值，詳言之，(x', x'')中有點 ξ 適合 $f'(\xi) = c$.

證明 設 $f'(x') < f'(x'')$. 置 $\varphi(x) = f(x) - cx$. 則

$$\varphi'(x') = f'(x') - c < 0, \varphi'(x'') = f'(x'') - c > 0,$$

設 $\varphi(x)$ 在(x', x'')中，在點 ξ 取最大值，則 $\varphi'(\xi) = 0$. 所以$f'(\xi)$ 等於 c. 定理證畢.

例 設 $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} (x \neq 0)$, $f(0) = 0$, 則 $f'(x)$ 處處存在. 在 $x = 0$, $f'(x)$雖有一不連續點，然 $f'(x)$在區間$\left(0, \frac{2}{\pi}\right)$中取$\left(0, \frac{4}{\pi}\right)$的一切數值.

定理 8. 若 $f(x)$ 是一連續函數，則其導函數 $D^\pm_\pm f(x)$ 之階級決不超過 2.

證明 設 $f(x)$之定義區是$[a, b]$. 爲便利計，假設

$$f(x) = f(a) \ (x < a), \ f(x) = f(b) \ (x > b).$$

設 n 是一正整數，當 $0<h<\frac{1}{n}$ 時，h 之函數

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\equiv\varphi(h)$$

之上界為 $\chi_n(x)$，那末 $\chi_n(x)\to D^+f(x)\,(n\to\infty)$. 設區間 $\left(0,\frac{1}{n}\right)$ 中一切有理數為 $r_1, r_2, \cdots$. 置

$$\varphi(r_\nu)=g_\nu(x),\ \max(g_1(x), g_2(x), \cdots g_m(x))=G_m(x),$$

則 $G_m(x)$ 都是 x 的連續函數. 由

$$\lim_{m\to\infty} G_m(x)=\chi_n(x),\ \lim_{n\to\infty}\chi_n(x)=D^+f(x),$$

知 $D^+f(x)$ 之階級不過 2. 證明完畢.

8. 偏微分 設 $n>1$，n 個變數的函數 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 的許多性質為 $f(x)$（一個變數的函數）所未備，然而往往於 $f(x_1, x_2)$（兩個變數的函數）可見其大概的情形. 本節專提 $f(x, y)$ 的初步性質，入後還有更進一步的議論.

假如兩個變數之函數 $f(x, y)$ 在點 (a, b) 是連續的話，那末一個變數的函數 $f(a, y)$ 在 $y=b$ 為連續，$f(x, b)$ 在 $x=a$ 為連續. 然而其逆不成立：例如

$$f(x, y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}\ (x^2+y^2>0),\ f(0, 0)=0,$$

則 $f(0, y)\equiv 0$, $f(x, 0)\equiv 0$, 故 $f(0, y)$ 在 $y=0$ 為連續 $f(x,0)$ 在 $x=0$ 為連續。置 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, 則 $f(x, y)$ 化為 $\sin 2\theta$. 當 $r\to 0$ 時，$f(x, y)$ 並無極限，故此函數在 $(0, 0)$ 是不連續的. 又如

$$f(0, 0)=0, f(x, y)=\frac{2xy^2}{x^2+y^4}\ (x^2+y^2>0)$$

則當 $r\to 0$ 時，$f(r\cos\theta, r\cos\theta)=r\sin\theta\sin 2\theta/(\cos^2+r^2\sin\theta)\to 0$ 然而 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 並不連續：設 $2\varepsilon<1$，欲使

$$|f(x, y)-f(0, 0)|<2\varepsilon,$$

必須 $r|\cos\theta|\sin 2\theta < \varepsilon\cos^2\theta + \varepsilon r^2\sin^4\theta$. 所以 $r\sin^2\theta$ 必須小於

$$|\cos\theta|\frac{1-\sqrt{1-4\varepsilon^2}}{2\varepsilon}$$

要決定與 θ 無關係的 r_0, 使 $|f(x, y)| < \varepsilon$ 當 $r < r_0$ 時成立，是不可能的.

當 $x \to a$, $y \to b$ 時, 二重極限 $\lim f(x, y) = b$ 存在的話，那末累次極限

$$\lim_{y\to a}\varliminf_{x\to a} f(x, y),\quad \lim_{y\to a}\varlimsup_{x\to a} f(x, y), \tag{1}$$

$$\lim_{x\to a}\varliminf_{y\to b} f(x, y),\quad \lim_{x\to a}\varlimsup_{y\to b} f(x, y), \tag{2}$$

都存在, 其值爲 l. 這是從

$$|f(x, y) - l| < \varepsilon,\ (x-a)^2 + (y-b)^2 < \delta^2$$

容易知道的結果, 但是上記四個極限都存在時, 未必互相等；相等時, 二重極限未必存在, 例如

$$f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}\ (x^2 + y^2 > 0),$$

在 $x = a = 0$, $y = b = 0$; (1)的兩個累次極限爲 -1, (2)的兩個極限值等於 1. 又如

$$f \equiv f(x, y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}\ (x^2 + y^2 > 0)$$

則 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f = \lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f = 0$. 故(1), (2)中四個極限皆存在且相等. 然由

$$\lim_{x\to 0} f(x, x) = 1,$$

知二重極限 $\lim f(x, y)(x \to 0, y \to 0)$並不存在.

固定 y 之值, 則 $\varphi(x) = f(x, y)$有四個導數 $D^{\pm}_{\pm}\varphi(x)$. 當

$$D^+\varphi(x) = D_-\varphi(x) = D^-\varphi(x) = D_+\varphi(x)$$

時, 其值爲 $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x} = f_x(x, y)$, 此即關於 x 第一次的偏導數. 置

$$\rho = \sqrt{h^2 + k^2},\ \Delta f = f(x+h, y+k) - f(x, y).$$

當 $\rho \to 0$ 時,假如有常數 A 與 B 適合 $\Delta f = Ah + Bk + 0(\rho)$,稱函數 $f(x, y)$ 在點 (x, y) 可以完全微分. 此時

$$\frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = A + o(1),$$

故 $A = \frac{\partial f}{\partial x}$. 同樣可證 $B = \frac{\partial f}{\partial y}$. 置 $h = \rho\cos\alpha,\ k = \rho\sin x$,則得

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta f}{\rho} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha. \tag{1}$$

這是在 $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ 方向的偏導數. 故當 $f(x, y)$ 在 (x, y) 可以完全微分的時候, $f(x, y)$ 關於任何方向的偏導數都存在. 其逆亦眞. 事實上,(1)與

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\rho\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\rho\sin\alpha + o(\rho)$$

等價. 完全微分可能時,稱 $\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k$ 爲 f 的全微分,用記號 df 表示它. 特別置 $f \equiv x$ 或 $f \equiv y$,得 $dx = h,\ dy = k$. 故全微分 df 可以寫成

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

定理 1. 設 f_x 與 f_y 在以 (x, y) 爲中心之一圓中存在. 假如 f_x (或 f_y) 在點 (x, y) 是連續的話,那末 $f(x, y)$ 可以完全微分.

證明 $\Delta f = \{f(x+h, y+k) - f(x, y+k)\} +$

$$+ \{f(x, y+k) - f(x, y)\}$$

中之末項等於 $kf_y(x, y) + o(k)$. 由中值定理,第一項等於

$$hf_x(x+h, y+k).$$

因 f_x 在 (x, y) 爲連續, 所以此式等於 $hf_x(x, y) + o(h)$. 由是得全微分

$$df = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy.$$

定理證畢.

所宜留意的，全微分 df 之存在，限於 f 在點 (x, y) 完全可以微分時. 假如僅僅乎 $f_x(x_0, y_0)$ 與 $f_y(x_0, y_0)$ 存在，尚不能斷言 $f(x, y)$ 在點 (x_0, y_0) 有全微分. 例如

$f(x, y) = \sqrt{|xy|}$, $f_x(0, 0) = f_k(0, 0) = 0$, 然而 df 在 $(0, 0)$ 並不存在；事實上，當 $h \to 0$, $k \to 0$ 時，

$$f(\theta + h, \theta + k) - f(0, 0) = \sqrt{|hk|}$$

不等於 $o(\sqrt{h^2 + k^2})$.

微分的順序 偏導函數 $f_x(x, y)$ 假如關於 y 可以施行偏微分的話，那末有如下的寫法：

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = f_{xy} = f_{xy}(x, y).$$

同樣可定 $f_{yx}(x, y)$ 的意義. 所以，f_{xy} 與 f_{yx} 並不相同，實際上縱使 f_{xy} 與 f_{yx} 都存在，兩者未必相等. 例如

$$f(0, 0) = 0,\ f(x, y) = xy\,\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\ (x^2 + y^2 > 0),$$

則因

$$\frac{f(h, y) - f(0, y)}{h} = y\,\frac{h^2 - y^2}{h^2 + y^2},$$

$$\frac{f(x, h) - f(x, 0)}{k} = x\,\frac{x^2 + k^2}{x^2 + k^2},$$

$f_x(0, y) = -y$, $f_y(x, 0) = x$. 故由

$$\frac{f_x(0, k) - f_x(0, 0)}{k} = \frac{-k}{k} = -1,$$

$$\frac{f_y(k, 0) - f_y(0, 0)}{h} = \frac{h}{h} = 1,$$

得 $f_{xy}(0, 0) = -1$, $f_{yx}(0, 0) = 1$, 兩者並不相等.

但是在適當的情況下，f_{xy} 與 f_{yx} 往往相等. 今舉其最簡便的條件於下：

定理 3. 假如 f_{xy} 與 f_{yx} 在區域 D 上都是連續的，那末兩者相

等.

證明 固定 D 中一點 (a, b), 證明 $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ 好了. 置

$$\Delta = f(a+h, b+k) + f(a, b) - f(a+h, b) - f(a, b+k),$$

$$\varphi(x) = f(x, b+k) - f(x, b),$$

則由中值定理,

$$\Delta = \varphi(a+h) - \varphi(a) = h\varphi'(a+\theta h)$$
$$= hf_x(a+\theta h, b+k) - kf_x(a+\theta h, b),$$

其中 θ 的絕對值小於 1. 再用中值定理,

$$\Delta = hkf_{xy}(a+\theta h, b+\theta' k)(|\theta| < 1, |\theta'| < 1).$$

因 f_{xy} 在(a, b)是連續的, 故當 $h \to 0$, $k \to 0$ 時 $\dfrac{\Delta}{hk} \to f_{xy}(a,b)$.

交換 x 與 y 的順序,則得

$$\Delta = khf_{yx}(a+\delta' h, b+\delta k)(|\delta| < 1, |\delta'| < 1).$$

所以又得着 $\dfrac{\Delta}{hk} \to f_{yx}(a, b)$. 因此 $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$. 證明完畢.

細察結果 $\dfrac{\Delta}{hk} \to f_{xy}(a, b)$的成立,光是用了下面兩個條件:

(i) $f_x(x, y)$ 與 $f_{xy}(x, y)$ 在 $x=a, y=b$ 之一環境中存在.

(ii) $x=a, y=b$ 是 $f_{xy}(x, y)$之一連續點.

假如(iii) $f_y(x, b)$在 $x=a$, 的環境中又存在,那末

$$\frac{\Delta}{hk} = \frac{1}{h}\left\{\frac{f(a+h, b+k) - f(a+h, b)}{k} - \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k}\right\}$$

$$\to \frac{f_y(a+h, b) - f_y(a, b)}{h} \quad (k \to 0).$$

然而由(i)與(ii)得着 $\dfrac{\Delta}{hk} \to f_{xy}(a, b)$, 所以

$$f_{xy}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f_y(a+h, b) - f_y(a, b)}{h}.$$

右端的極限既然存在，其值必為 $f_{yx}(a, b)$. 由是定理 3 可改進如下：

定理 在條件(i),(ii),(iii)之下,定理 3 之結論也成立.

第六章習題

1. 設 $f(0)=0$, $f(x)=x\left(1+\frac{1}{3}\sin\log x^2\right)(x \neq 0)$. 證明 $f(x)$是一連續函數,但是$f'(0)$並不存在.

2. 設 $f(0)=0$, $f(x)=\frac{1}{\log x^2}$,問 $f'(0)$是否存在?

3. 設 $f(x)$在$[a, b]$具有有限導函數 $f'(x)$, 證明 $f'(x)$ 是一概連續函數.

4. 設E是$[0, 1]$中的康妥點集, $\{a_n, b_n\}$是E的餘區間集. 設

$$f(x)=0, \quad x \in E;$$

$$f(x)=\frac{1}{b_n-a_n}\sqrt{(x-a_n)(b_n-x)}, a_n<x<b_n$$

求出 $D^+f(x)$, $D^-f(x)$, $D_-f(x)$.

5. 證明

$$f(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt\ (x>0)$$

是一凸性函數.

6. 凸閉曲綫幾乎到處有切綫.

7. 設 $0<a<1$, $b=4m+1(m=1, 2, \cdots)$. 證明連續函數

$$f(x)=\Sigma a^n\sin(b^n\pi x), g(x)=\Sigma(-a)^n\sin(b^n\pi x)$$

處處不可以微分.

8. 設 $0<a<1$, b 是一奇數, $ab>1+\frac{7}{2}\pi$. 證明

$$\Sigma a^n |\sin b^n \pi x|$$

是一不可以微分的連續函數.

9. 設$\{x\}$是 x 與最近於 x 之整數的距離. 證明

(i) $\{x\}$是以 1 爲週期的週期函數,當 $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ 時,其值是 x,當 $\frac{1}{2} < x \leqslant 1$ 時, $\{x\} = 1 - x$;

(ii) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{10^n x\}}{10^n}$ 是一連續函數;

(iii) $f'(x)$到處不存在.

這是范寶伐爾敦(Van Der Waerden)的函數,見德國數學時刋第卅二卷.

10. 設 $\varphi(x) = 1 + x \sin \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$, $\varphi(0) = 1$,

$$f(x) = \sqrt{x}\,\varphi(x)(x \geqslant 0),\ f(x) = -\sqrt{-x}\,\varphi(x)(x < 0).$$

研究 $f(x)$的導數的存在問題.

11. 設 $M = (D^- f(x) = 0, a < x < b)$, $f(x)$是(a, b)中之一連續函數. 假如 $(a, b) - M$是一零集,我們能斷定 $f(x)$是一常數否?

12. 設 $f(x, y)$是矩形 $Q(a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d)$ 上的函數,它是 x 的連續函數,也是 y 的連續函數. 設

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n},\ k = 0, 1, 2, \cdots, n;$$

$$f_n(x, y) = f(x_{k-1}, y) + \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \times$$

$$\times \{f(x_k, y) - f(x_{k+1}, y)\}\quad (x_{k-1} \leqslant x < x_k).$$

證明 $f_n(x, y)$是 Q 上之一連續函數, 當 $n \to \infty$ 時, 它收斂於 $f(x, y)$.

13. 設 $f(x_1, x_2, x_3)$的定義區是 $P(a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1, a_2 \leqslant x_2 \leqslant b_2,$

$a_3 < x_3 < b_3$)，它是 x_k 的連續函數 ($k = 1, 2, 3$)。問在 P 上，有連續函數列 $f_n(x_1, x_2, x_3)$($n = 1, 2, \cdots$)收斂於 $f(x_1, x_2, x_3)$ 否？

14. 設 $f(0, y) = 0$, $f(x, y) = x \sin\left(4 \arctan \dfrac{y}{x}\right)(x \neq 0)$。證明

$$f_x(0, 0) = f_y(0, 0),$$

但是 df 在 $x = 0$, $y = 0$ 並不存在。

第 七 章

點 集 的 測 度

1. 測度問題 E_1 中的區間(a, b)是有長 $b-a$ 的，E_2 中的矩形是有面積的，然則對於 E_n 中之一點集 M，如何規定 M 所佔的"測度"呢？假如M是一室

$$a_k \leqslant x_k \leqslant b_k \quad (k=1, 2, \cdots, n)$$

那末我們可以用乘積$(b_1-a_1)\cdots(b_n-a_n)$來表示M的測度 $|M|$，對於E_n 中一般點集M的測度$|M|$ 我們要求它滿足如下的幾個條件：

(i) $|M| \geqslant 0$,

(ii) 若 $M \subseteq A+B+C+\cdots$，則 $|M| \leqslant |A|+|B|+ +|C|+\cdots$;

(iii) 若 $A_k \subseteq M (k=1, 2, \cdots)$，$A_kA_j=0 (k \neq j)$則$|M| \geqslant \geqslant \Sigma |A_k|$;

(vi) 可以符合的兩點集，其測度相等．換言之：設 $A \sim B$，當 A 中之兩點 a, a' 對應於 B 的兩點 b, b' 時，a 與 a' 的距離等於 b 與 b' 的距離，那末 $|A|=|B|$.

(v) 單位室的測度等於 1．意即：M 是適合

$$0 \leqslant x_k \leqslant 1 \quad (k=1, 2, \cdots, n)$$

的點$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的全體時，$|M|=1$.

具有此五條的測度，是否可以定義？應該如何定義？這就是測度問題.

注意 (ii) 與 (iii) 含有下面的結果：若 $A_kA_j=0 (k \neq j)$ $M=\sum_1^\infty A_k$，那末 $|M|=|A_1|+|A_2|+\cdots$.

若 $A \subset B$, 則 $|A| \leqslant |B|$, 此由於(ii). 所以 $|M|$ 是 M 的增加"函數".

首先試創測度定義的, 是漢革耳[1]他考察區間(a, b)中的點集 M, 將(a, b)分爲 n 等分, 除去其所得小區間之不含有 M 的點的; 加其所餘諸區間 B_n 之長得全長 L_n, 名 $\lim L_n$ 爲M之容積. 康妥將漢革耳的思想拓廣之於 E_n 中的點集. 漢革耳的容積,其適用範圍之不廣, 可於下例明白. 設 A 是$[0, 1]$中有理點的全體, B 是$[0, 1]$中無理點的全體, A 與 B 的容積都是 1, 然 $A+B=[0, 1]$, 所以容積的概念不合要求(iii).

若當[2] 對於 B_n 中的區間, 取其完全含在 M 中的,設這種區間全部爲 C_n, C_n 之全長爲 l_n, 那末

$$l_{n-1} \leqslant l_n \leqslant L_n \leqslant L_{n-1} (n = 2, 3, 4, \cdots).$$

稱 $\lim L_n$ 爲 M 之外容, $\lim l_n$ 爲 M 之內容,當外容與內容相等時, 稱 M 依若當的方法, 是可測的, 稱其內容或外容爲 M 之若當測度. 在上述之 A 與 B, 其外容都是 1, 內容都是 0; 所以依若當的測度法, A 與 B 都是不可測的.

若當的測度定義,應用不廣; 下文詳述勒貝格的測度論.

2. 勒貝格測度 平面上之一直綫分 $0 \leqslant x \leqslant 1$, $y = 0$, 其長爲 1, 其面積是 0, 所以討論某點集的測度,必須就此點集所在之空間立論; 空間若異,雖同一點集,可能有不同的測度,我們首先建立直綫上的測度論——"綫性測度".

設M是區間(a, b)中之一點集, O 是包含 M 之一開集,此種 O 不止一個,當 O 變動時, 稱 $|O|$ 的下界爲 M 的外測度, 以 $\overline{M}$ 表示 M 的外測度,這是在前章已經提過的. 顯然,

$$0 \leqslant \overline{M} \leqslant b - a;$$

當 $M \subset A$ 時, $\overline{M} \leqslant \overline{A}$. 寫$(a, b) - M = C(M)$, 稱

1) 漢革耳(Hankel, 1882).

2) 若當(Jordan), 見其所著的"解析教程"第一卷.

$$b - a - \overline{C(M)}$$

爲M的內測度,以$\underline{M}$記之. 假如$\overline{M} = \underline{M}$,則稱$M$是一可測點集——依勒貝格的意義是可測的. 稱

$$\overline{M} = \underline{M} = |M|$$

爲 M 的測度,前章對於開集 $O = \Sigma(a_n, b_n)$,以級數

$$\Sigma(b_n - a_n)$$

之和爲 $|O|$;依照本節,此級數之和當爲 $\overline{O}$,但是下文將證

$$\underline{O} = \overline{O}$$

對於任何開集 O 成立,所以不會發生不合理之事.

定理 1. 可測點集之餘集,也是可測的.

證明 設 $C(M) + M = (a, b)$. 當 $\overline{M} = \underline{M} = b - a - \overline{C(M)}$ 時,$\overline{C(M)} = (b - a) - \overline{M} = \underline{C(M)}$. 故 $|C(M)|$ 存在. 定理證畢.

定理 2. 點集之外測度不小於其內測度.

證明 設開集 O_1 含有 M,開集 O_2 含有 $C(M)$,則 $O_1 + O_2$ 含有(a, b). 因之,從

$$\overline{O}_1 + \overline{O}_2 \geqslant b - a$$

得 $\overline{M} + \overline{C(M)} \geqslant b - a$, 即 $\overline{M} \geqslant \underline{M}$. 定理證畢.

系 可列點集之測度等於0.

定理 3. 設 E 是含在點集 M 中之閉集,則 $\underline{E}$ 的上界等於 $\underline{M}$.

證明 $E \subseteq M$ 故 $C(E) \supseteq C(M)$. $C(E)$是一開集,故

$$\overline{C(E)} \geqslant \overline{C(M)},\ b - a - \overline{C(E)} \leqslant b - a - \overline{C(M)}.$$

$$\underline{E} \leqslant \underline{M}. \tag{1}$$

加入 (a, b)之兩端於 $C(M)$ 而得點集 B, $B + M = (a, b)$ 設開集 $O_1 \supseteq B$, $\overline{O}_1 < \overline{B} + \varepsilon(\varepsilon > 0)$. 閉集

$$C_1 = (a, b) - O_1 = B - O_1 + M$$

含在 M 中,它的餘集

$$C(G) = (a, b) - \{(a, b) - O_1\}$$

含在 O_1 中，所以

$$C(C_1) \leqslant \bar{O}_1 < \bar{B} + \varepsilon = \bar{C}(M) + \varepsilon.$$

由是 $\underline{C_1} \geqslant \underline{M} - \varepsilon$. 令 $\varepsilon \to 0$，知 $\underline{C_1}$ 的上界不小於 $\underline{M}$. 又由 (1)，知 $\underline{C}$ 的上界等於 $\underline{M}$. 定理證畢.

定理 4. 設 $A + B = (a, b)$, $A \cdot B = 0$ A 成一可測點集之充要條件是：對於 $\varepsilon > 0$，有開集 $O_A \supset A$，又有開集 $O_B \supset B$，使 $\overline{O_A \cdot B_B} < \varepsilon$.

證明 先證條件的充足性：設 $O_A + O_B = (a, b)$，則因

$$\bar{O}_A + \bar{O}_B = b - a + O_A \cdot O_B,$$

故 $\bar{A} + \bar{B} \leqslant b - a + O_A \cdot O_B < b - a + \varepsilon$.

令 $\varepsilon \to 0$，得 $\bar{A} + \bar{B} \leqslant b - a$，即 $\bar{A} \leqslant \underline{A}$，由定理 2，$\bar{A} \geqslant \underline{A_1}$. 故必

$$\bar{A} = \underline{A} = |A|.$$

次證條件的必要性：若 $|A|$ 存在，則由定理 1，$|B|$ 亦存在，兩者之和等於 $b - a$. 對於 $\varepsilon > 0$，有如下的開集 O_A 與 O_B:

$$O_A \supset A,\ O_B \supset B,\ \bar{O}_A < |A| + \varepsilon,\ \bar{O}_B < |A| + \varepsilon.$$

故 $\overline{O_A \cdot O_B} = \bar{O}_A + \bar{O}_B - (b - a) < |A| + |B| + 2\varepsilon - (b - a) = 2\varepsilon$. 定理證畢.

定理 5. 點集 M 是可測的充要條件如下：對於 $\varepsilon > 0$，有開集 O 包含 M，又有含在 M 之中閉集 C 滿足

$$\bar{C} - \underline{C} < \varepsilon.$$

證明 若 $|M|$ 存在；則由定理 3，M 中有閉集 C，其內測度

$$\underline{C} > |M| - \varepsilon.$$

又有包含 M 中的開集 $\bar{O}$，其外測度 $\bar{O} < |M| + \varepsilon$，故 $\bar{O} - \underline{C} < 2\varepsilon$.

次證條件的充足性：由 $\bar{O} - \underline{C} < \varepsilon$，得 $\bar{A} - \underline{A} \leqslant \varepsilon$.

令 $\varepsilon \to O$，得 $\bar{A} \leqslant \underline{A}$，由定理 2，$\bar{A} = \underline{A}$. 定理證畢.

定理 6. 閉集與開集都是可測點集.

證明 設 O 是 (a, b) 中之一開集. 將 O 寫成不相重疊的區間的和：

$$O = \Sigma(a_n, b_n).$$

取N使$\sum_{N+1}^{\infty}(b_n - a_n) < \frac{1}{2}\varepsilon$. 又取正數$\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_N$適合

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_N = \frac{1}{4}\varepsilon.$$

閉集$C = \sum_{n=1}^{\infty}[a_n + \varepsilon_n, b_n - \varepsilon_n]$是含在$O$中的. 現在

$$\overline{O} - \underline{C} = \sum_{N+1}^{\infty}(b_n - a_n) + 2\sum_{1}^{N}\varepsilon_n < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

由定理5. $\overline{O} = \underline{O}$. 故凡開集是可測的.

閉集是開集的餘集, 所以閉集也是可測的 (定理1). 定理證畢.

利用這些定理, $\overline{M}$與$\underline{M}$之定義可以說得簡單些:

定義 設M是一點集,包含M之開集的測度,其下界就是M的外測度. 含在M中之閉集的測度,其上界就是M的內測度.

零集與疏朗點集 可列點集是一零集(測度為O的集), 然零集未必為可列集. 例如康妥之逐次三分的疏朗完全點集, 其勢是連續點集的勢 (大於$\aleph_0$) 第三章 §7), 其測度等於0. 事實上, 它的餘集的測度等於

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \cdots = \frac{1}{3} \quad \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1.$$

但是任意之疏朗點集的測度未必是0. 例如設m是一正整數, 分$[0.1]$為m等分, 去其最右區間之所有的內點, 將其餘$m-1$個區間各等分為m^2個小區間且各去其最右區間中一切內點. 如是繼續進行以至無限. 遺留下來的一切點, 成一點集M. 顯然, M是一疏朗閉集. 但是

$$|M| = \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{1}{m^2}\right)\left(1 - \frac{1}{m^3}\right)\cdots >$$

$$> 1 - \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3} + \cdots\right) = 1 - \frac{1}{m-1},$$

當 m 甚大時，$|M|$ 甚近於 1.

3. 可測點集之和集與通集

定理 1. 設 $A+B=M,\ A\cdot B=O,\ M\subset(a,b)$。假如 $|A|$ 和 $|B|$ 都存在，那末 $|M|$ 也存在而等於 $|A|+|B|$.

證明 對於 $\varepsilon>O$，取如下的開集 O_A, O_B, O'_A, O'_B：$O_A\supset A$, $O'_A\supset C(A), O_B\supset B, O'_B\supset C(B)$,

$$|O_AO'_A|<\varepsilon,\ |O_BO'_B|<\varepsilon.$$

置 $O=O_A+O_B,\ O'=O'_A\cdot O'_B$. 因 $M\supset A$, 故

$$C(M)\subset C(A)\subset O'_A.$$

同樣，$C(M)\subset C(B)\subset O'_B$ 故 $C(M)\subset O'_AO'_B=O'$. 然由

$$O\cdot O'=O'_AO'_B(O_A+O_B)\subseteq O_AO'_A+O_BO'_B,$$

知 $|OO'|<2\varepsilon$, ε 是任意的正數，故由前節定理 4，從 $O\supset M$, $O\supset C(M)$ 知道 M 是一可測點集.

次證 $|M|=|A|+|B|$. 要證此等式，證明 $|M|\geqslant|A|+|B|$ 好了. 這就是要證明

$$(b-a)-|C(M)|\geqslant\{(b-a)-|C(A)|\}+$$
$$+\{(b-a)-|C(B)|\}.$$

簡化後，要證明的是：

$$|C(M)|\leqslant|C(A)|+|C(B)|-(b-a). \qquad (1)$$

用上面的 O'_A 與 O'_B 等記號，則得

$$C(M)=C(A+B)=C(A)\cdot C(B)\subset O'_AO'_B.$$

因 $C(A)$ 包含 B, 故從

$$C(A)+C(B)\supset B+C(B)\supset(a,b),$$

得到

$$|O'_A|+|O'_B|\geqslant b-a+|O'_AO'_B|.$$

因此

$$|C(M)|\leqslant|O'_A|+|O'_B|-(b-a).$$

由是得(1). 定理完畢.

系 1 設 $A_k \cdot A_j = O(k \neq j, k, j = 1, 2, \cdots, n)$. 若 A_k 都是可測的，則

$$|A_1 + A_2 + \cdots + A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|.$$

系 2 從可測點集 A 除去一可測點集 B，所餘的點集 $A - B$ 也是可測的.

證明 因 $C(A - B) = B + C(A)$ 之故. 證明完畢.

系 3 兩個可測點集 A 和 B 的通集 AB 也是可測的.

證明 $C(A) + C(B) = C(AB)$. 證明完畢.

系 4 若 $A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ 中各項都是可測點集，那末 A 也是可測的.

證明 因

$$A = A_1 + (A_2 - A_1 A_2) + \cdots + (A_n - A_n(A_1 + \cdots + A_{n-1}))$$

故由系 1，系 2，系 3 知系 4 為眞. 證明完畢.

定理 2. 設 $A_1, A_2, \cdots$ 都是 (a, b) 中的可測點集，那末 ΣA_n 也是可測點集. 假如其中任何兩集不相交，那末

$$|\Sigma A_n| = \Sigma |A_n|.$$

證明 首先建立定理的後半，置 $\Sigma A_n = A$，則 $\overline{A} \leqslant \Sigma |A_n|$. 由於 ΣA_n 中任何兩項不相交，所以證明 $\underline{A} \geqslant \Sigma |A_n|$ 好了. 置

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n = S_n.$$

則 $S_n \subseteq A, C(S_n) \supseteq C(A)$; $|C(S_n)| \geqslant \overline{C(A)}$. 因此

$$(b - a) - |C(S_n)| \leqslant (b - a) - \overline{C(A)}.$$

即 $|S_n| \leqslant \underline{A}$，或 $|A_1| + \cdots + |A_n| \leqslant \underline{A}$(定理 1 的系 1). 令 $n \to \infty$，則得

$$\Sigma |A_n| \leqslant \underline{A}.$$

在一般的情況，由於

$$A = \Sigma A_n = A_1 + \sum_{n=2}^{\infty}(A_n - A_n(A_1 + \cdots + A_{n-1})),$$

所以 A 是可測的. 定理证毕.

定理 3. 設 $A_1, A_2 \cdots$ 都是 (a, b) 中的可測點集，那末通集 ΠA_n 也是可測的。

證明 因 $C(\Pi A_n) = \Sigma C(A_n)$，故由定理 2，$C(\Pi A_n)$ 是一可測點集，因之 ΠA_n 是可測的。定理證畢。

定義 設 $A_n (n = 1, 2, \cdots)$ 是一點集敘列。元素屬於無數個 A_n 時這種元素的全體成一點集，稱此點集爲 $\{A_n\}$ 之優限點集。元素屬於幾乎全部的 A_n 時，這種元素的全體成一點集，稱此點集爲 $\{A_n\}$ 之劣限點集。點集 S 包含幾乎全部 M 的元素之意，就是 M 中元素不屬於 S 的，不過有限個。

由是，$(A_1 + A_2 + \cdots)(A_2 + A_3 + \cdots)(A_3 + A_4 + \cdots)\cdots$ 是 $\{A_n\}$ 的優限點集，記之以

$$\overline{\lim}\, A_n = \prod_{n=1}^{\infty} (A_n + A_{n+1} + \cdots).$$

$A_1 A_2 A_3 \cdots + A_2 A_3 A_4 + \cdots$ 是 $\{A_n\}$ 劣限點集，記之以

$$\underline{\lim}\, A_n = \sum_{n=1}^{\infty} A_n A_{n+1} A_{n+2} \cdots.$$

由此定義和定理 2 與定理 3，得

定理 4. 可測點集敘列的優限點集和劣限點集，都是可測的。

對於開集與閉集，施行'和'(相加)'通'(相乘)兩種手續有限回乃至可列無限回，所得之結果，是一波雷耳點集，我們可述：

定理 5. 一切波雷耳點集都是可測的[1]。

定理 6. 設 M 是一可測點集，則必有波雷耳點集 B 包含 M，又有波雷耳點集 B_1 含在 M 中，而適合

$$|B_1| = |B| = |M|.$$

證明 對於 n，有如下的開集 O_n，$O_n \supset M$ 且

1) 可測點集未必是波雷耳集，首先舉這樣實例的是蘇士林(M. Я. Суслин)(1894—1919)。

$$|O_n| - |M| < \frac{1}{n}.$$

通集 ΠO_n 是包含 M 之一波雷耳點集 B, 所以 $|M| \leqslant |B|$. 但是

$$B \subset O_n, |B| \leqslant |O_n| < |M| + \frac{1}{n}$$

對於一切 n 成立,所以 $|B| \leqslant |M|$,由是 $|M| = |B|$.

對於 n, 有含在 M 中的閉集 C_n 適合 $|C_n| > |M| - \frac{1}{n}$波雷耳點集

$$B_1 = C_1 + C_2 + \cdots$$

是含在 M 中的, 其測度 $|B_1| \geqslant |C_n| > |M| - \frac{1}{n}$ 故必 $|B_1| = |M|$ 定理證畢.

4. 不可測的有界點集 點集不一定依照勒貝克的意義具有測度, 我們用維太利[1] 的例子來說明此事. 設 $0 < \alpha < 1$, α 是一無理數,設

$$0 \leqslant x < 1,$$

$((x))$是具有形式 $x + m\alpha + n(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$的一切數所成之集. 設$((x))$與$[0, 1)$的通集爲 $A(x)$. 那末, $A(x)$中之任一點,僅能對應於一組之 m, n. 事實上, 因 α 是一無理數,關係

$$x + m \cdot \alpha + n = x + m'\alpha + n'$$

含有 $m = m', n = n'$. 應用選取公理, 於每一點集 $A(x)$, 固定一點 x', 使當

$$A(x) \equiv A(x_1)$$

時, $x' = x_1'$: 而 $x' = x + m(x)\alpha + n(x)$.

設 k 是一整數,適合 $m(x) = k$ 的 x 之全體是一點集 A_k. 當 $k \neq k'$ 時, A_k 與 $A_{k'}$ 不相交,所以

---

1) Vitali.

$$[0, 1) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_k.$$

設 A_k 在區間 I 中的部分為 I_k，我們證明

$$[0, 1 - \alpha)_k \equiv [\alpha, 1)_{k-1}, \tag{1}$$

$$[1 - \alpha, 1)_k \equiv [0, \alpha)_{k-1}, \text{（“}\equiv\text{”是符合的意思）}. \tag{2}$$

設 $x \in [0, 1 - \alpha)_k$，則 $\alpha \leqslant x + \alpha < 1$．故

$$((x + \alpha)) = ((x)), A(x - \alpha) = A(x).$$

因之 $x' = (x + \alpha)'$．即

$$x + m(x)\alpha + n(x) = (x + \alpha) + m(x + \alpha) \cdot x + n(x+\alpha).$$

然 x 是 A_k 中的一點，故 $m(x) = k$，

$$k\alpha + n(x) = (m(x + \alpha) + 1)\alpha + n(x + \alpha),$$

$$k = m(x + \alpha) + 1, m(x + \alpha) = k - 1,$$

由是 $x + \alpha$ 屬於 A_{k-1}，其值不小於 α，所以

$$x + \alpha \in [\alpha, 1)_{k-1}. \tag{3}$$

次設 $y \in [\alpha, 1)_{k-1}$，則 $0 \leqslant y - \alpha < 1 - \alpha$．由 $((y - \alpha)) = ((y))$，得 $y' = (y - \alpha)'$，故

$$x + m(y)\alpha + n(\alpha) = (y - \alpha) + m(y - \alpha)\alpha + n(y - \alpha).$$

所以 $m(y - \alpha) = k$，由是

$$y - \alpha \in [0, 1 - \alpha)_k. \tag{4}$$

從(3)與(4)，知(1)成立，同樣可證(2)．

等式(1)的意義，如上文所證，是左右兩集可以符合．同樣(2)的左右兩集可以符合．假如一切點集都是可測，那末從

$$|[0, 1 - \alpha)_k| = |[\alpha, 1)_{k-1}|,$$

$$|[1 - \alpha, 1)_k| = |[0, \alpha)_{k-1}|$$

得 $|A_k| = |A_{k-1}|$，其中 k 是任意的整數．若一切 $|A_k|$ 都等於 0，則 ΣA_k 成一零集，這是不合理的．假如

$$|A_k| = \delta > 0 \quad (k = 0, \pm 1, \cdots),$$

那末 ΣA_k 的測度為 $+\infty$，也是矛盾．所以必有點集，依勒貝克的

方法不可以測的。

5. **點集的密度** 設 M 是直綫上之一點集，x 是直綫上之一點，J 是含有 x 點之一開區間。當 $|J|\to 0$ 時，名

$$\overline{\lim}\ \frac{MJ}{|J|} = \bar{\rho}(M, x)$$

爲 M 在 x 點的上密度，$\underline{\lim}\ \frac{\overline{MJ}}{|J|} = \underline{\rho}(M, x)$ 爲 M 在 x 的下密度。上密度與下密度相等時，稱點集 M 在點 x 有密度：

$$\rho(M, x) = \bar{\rho}(M, x) = \underline{\rho}(M, x).$$

假如 $\overline{MJ}$ 常爲正數，則稱 x 是 M 之一密聚點，此種點必爲 M 之極限點，其全部成一開集。

定理 1. 設 M 是一可測點集，D 是 M 之密聚點的全體，則

$$|DM| = |M| \tag{1}$$

證明 設 $M\subset[a, b]$，$N = n$ 將 $[a, b]$ 分爲 N 等分得小區間

$$\Delta_n = \{\delta_{n1}, \delta_{n2}, \cdots \delta_{nN}\}.$$

假如不論 n 如何增大，一切 $|\delta_{nk}M| > 0$，那末 $M\supseteq D, M=M$。此時(1)成立。若不然，則當 $n > m$ 時，Δ_n 中有一部分之小區間 Δ_n' 適合

$$|M\Delta_n'| = 0, \ |M\delta_{nk}| > 0(\delta_{nk}\in\Delta_n).$$

因 $M-MD\subset\Delta_m' + \Delta_{m+1}' + \cdots$，$M-MD\subset M\Delta_m' + M\cdot\Delta_{m+1}' + \cdots$，故

$$|M - MD| = 0.$$

由是得(1)。定理證畢.

定理 2. 閉集是完全點集與零集之和集（但兩集中之一個可以缺的）。

證明 設 D 是閉集 C 之密聚點的全體，因 D 與 C 都是閉集，故

$$P = DC$$

是一閉集,由定理1.$P-DC=N$是一零集. 由是當$|C|>0$時,證明$P'=P$好了. 設x是P的一點,開區間J含有x. 那末

$$|DJ|=|DCJ|=|CJ|>0.$$

所以$x\in P'$, $P'=P$. 定理證畢.

系* 設$|M|>0$. 對於$\varepsilon>0$,必有如下的完全點集P:

$$M\supset P,\ |M|-|P|<\varepsilon.$$

證明 取閉集$C\subset M$, $|M|-|C|<\varepsilon$. 由定理2,$C=P+N$, P是完全集,N是零集, $|P|$等於$|C|$. 由是得所要的結果. 證明完畢.

假如$\rho(M,x)=1$,則稱x是M之一全密點.

定理3. 設H是可測點集M中一切全密集所成之集,那末

$$|M-H|=0.$$

這是在前章§6中已經證明過的定理. 但是下面的證明可以拓廣到高度空間中去的.

證明 置$E=M-H$,設$x\in E$,則$\bar{\rho}(M,x)<1$. 設n是一正整數,適合

$$\bar{\rho}(M,x)<1-\frac{1}{n+1}$$

之x的全體爲E_n,那末$E_1+E_2+\cdots=E$. 固定n,置

$$E_n=\mu,$$

證明$\mu=0$好了. 對於$\varepsilon>0$取開集O包含E_n,且使$|O|<\mu+\varepsilon$.

對於E_n中之一點x,取包含x之一開區間$J=J_x$適合

$$E_nJ<\left(1-\frac{1}{n+1}\right)|J|,\ J\subset O.$$

如是,區間J_x的全體(J_x)掩蓋E_n中一切點. 由林代勒夫定理,

---

* 這是魯靜(Н. Н. Лузин)的定理

(J_n) 中有可列無限個區間 $J_1, J_2, \cdots$ 掩蓋 E_n 中一切點. 取 k 甚大,可使

$$|J_1 + J_2 + \cdots + J_k| > \mu - \varepsilon.$$

設 $|J_\nu| = 2\gamma_\nu$, 不妨假設 $\gamma_1 \geqslant \gamma_2 \geqslant \cdots \geqslant \gamma_k$. 置 $J_1 = J_n$, 於

$$J_2, J_3, \cdots, J_k \tag{1}$$

中,與 J_1 無共通點的區間,其最初(添數最小者)的一個是 J_{n2}. 於

$$J_{n2+1}, J_{n2+2}, \cdots, J_k$$

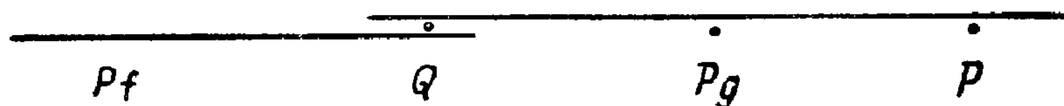
中,與 $J_{n1} + J_{n2}$ 無共同點的區間,其最初者是 J_{n3}, 如是進行至有限回而止,得區間

$$J_{n1}, J_{n2}, \cdots, J_{nl} (n_l \leqslant k). \tag{2}$$

將這些區間(共中心的)伸長三倍,得

$$I_{n1}, I_{n2}, \cdots, I_{nl}.$$

我們將證 $J_1 + J_2 + \cdots J_k \subset I_{n1} + I_{n2} + \cdots + I_{nl}$. 設 J_g 是(1)中的區間不在(2)中的一個,那末(2)中必有如下之 J_f:



設 P_f, P_g 是 J_f, J_g 的中點,設 $P \in J_g$ $Q \in J_f, J_g$, 則

$$r(P, P_f) \leqslant r(Q, P) + r(Q, P_f) < 2r_g + r_f \leqslant 3r_f.$$

由是 $P \in I_f$ 所以 $J_1 + \cdots + J_k \subset I_n, + \cdots + I_{nl}$.

設(2)的和集是 T, 則因 $J_{ni} \cdot J_{nj} = 0$ $(i \neq j)$,

$$|T| = |J_{n1}| + \cdots + |J_{nl}| = \frac{1}{3}\{|I_{n1}| + \cdots + |J_{nl}|\}.$$

然 $|I_{n1}| + \cdots + |I_{nl}| \geqslant |J_1| + \cdots + |J_k|$, 故 $3|T| > \mu - \varepsilon$, 而

$$\overline{TE_n} \leqslant \overline{E_n(J_{n1} + \cdots + J_{nl})} <$$

$$< \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)|J_{n1} + \cdots + J_{nl}|.$$

右端等於 $\frac{n}{n+1}|T|$ 故

$$|T| - \overline{TE_n} > \frac{|T|}{n+1},$$

因之

$$|T| - \overline{TE_n} > \frac{\mu - \varepsilon}{3n+3}. \tag{3}$$

另一方面, $T - E_nT = T - E_n \subset O - E_n$, 故

$$\overline{T - E_NT} \leqslant \overline{O - E_n} = |O| - \overline{E}_n = |O| - \mu < \varepsilon.$$

即 $|T| - \overline{E_nT} < \varepsilon$. 將此結果與(3)相結合,得

$$\frac{\mu - \varepsilon}{3n+3} < \varepsilon, \quad \mu < (3n + 3 + 1)\varepsilon.$$

ε 是一任意正數,故 $\mu = 0$.

6. 測度的掩蓋定理 下述定理,發明者謝爾兵司基稱它爲“測度補助定理”.* 事實上,利用此定理,可以證明其他種種定理.

定理 設 $M \subset (a, b)$, Δ 是一區間之集,若 M 中任何點,必爲 Δ 中某一區間之左端,則對於 $\varepsilon > 0$, Δ 中有不相重疊的有限個區間 $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_N$ 適合

$$\overline{M - M(\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_N)} < \varepsilon.$$

證明 爲簡便計,區間 δ 的長,就寫做 δ. 設 Δ 中之區間,其長大於 $\frac{1}{n}$ 的全部,成一區間之集 Δ_n, 那末,

$$\Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \Delta_3 \subset \cdots, \quad \Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \cdots.$$

設 M 中之點, 爲 Δ_n 中某區間之左端者, 其全體成一點集 M_n; 那末,

$$M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \cdots, \quad M = M_1 + M_2 + M_3 + \cdots.$$

假如 $|M_n| (n = 1, 2, \cdots)$ 都存在,則 $|M| = \lim |M_n|$†. 假如不

---

* 謝爾兵司基(Sierpinski), 1923.

† $M = M_1 + (M_2 - M_1) + (M_3 - M_2) + \cdots + (M_n - M_{n+1}) + \cdots$,
$M = \lim\limits_{n\to\infty} |M_1 + (M_2 - M_1) + \cdots + (M_n - M_{n-1})| = \lim |M_n|$.

然,則必

$$\overline{M} = \lim_{n\to\infty} \overline{M}_n.$$

為什麼呢? 取開集 $O_n \supset M_n$, $|O_n| < \overline{M}_n + \frac{1}{n}$. 置 $B_n = O_n O_{n+1} \cdots$, 則

$$B_n \subset B_{n+1}, M \subset B = \Sigma B_n.$$

因 B_n 是可測點集,故 $|B| = \lim |B_n|$, 由是

$$\lim \overline{M}_n \geqslant \lim |O_n| \geqslant \lim |B_n| = |B| \geqslant \overline{M}.$$

然 $M_n \subset M$, 故必 $\overline{M} = \lim \overline{M}_n$. 現在對於 $\varepsilon > 0$, 取 n, 使

$$\overline{M} - \overline{M}_n < \frac{1}{2}\varepsilon. \tag{1}$$

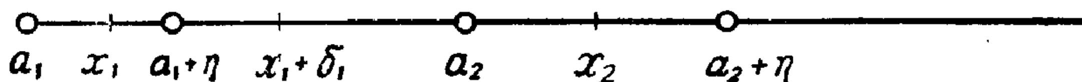
點集 M_n 是在(a, b)中的,它必有上界 b_1, 下界 a_1:

$$a \leqslant a_1 < b_1 \leqslant b.$$

置 $l = b_1 - a_1$, $\eta = \frac{\varepsilon}{2nl + 2}$. a_1 是 M_n 的下界,$[a_1, a_1 + \eta]$ 中必有點 x_1 屬於 M_n. 故 Δ_n 中有區間 δ_1 以 x_1 為其左端,若

$$x_1 + \delta_1 \geqslant b_1,$$

則取 $N = 1$, 若 $x_1 + \delta_1 < b_1$,則 M_n 必有點落在 $[x_1 + \delta_1, b_1]$ 中, 設這種點的下界為 a_2, 則區間$[a_2, a_2 + \eta]$中必有點 x_2 屬於 M_n,而 x_2 是 Δ_n 中某區間 δ_2 的左端. 區間 δ_1 與 δ_2 顯然不相重疊. 如是



繼續進行至無可進行,其回數 N 是有限的. 其所得之區間

$$\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_N$$

的長都大於 $\frac{1}{n}$, $x_N \leqslant b_1$. 因此,

$$\frac{N-1}{n} < \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_{N-1} < b_1 - a_1 = l.$$

$$N < nl + 1 = \frac{\varepsilon}{2\eta}, \quad \eta N < \frac{1}{2}\varepsilon$$

和集$(\delta_1) + \cdots + (\delta_N)$成一點集 S. 又設 $T = [x_1 - \eta, x_1] + \cdots + [x_N - \eta, x_N]$,則

$$M_n \subset S + T, \ |T| = \eta N < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

因 $S + T$ 是區間所構成的點集,故由

$$M(S + T) + (M - M(S + T)) = M,$$

得

$$\overline{M} \geqslant \overline{M}_n + \overline{M - M(S + T)}. \tag{2}$$

由(1)與(2)得

$$\overline{M - M(S + T)} < \frac{1}{2}\varepsilon. \tag{3}$$

故由 $M - MS \subset [M - M(S + T)] + T$, (3)和 $|T| < \frac{1}{2}\varepsilon$,得

$$\overline{M - MS} < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

定理證畢.

應用 下述定理,是第六章 §6 導數定理的一種特別情形.
$D^+f(x) = +\infty$ 而 $D_-f(x) \neq -\infty$ 的點 x, 其全部是一零集.
此定理可簡寫作

$$|(D^+f(x) = +\infty, D_-f(x) > -\infty)| = 0.$$

利用謝爾兵司基定理可以直接證明它.

固定有理數 r, 作點集 $E(r) = (D^+f(x) = +\infty, D_-f(x) > r)$.
要證明的是和集

$$E = \sum_r E(r) = (D^+f(x) = +\infty, D_-f(x) > -\infty).$$

是一零集.設 $x \in E_r$, 必有如下的 x', $x' < x$,

$$f(x, x') = \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} > r.$$

固定正整數 n, $f(x', x) > r$ 對於 $\left(x - \frac{1}{n}, x\right)$ 中之一切 x' 成立的 x, 其全體成一點集 $E_n(r)$. 因

$$E(r) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n(r),$$

故證 $E_n(r)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 爲零集時, 即得 $|E(r)| = 0$, 因之 $|E| = 0$. 因此證明 $|E_n(r)| = 0$ 好了. 設 $[a, b]$ 是一區間, $b - a < \frac{1}{n}$, $b \in E_n(r)$, $E_n(r)$ 在此區間中之部分爲 S. 證明 S 是一零集就夠了. 設 $x \in S$, 則因 $D^+f(x)$ 是 $+\infty$, 所以對於 k 有如下的 $x'(x' > x)$:

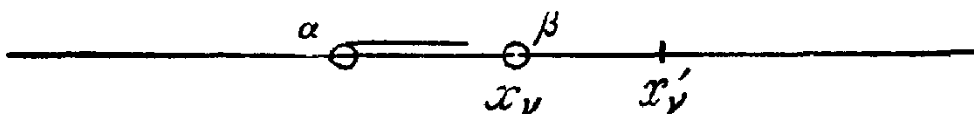
$$f(x', x) > k. \tag{1}$$

對於 $\delta > 0$, 區間之集 $\Delta = \{(x, x')\}(x \in S)$ 中有不相重疊的區間 $\delta_1, \cdots, \delta_N$ 適合

$$\overline{S} - \overline{S(\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_N)} < \varepsilon,\ \delta_\nu = (x_\nu, x'_\nu),\ x_\nu \in S.$$

點集 $[a, b] - \{(\delta_1) + (\delta_2) + \cdots + (\delta_N)\}$ 由區間所構成, 其中任一區間 (α, β) 之右端屬於 S, 因之

$$f(\alpha, \beta) > r \tag{2}$$



改寫(1)與(2): $f(x') - f(x) > k(x' - x)$, $f(\beta) - f(\alpha) > r(\beta - \alpha)$. 將一切這些不等式, 邊邊相加, 得

$$f(b) - f(a) > k\sum_{1}^{N}(x'_\nu - x_\nu) + r\Sigma(\beta - \alpha) >$$
$$> k(\overline{S} - \varepsilon) + r\Sigma(\beta - \alpha).$$

若 $r \geq 0$, 則 $f(b) - f(a) > k(\overline{S} - \varepsilon)$. 又若 $r < 0$, 則

$$f(b) - f(a) > k(\overline{S} - \varepsilon) - (b - a).$$

無論 r 爲正爲負, 當 $\varepsilon \to 0$, $k \to +\infty$ 時, 得着 $\overline{S} = 0$. 所以 $|S| = 0$.

第三章所述的種種掩蓋定理, 都是用區間或區域的集, 將一切

點都掩蔽了．謝爾兵司基的測度定理，也是一種掩蓋定理；但是 $(\delta_1)+\cdots(\delta_N)$ 所掩蔽的，不過是點集 M 中一部分的點，而估計其未曾遮蓋的部分之外測度．

上文所述，都是關於有界點集的事．設 M 是 E_1 中之一點集 J_n 是區間 $(-n,n)$，若 $|MJ_n|$ 常存在，則當

$$\lim_{n\to\infty}|MJ_n|$$

存在時，稱此極限爲 M 之測度 $|M|$．

7. 高度空間中之點集 設 $n>1$，$M\subset E_n$ 本節概述 E_n 中的勒贝克測度．先說些關於矩形（就是室）

$$I:\ a_k<x_k<b_k\ \ (k=1,2,\cdots n)$$

的測度，以作準備．於 I 加其境界上的一切點，成爲閉室 $[I]$，稱 $\prod_1^n(b_k-a_k)=|I|=|[I]|$ 爲 I 或 $[I]$ 的測度．

定理 1. 1°. 設兩室 I 與 J 相交，則其通集 $I\cdot J$ 也成一室；

2°. 設 I 是一室，則對於 $\varepsilon>0,\rho>0$，必有直徑*小於 ρ 的有限個區間 $I_1,\cdots,I_k$ 適合

$$[I]\subseteq I_1+I_2+\cdots+I_k,\ |I_1|+|I_2|+\cdots+|I_k|<|I|+\varepsilon.$$

證明 1°. 設 I 是 $a_k<x_k<b_k$，J 是 $\alpha_k<x_k<\beta_k\,(k=1,\cdots n)$．置

$$r_k=\max(a_k,\alpha_k),\ \delta_k=\min(b_k,\beta_k),$$

則當 $J\cdot I\neq 0$ 時，矩形

$$r_k<x_k<\delta_k(k=1,2,\cdots n)$$

就是 $I\cdot J$．

2°. 甚明顯．

定義 設 M 是 n 度空間中之一點集，開室敍列

$$I_k(a_\nu^{(k)}<x_\nu<b_\nu^{(k)},\ \nu=1,2,\cdots n,\ k=1,2,3,\cdots)$$

* 有度空間中的點集 M 的直徑是 $\max r(a,b)$，但 a 和 b 都屬於 M．直徑是直徑之長的簡稱．

掩蓋 M 的一切點，級數 $\Sigma|I_k|$ 之和隨 $\{I_k\}$ 變動而變動，稱其下界爲 M 之外測度，以 $\overline{M}$ 記之.

由此定義，就知道下述兩事：

$$當\ A\subseteq B\ 時,\ \overline{A}\leqslant\overline{B};$$
$$當\ M=\Sigma A_n\ 時,\ \overline{M}\leqslant\Sigma\overline{A}_n.$$

現在證明

定理 2. 1°. 當 $r(A,B)>0$ 時，$\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B}$；

2°. 設 M 是一點集，O 是包含 M 之一開集，則 $\overline{O}$ 的下界等於 $\overline{M}$.

證明 1°. 就 $\overline{A}$ 與 $\overline{B}$ 都是有限時來證明好了. 由於

$$\overline{A+B}\leqslant\overline{A}+\overline{B},$$

所以證明 $\overline{A+B}\geqslant\overline{A}+\overline{B}$ 就够了. 對於 $\varepsilon>0$，取開室之列 $\{I_k\}$ 包含 $A+B$，使

$$\Sigma|I_k|<\overline{A+B}+\varepsilon,$$

且使 I_k 之直徑都小於 $r(A,B)$. 由定理 1 的 2°，最後的條件可以使它成立的. $\{I_k\}$ 中之室遮蓋 A 的點時，不能遮蓋 B 的任何點，設此種室的全體是 $\{I_{k_\nu}\}$，其餘的室的全體是 $\{I_{\lambda_\nu}\}$，那末，從

$$A\subseteq\Sigma I_{k_\nu};\ B\subseteq\Sigma I_{\lambda_\nu},$$

得 $\overline{A}\leqslant\Sigma|I_{k_\nu}|$，$\overline{B}\leqslant\Sigma|I_{\lambda_\nu}|$，由是

$$\overline{A}+\overline{B}\leqslant\Sigma|I_k|<\overline{A+B}+\varepsilon.$$

令 $\varepsilon\to 0$，得

$$\overline{A}+\overline{B}\leqslant\overline{A+B}.$$

2°. 若 $\overline{M}=+\infty$，則一切包含 M 之開集 O，$\overline{O}=+\infty$，所以此時 2° 成立. 今設 $\overline{M}<\infty$，對於 $\varepsilon>0$，取開室之列 $\{I_k\}$ 遮蓋 M 且使

$$\Sigma|I_k|<\overline{A}+\varepsilon.$$

和集 $\Sigma I_k=O$ 是一開集，$\overline{O}\leqslant\Sigma|I_k|$ 故 $\overline{O}\leqslant\overline{A}+\varepsilon$，所以 2° 成立. 證明完畢.

$\overline{M}=0$ 時，稱 M 爲一零集，所以可列點集是一零集.

定理 3. 設點集M是開室敍列$\{I_k\}$的和集．那末，當$I_k \cdot I_j = 0$ $(j \neq k)$時，$\overline{M} = \Sigma |I_k|$且對於任一正數$\varepsilon$，$M$中有閉集$C$適合．

$$C \subset M; \overline{C} > \overline{M} - \varepsilon.$$

證明 先設$M = I_1 + I_2 + \cdots + I_k$，對於很小的正數$\varepsilon$，$I_\nu$中取如下的室$J_\nu$：

$$|J_\nu| > |I_\nu| - \frac{\varepsilon}{k}, r(J_\nu, J_\mu) > 0 (\nu \neq \mu, \nu = 1, 2, \cdots k).$$

由定理 2．

$$|J_1 + \cdots + J_k| = |J_1| + \cdots + |J_k| > |I_1| + \cdots + |I_k| - \varepsilon.$$

由是$\overline{M} \geqslant \sum_1^k |I_\nu| - \varepsilon$．又因

$$\overline{M} \leqslant |I_1| + \cdots + |I_k|.$$

故令 $\varepsilon \to 0$，即得$\overline{M} = |I_1| + \cdots + |I_k|$．

次設$M = I_1 + I_2 + \cdots$中的項數是無限的，因$I_1 + \cdots + I_k \subset M$．故不等式

$$|I_1| + \cdots + |I_k| \leqslant \overline{M}.$$

對於任意正整數k成立．因之，$\Sigma |I_k| \leqslant \overline{M}$．然而其中的不等號是不會實現的，故必$\Sigma |I_k| = \overline{M}$．

最後，當k甚大時，閉集$[I_1] + [I_2] + \cdots + [I_k]$的外測度

$$|I_1| + \cdots + |I_k|$$

可甚近於$\overline{M}$，故對於$\varepsilon > 0$有閉集C適合$\overline{C} > \overline{M} - \varepsilon$．證明完畢．

定理 4. 設O與O'都是開集，那末

1°．當$O \subset M$時，$\overline{M} = \overline{O} + \overline{M - O}$；

2°．$\overline{O + O'} + \overline{OO'} = \overline{O} + \overline{O}'$．

證明 1°．我們假設$\overline{M} < \infty$來證明．因$\overline{M} \leqslant \overline{O} + \overline{M - O}$，所以證明

$$\overline{M} \geqslant \overline{O} + \overline{M - O}$$

好了．開集O的餘集A是一閉集，對於$\varepsilon > 0$，從定理 3，O中有閉集C適合

$$\overline{C} > \overline{O} - \varepsilon.$$

那末，$r(A, C) \geqslant 0$. 由定理 2，$\bar{C} + \overline{M - O} = \overline{M - O + C} \leqslant \bar{M}$. 故

$$\bar{M} \geqslant \bar{O} - \varepsilon + \overline{M - O}.$$

令 $\varepsilon \to 0$，即得 $\bar{M} \geqslant \bar{O} + \overline{M - O}$.

2°. $\bar{O}$ 或 $\bar{O}'$ 爲 ∞ 時，無待證明. 今設 $\bar{O} < \infty$，$\bar{O}' < \infty$，由 1°

$$\overline{O + O'} = \bar{O} + \overline{O' - OO'},$$

$$\overline{O' - OO'} + \overline{OO'} = \bar{O}'.$$

相加得 2°. 證明完畢.

系 $\overline{A + B} + \overline{AB} \leqslant \bar{A} + \bar{B}$.

證明 設 O_A, O_B 分別是包含 A, B 之任意開集. 由 2°.

$$\overline{O_A + O_B} + \overline{O_A O_B} = \bar{O}_A + \bar{O}_B.$$

左邊大於或等於$\overline{A + B} + \overline{AB}$，故$\overline{A + B} + \overline{AB} \geqslant \bar{O}_A + \bar{O}_B$. 由是即得所要的結果，證明完畢.

設開集 O 包含 M，則由定理 2，$\bar{O}$ 的下界等於 $\bar{M}$，此可作爲外測度的定義. 現在定義點集的內測度.

定義 設 C 是含在 M 中的任意閉集，稱 $\bar{C}$ 的上界爲 M 之內測度，以 $\underline{M}$ 記之. 假如 $\bar{M} = \underline{M} < \infty$，那末，稱 M 是一可測點集其測度爲 $|M| = \bar{M}$.

下述定理 5 的 1°, 2°, 3°, 易從定義明白.

定理 5. 1°. $\underline{M} \leqslant \bar{M}$;

2°. 當 $B \subset A$ 時 $\underline{B} \leqslant \underline{A}$;

3°. 設 $M = \Sigma M_n$ 則當 $M_k M_j = 0 (j \neq k)$時則 $\Sigma \underline{M}_j \leqslant \underline{M}$;

4°. 設開集 O 含有 M，則當 $\bar{M} < \infty$ 時，

$$\underline{M} = \bar{O} - (\overline{O - M}).$$

4° 的證明 設 C 是含在 M 中之任一閉集，則由定理 4

$$\bar{C} = \bar{O} - (\overline{O - C}) \leqslant \bar{O} - \overline{O - M}.$$

由是得到

(1) $\underline{M} \leqslant \bar{O} - \overline{O - M}$.

對於 $\varepsilon > 0$, O 中取閉集 D 使 $\overline{D} > \overline{O} - \varepsilon$. 又取開集 P 適合

$$P \subset D - MD, \overline{P} < \overline{D - MD} + \varepsilon (< \overline{O - M} + \varepsilon).$$

由第一式, $D \subset PD + MD$; 故閉集 $D - PD \subset M$, 因之

$$\overline{M} \geqslant \overline{D - PD} \geqslant \overline{D} - \overline{PD} > (\overline{O} - \varepsilon) - (\overline{O - M} + \varepsilon).$$

令 $\varepsilon \to 0$, 得 $\overline{M} \geqslant \overline{O} - \overline{O - M}$, 將此結果與(1)相結合,即得 4°.

由定理 4 的系, $\overline{A + B} + \overline{AB} \leqslant \overline{A} + \overline{B}$. 就内測度而言, 還有下述之

定理 6. $\underline{A} + \underline{B} \leqslant \underline{AB} + \underline{A + B}$.

證明 設開集 $O \supset A + B$, 則由定理 5 的 3°,

$$\underline{A + B} + \underline{AB} = [\overline{O} - \overline{O - A - B}] + [\overline{O} - \overline{O - AB}].$$

然 $O - A - B = (O - A)(O - B)$, $O - AB = (O - A) + (O - B)$, 此兩集外測度之和,由定理 4 的系,等於或小於

$$\overline{O - A} + \overline{O - B}.$$

所以 $\underline{A + B} + \underline{AB} \geqslant (\overline{O} - \overline{O - A}) + (\overline{O} - \overline{O - A}) = \underline{A} + \underline{B}$, 證明完畢.

因 $\overline{A + B} + \overline{AB} \leqslant \overline{A} + \overline{B}$, $\underline{A} + \underline{B} + \underline{AB} \geqslant \underline{A} + \underline{B}$, 故由定理 5 的 1°, 得

定理 7. 若 $|A|$ 與 $|B|$ 都存在,則 $|A + B|$ 與 $|AB|$ 也都存在,且

$$|A + B| + |AB| \leqslant |A| + |B|.$$

由定義,室無論開閉,是可測的,其測度爲各"邊"的乘積. 零集也是可測的,其測度等於 o. 由定理 5 的 4° 開集是可測的. 拓而廣之,若開集 O 含有可測點集 M, 那末

$$|M| + |O - M| = |O|.$$

又若開集 O 含有點集 M, 則當 $\overline{M} + \overline{O - M} = |O|$ 時, 從定理 5 的 4°, $|M|$ 必存在; 由是可知當開集 O 包含 M 時, 兩集

$$M \text{ 與 } O - M$$

同時可測或都不可測.

下述諸定理,其證明同於直綫上的點集.

i. 若 $|A_1| \cdots |A_2|, \cdots$ 皆存在且 $A_kA_j = 0 (k \neq j)$ 則

$$|\Sigma A_k| = \Sigma |A_k|.$$

ii. 若 $|A_1|, |A_2|, \cdots$ 皆存在則 ΠA_k 與 ΣA_k 都是可測點集並且

$$|\Sigma A_k| \leqslant \Sigma |A_k|.$$

iii. 設 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots, A = \Sigma A_k$, 則當 $|A_k|$ 存在時,

$$|A| = \lim |A_k|.$$

iv. 設 $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$, 則當 $|A_k|$ 存在時, $\lim |A_k| = |\Pi A_k|$.

v. 若 $A_1, A_2, \cdots$ 都是可測則 $\overline{\lim}\, A_m$ 與 $\underline{\lim}\, A_n$ 也都是可測點集,且

$$|\underline{\lim}\, A_m| \leqslant \underline{\lim}\, |A_m|, \quad |\overline{\lim}\, A_m| \geqslant \overline{\lim}\, |A_m|.$$

事實上, $D_\nu = A_\nu A_{\nu+1} \cdots$ 與 $V_\nu = A_\nu + A_{\nu+1} + \cdots$ 都是可測點集. 由

$$|D_\nu| \leqslant |A_\nu|, \quad |V_\nu| \leqslant |A_\nu|,$$

知 $\underline{\lim}\, A_\nu = \Sigma D_\nu$ 與 $\overline{\lim}\, V_\nu$ 皆爲可測,且知 v 成立.

由以上諸定理,知下述定理爲成立.

定理 8. 空間 E_n 中之波雷耳點集,是可測點集.

8. 可測函數 設 $f(x)$ 的定義區是 M. 對於任何實數 C, 點集,

$$M_1(C) = (f(x) > C) \cdot M$$

常爲可測的話, 稱 $f(x)$ 是一可測函數.

定理 1. 上述可測函數的定義中的點集 $M_1(C)$ 可取下列三個點集

$$M_2(C) = (f(x) < C), M_3(C) = (f(x) \geqslant C),$$

$$M_4(C) = (f(x) \leqslant C)$$

中的一個來代替. 可測函數的定義區必爲可測點集.

證明 設 $f(x)$ 是一可測點集. 因

$$M = M_1(C) + M_4(C), \tag{1}$$

所以 $M_4(C)$ 是一可測點集. 假如 $M_4(C)$ 對於任何 C 是可測, 那末

從

$$M = M_4(1) + M_4(2) + M_4(3) + \cdots,$$

知定義區 M 是可測. 又由(1),知 $M_1(C)$對於任何 C 是可測,所以定義中的 $M_1(C)$可用 $M_4(C)$代替.

其次,若 $M_2(C)$常為可測,則由 $M = M_2(1) + M_2(2) + \cdots$, 知 M 是可測的. 又由

$$M = M_2(C) + M_3(C), \tag{2}$$

知 $M_3(C)$對於任何 C 是可測的. 由是 $E_k = M_2\left(C + \frac{1}{k}\right) \cdot M_3(C)$

是一可測點集,因之,通集

$$E_1 \cdot E_2 \cdot E_3 \cdots \equiv E(C)$$

是一可測點集。 $E(C)$ 就是適合 $f(x) = C$ 的一切 $x(x \in M)$ 所成之集,所以

$$M_3(C) - E(C) = M_1(C)$$

是一可測點集, 因之 $f(x)$是一可測函數, 故定義中的 $M_1(C)$ 可用 $M_2(C)$代它. 假如 $M_3(C)$常為可測,那末

$$M = M_3(-1) + M_3(-2) + M_3(-3) + \cdots$$

是一可測點集, 由(2), $M_2(C)$也常為可測; 因之 $f(x)$是一可測函數. 所以定義中之 $M_1(C)$也可以用 $M_3(C)$代替. 證明完畢.

系 連續函數 $f(x)$ 是一可測函數.

證明 因 $M_3(C) = (f(x) \geq C)$ 是一閉集之故. 證明完畢.

拓而廣之,一切半連續函數都是可測的. 此事含在下述定理中.

定理 2. 在可測點集 M 上所定義的斐載函數 $f(x)$ 是一可測函數.

證明 由第五章 §3 的定理 3, $M_1(C) = M(f(x) > C)$ 關於 M 是一波雷耳點集,所以 $M_1(C)$是一可測點集; 因之 $f(x)$是一可測函數. 證明完畢.

定理 3. 設 $f_1(x), \cdots, f_k(x)$ 在 M 上都是可測的,那末

$$G(x) = \max(f_1, \cdots, f_k) \text{ 和 } g(x) = \min(f_1, \cdots, f_k)$$

也都是可測函數.

證明 記上述之 $M_k(C)$ 爲 $M_k(f,c)$ 那末

$$M_1(G, C) = M_1(f_1, c) + \cdots + M_1(f_k, c).$$

右邊各項都是可測點集,故 $M_1(G, C)$ 是可測的,因之 $G(x)$ 是一可測函數. 所以

$$g(x) = -\max(-f_1, \cdots, -f_k)$$

也是可測函數. 證明完畢.

系 假如 $f(x)$ 是可測的話, $|f(x)|$ 也是可測的.

證明 這是因爲 $|f(x)| = \max(f(x), -f(x))$ 之故. 證明完畢.

定理 4. 有限個可測函數之和與積都是可測函數.

證明 對於兩個可測函數 $f(x)$, $g(x)$ 來證明好了. 設 $c \neq 0$, 從

$$M_1(f + c', c) = M_1(f_1 c - c'),$$

$$M_1(c'f(x), c) = \begin{cases} M_1\left(f, \dfrac{c}{c'}\right) (c' > 0) \\ M_2\left(f, \dfrac{c}{c'}\right) (c' < 0) \end{cases}$$

知 $f(x) + c'$ 與 $c'f(x)$ 都是可測函數. 設 $r_1, r_2, \cdots$ 是有理數的全體,那末

$$M_1(f - g, c) = \sum_{k=1}^{\infty} M_1(f, r_k) \cdot M_2(g + c, r_k).$$

所以 $f(x) - g(x)$ 是一可測函數. 因之 $f(x) + g(x) = f - (-g)$ 是一可測函數.

設 $c \geqslant 0$, 則因 $M_1(f^2, c) = M_1(f, \sqrt{c}) + M_1(-f, \sqrt{c})$, $M_1(f^2, c) = M$, 故 $M_1(f^2, c)$ 和 $M_1(f^2, -c)$ 都是可測點集; 所以可測函數的平方是一可測函數,因之

$$fg = \frac{1}{4}\{(f+g)^2 - (f-g)^2\}$$

是一可測函數，證明完畢．

設 $f_1(x), f_2(x), \cdots$ 都是 M 上的可測函數，則其上界函數

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} \max\{f_1(x), \cdots, f_n(x)\}$$

也是可測的，這是因爲 $M_1(F, C) = \Sigma M_1(f_n, c)$ 之故．所以下界函數

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \min\{f_1(x), \cdots, f_n(x)\} =$$
$$= -\lim_{n\to\infty} \max\{-f_1, \cdots, -f_n\}$$

也是可測的．設 $F_n(x)$ 是 $f_n(x), f_{n+1}(x), \cdots$ 之上界函數，則得可測函數列 $F_1(x), F_2(x), \cdots$．因

$$F_m(x) \geqq F_{m+1}(x),$$

$\{f_m(x)\}$ 之上限函數 $\overline{\lim}\, f_n(x)$ 就是 $\{F_m(x)\}$ 之下界函數 $\lim F_m(x)$，所以是一可測函數，這樣，得到下面的

定理 5. 可測函數列之上限函數，下限函數，上界函數，下界函數都是可測函數．

系 上半連續函數與下半連續函數都是可測函數．

證明 下半連續函數是收斂連續函數列的極限函數，所以是可測函數，證明完畢．

定理 6. 設在 (a, b) 上 $f(x)$ 是一可測函數，那末導函數

$$D^+f(x), D_+f(x), D^-f(x), D_-f(x)$$

都是可測函數．

證明 證明 $D^+f(x)$ 是一可測函數好了．設 $\rho > 0$ 記

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

對於 $0 < h < \rho$ 的上界爲 $f_\rho(x)$，$f_\rho(x)$ 爲 ρ 之增加函數，

$$\lim_{\rho\to 0} f_\rho(x) = D^+f(x).$$

由是，固定 ρ，證明 $f_\rho(x)$ 是 x 之可測函數就够了．現在要證明 $M_1(f_\rho, c)$ 是可測點集．置 $F(x) = f(x) - cx$，則

$$F_\rho(x) = f_\rho(x) - c, \quad M_1(f_\rho, c) = M_1(F_\rho, O).$$

而 $M_1(F_\rho, 0)$就是適合關係

$$\varphi(x) \equiv 上界 F(x+h) > F(x)$$
$$0 < h < \rho$$

之一切 x 所成之點集,要證 $M_1(\varphi - F, O)$是可測,證明$\varphi(x)$是一可測函數好了,這是因為 $F(x)$是可測之故.由是證明 $\varphi(x)$是一下半連續函數就够了.這就是說我們要證明:當 $x_n \to x$ 時,

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \varphi(x_n) \geqslant \varphi(x).$$

對於 $\varepsilon > 0$, $(x, x+\rho)$中必有如下的 ξ;

$$F(\xi) > \varphi(x) - \varepsilon.$$

取 N 甚大,當 $n > N$ 時,可使 $x_n < \xi < x_n + \rho$ 成立.由是

$$\varphi(x_n) \geqslant F(\xi) > \varphi(x) - \varepsilon (n > N).$$

先令 $n \to \infty$,再令 $\varepsilon \to 0$,即得所要證的不等式.證明完畢.

可測函數又有如下的性質:

定理 7. 設 $f(x)$ 是 M 上之一可測函數,則必有階級不高於 2 的函數 $g(x)$ 幾乎處處等於 $f(x)$.

證明 設 r 與 r' 都是一有理數開集 O_ν 包含 $M_1(f,r)$而

$$|O_\nu| < |M_1(f,r)| + \frac{1}{\nu}.$$

置 $\Omega = \Omega(r) = O_1O_2O_3, \cdots$,則 $|\Omega| = |M_1(f,r)|$.又置 $\omega(r) = \prod_{r' \leqslant r} \Omega(r)$,則

$$|\omega(r)| = |M_1(f,r)|.$$

當 $r' < r$ 時 $\omega(r') \supseteq \omega(r)$.故

$$M = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\omega\left(\frac{k-1}{2^\nu}\right) - \omega\left(\frac{k}{2^\nu}\right)\right] M.$$

今作函數 $f_\nu(x)$如下:當 $x \in M\left[\omega\left(\frac{k-1}{2^\nu}\right) - \omega\left(\frac{k}{2^\nu}\right)\right]$時,$f_\nu(x) = \frac{k}{2\nu}$.得 M 上所定義一函數列 $f_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, \cdots)$,由此定義,當

$$\frac{k-1}{2^\nu} < C \leq \frac{k}{2^\nu}$$

時 $M_1(f_\nu, c) = \sum_{k'=k}^{\infty}\left[\omega\left(\frac{k'-1}{2^\nu}\right) - \omega\left(\frac{k'}{2^\nu}\right)\right]M = \omega\left(\frac{k-1}{2^\nu}\right)M.$

今證 $f_\nu(x)$ 的階級小於 2. 將 $[-1, 1]$ 等分為 $2k$ 個小區間，其分點是

$$a_j = \frac{j}{k} - 1; \quad j = 0, 1, \cdots, 2k.$$

置 $\varphi_1(x) = a_1$，當 $j > 1$ 時，置

$$\varphi_j(x) = a_j - a_{j-1}, \quad x \in M_1(f_\nu, a_{j-1});$$

$$\varphi_j(x) = 0, \quad x \bar{\in} M_1(f_\nu, a_{j-1}).$$

因 $M_1(f_\nu, c) \in \delta_2(M)$. 故由第五章 §3 的定理 1，有收斂於 $\varphi_j(x)$ 之單調函數列，列中任何函數，其階數小於 2. 和

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \cdots + \varphi_{2k}(x) \equiv \varphi_k(x)$$

之階級也小於 2. 當 $a_{j-1} < f_\nu \leq a_j$ 時，

$$\psi_k(x) = a_1 + (a_2 - a_1) + \cdots + (a_j - a_{j-1}) = a_j.$$

由 $|f_\nu(x) - \psi_k(x)| < \frac{1}{k}$，知 $f_k(x)$ 均勻收斂於 $f_\nu(x)$，故 $f_\nu(x)$ 之階級小於 2. 當 x 是點集

$$\omega\left(\frac{k-1}{2^\nu}\right) - \omega\left(\frac{k}{2^\nu}\right) = \left[\omega\left(\frac{2k-2}{2^{\nu+1}}\right) - \omega\left(\frac{2k-1}{2^{\nu+1}}\right)\right] +$$

$$+ \left[\omega\left(\frac{2k-1}{2^{\nu+1}}\right) - \omega\left(\frac{2k}{2^{\nu+1}}\right)\right]$$

中的一點時，$f_{\nu+1}(x)$ 等於 $\frac{2k}{2^{\nu+1}}$ 或等於 $\frac{2k-1}{2^{\nu+1}}$，所以

$$f_\nu(x) \geq f_{\nu+1}(x).$$

單調函數 $f_\nu(x)(\nu = 1, 2, \cdots)$ 的極限函數 $F(x)$，其階級不高於 2. 點集 $\omega(r)$ 含有 $M_1(f, r)$，而此兩集之測度相等，點集

$$N = \sum_r \{\omega(r) - M_1(f, r)\} \quad (r \text{ 為有理數})$$

是一零集. 對於 $M-N$ 中之一點 x, 有唯一之整數 k 如下:

$$x \in (M-N)\left[\omega\left(\frac{k-1}{2^\nu}\right)-\omega\left(\frac{k}{2^\nu}\right)\right].$$

此時 $\frac{k-1}{2^\nu}<f(x)<\frac{k}{2^\nu}$, $f_\nu(x)=\frac{k}{2^\nu}$,所以

$$0 \leqslant f_\nu(x)-f(x)<\frac{1}{2^\nu}.$$

故在 $M-N$ 上 $f_\nu(x)$ 匀斂於 $f(x)$. 因之,當 $x \in M-N$ 時,

$$f(x)=F(x), \quad |N|=0.$$

證明完畢.

定理 8. 設 $f(x)$ 是點集 M 上所定義之可測函數,那末,對於任意小之正數 ε, M 中有完全子集 C 適合兩條件:

(i) $|M-C|<\varepsilon$ (ii) $f(x)$ 在 C 上是一連續函數.

這是魯靜的定理. 現在首先建立愛戈洛夫(Егоров)的

補助定理 設 $f_1(x), f_2(x), \cdots$ 是點集 M 上之可測函數列. 若

$$\lim f_n(x)=f(x),$$

那末對於任何小的正數 ε, M 中有如下的子集 E:

$$|E|>|M|-\varepsilon,$$

在 E 上 $f_n(x)$ 匀斂於 $f(x)$.

證明 設 $\eta>0$, 適合 $|f_\nu(x)-f(x)|<\eta$ 之 x 的全體爲

$$E_\nu(\eta).$$

置 $E_m(\eta), E_{m+1}(\eta) \cdots = M_m(\eta)$, 則 $M_m(\eta) \subseteq M_{m+1}(\eta)$,

$$\lim_{m\to\infty} M_m(\eta)=M.$$

設當 $m \geqslant m(\eta)$ 時, $|M_m(\eta)|>|M|-\eta$, 那末, 當 $\nu \geqslant m$, $m \geqslant m(\eta)$, $x \in M_m(\eta)$時,適合不等式

$$|f_\nu(x)-f(x)|<\eta$$

的 x 所成之集的 ν 測度大於 $|M|-\eta$.

置 $\eta_\nu = 2\varepsilon$, $E = \prod_{\nu=1}^{\infty} M_{m(\eta_\nu)}(\eta_\nu)$, 則

$$|E| > |M| - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^\nu} = |M| - \varepsilon.$$

在點集 E 上,當 k 大於 $m\left(\frac{\varepsilon}{2^\nu}\right)$ 時, $|f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2^\nu}$, 所以補助定理成立.

定理 8 的證明 對於 $f(x)$, 有階級不超過 2 的 $F(x)$ 與 $f(x)$ 等質:即M中除一零集 N 中之點而外,$f(x)$等於 $F(x)$. 所以在M上有連續函數

$$\varphi_{ij}(x) \quad (i, j = 1, 2, \cdots)$$

當 $j \to \infty$ 時, $\varphi_{ij}(x) \to \varphi_i(x)$. 若 $x \in M - N = M_0$, 則

$$\varphi_i(x) \to f(x).$$

由愛戈洛夫定理,對於 $\varepsilon > 0$, M_0 有子集 E_0, 在 E_0 上 φ_ν 均勻收斂於 f, 且

$$|M - E_0| < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

M_0 又有如下的子集 E_ν, $|M_0 - E_\nu| < 2^{-1-\nu}\varepsilon$, 在 E_ν 上 $\varphi_{\nu 1}, \varphi_{\nu 2}, \cdots$ 均勻收斂於 φ_ν. 置

$$E = E_0 \cdot E_1 \cdot E_2 \cdot \cdots,$$

則 $|M_0 - E| = |\Sigma(M_0 - E_\nu)| < \varepsilon$. 設 C 是 E 中之一完全點集, $E-C$ 的測度小於 ε, 在 C 上連續函數列 $\varphi_{\nu 1}, \varphi_{\nu 2} \cdots$ 勻斂於 φ_ν. 所以 φ_ν 是 C 上之一連續函數. 又在 C 上, 連續函數列 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ 勻斂於 f, 所以 f 在 C 上是一連續函數.

定理 9. 設 $f(x)$ 是一可測函數,它的定義區是 M,則 M 中有閉集 $C_1, C_2, \cdots$ 如下:

(i) $f(x)$ 在點集 $S = C_1 + C_2 + \cdots$ 上,其階級不過 1.

(ii) $|M| = |S|$.

證明 由定理 8, M 中有完全點集 C_k; $f(x)$在 C_k 上是一連

續函數，$M-C_k$ 的測度小於 2^{-k}. 在和集

$$C_1+C_2+\cdots+C_k=S_k$$

上，$f(x)$ 也是連續的．這是由於

$$S_k(f\geqslant C)=\sum_1^k C_\nu(f\geqslant C),$$

$$S_k(f\leqslant C)=\sum_1^k C_\nu(f\leqslant C).$$

見第四章 §3，定理 2．點集 $S=\Sigma C_\nu$ 上必有連續函數 f_k 如下：當 $x\in S_k$ 時，

$$f(x)=f_k(x),$$

此由於第四章 §6．定理 6. 若 $x\in S$，則 $\lim f_k(x)=f(x)$，故在 S 上，$f(x)$之階級不過 1．又因

$$|M-S|=\lim_{k\to\infty}|M-S_k|=0,$$

故 $|M|=|S|$.

第七章　習題

1. 設 $M\subset E_3$，則當 M 的若當測度存在時，M 的勒貝格測度也存在，兩者相等.

2. 設 M 是 $f(x)$的定義區，r 是有理數．假如點集 $M_1(f,r)$都是可測，那末 $f(x)$是可測的．其中的 $M_1(f,r)$可用下面的三種點集之一來代替：

$$M_2(f,r),\ M_3(f,r),\ M_4(f,r).$$

3. 設 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的定義區都是 M，假如 f 與 g 都是可測函數，那末 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 也是可測函數.

4. 設點集 M 上定義着一列的可測函數 $f_1(x)$，$f_2(x)\cdots$，S 是 M 之子集．假如在 S 上 $\lim f_n(x)$存在，而 $M-S$ 上 $\lim f_n(x)$不存在，那末，S 是一可測點集.

5. 設 M 是平面上的有界點集，則必有如下的開集 O_n 與閉集 C_n：

$$C_n \subset M \subset O_n,$$

$$\left|\sum_1^\infty C_n\right| = \underline{M}, \quad \left|\prod_1^\infty O_n\right| = \overline{M}.$$

6. 設 $E_1 \subset E_2 \subset \cdots$，則當和集 $E = \Sigma E_n$ 是有界時，

$$\lim_{n\to\infty} E_n = E.$$

7. (i) 設由變換 $x' = x + y,\ y' = y$ 將矩形，$a \leq x \leq b$，$c \leq y \leq d$，變成平行四邊形 R，證明 R 的面積等於 $(b-a)(d-c)$。

(ii) 設 $a_1b_2 - a_2b_1 = \Delta \neq O$，$a_1b_1c_1 - a_2b_2c_2 \neq 0$，證明變換 $x' = a_1x + b_1y + c_1,\ y' = a_2x + b_2y + c_2$ 可分解如下：

$$\begin{cases} x_1 = a_1x \\ y_1 = b_1y \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = x_1 + y_1 \\ y_2 = y_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = y_2 \\ y_3 = x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_4 = \dfrac{\Delta}{a_1b_1}\ x_3 \\ y_4 = -\dfrac{a_2}{a_1}\ y_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_5 = x_4 + y_4 \\ y_5 = y_4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_6 = x_5 \\ y_6 = \dfrac{a_1}{a_2}\ y_5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_7 = y_6 \\ y_7 = x_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = x_7 + c_1 \\ y' = y_7 + c_2 \end{cases}$$

(iii) 設 E 是平面上之一有界點集，經過(ii)中的變換，E 變成 E^*，證明

$$\overline{E} = |\Delta|\,\overline{E}^*,\ \underline{E} = |\Delta'|\,\underline{E}^*.$$

第　八　章

積　　分

第一部分　黎曼積分

1. 有限區間上的函數　設 $f(x)$ 是閉區間 $a \leqslant x \leqslant b$ 上定义的有限函數，於此區間 $[a, b]$ 中，作一組的分點：$x_1, \cdots, x_{n-1} = D(x_1, \cdots, x_n)$，

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

設 $x_{k-1} \leqslant \xi_k \leqslant x_k (k=1, 2, \cdots, n)$. 置 $\max(x_k - x_{k-1}) = \delta(x_1, \cdots, x_n) \equiv \delta$. 作乘積 $f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ 之和 $S \equiv S(x_1, \cdots, x_n) =$ $= S(x_1, \cdots, x; \xi_1, \cdots, \xi_n) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$,

假如不拘 $D(x_1, \cdots, x_n)$ 中的點如何取定，又不拘 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 如何選取，當 δ 趨近於 0 時，$\lim S$ 存在，且有一定數值，那末稱此極限值爲 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上之黎曼積分，以記號

$$\lim_{\delta \to 0} S = \int_a^b f(x)dx$$

表示這個積分.

定理 1. 當黎曼積分 $\int_a^b f(x)dx$ 存在時，$f(x)$ 在區間 $[a, b]$ 上是一有界函數.

證明　所要證明的是：假如 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的上界是 $+\infty$，那末 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必不可用黎曼意義來積分.

事實上，設 $D(x_1^{(n)}, \cdots, x_{m_n}^{(n)})$ 是 $[a, b]$ 上之一分點系統，這就是說：

$$\lim_{n \to \infty} \delta(x_1^{(n)}, \cdots, x_{m_n}^{(n)}) = 0.$$

記 $S(x_1^{(n)}, \cdots, x_{m_n}^{(n)}) = \sum_1^{m_n} f(\xi_k)(x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)})$ 中的正項部分爲 S_1 負項部分爲 S_2:

$$S(x_1^{(n)}, \cdots, x_{m_n}^{(n)}) = S_1 + S_2, S_1 > 0, S_2 \leqslant 0.$$

一切 $f(\xi_k)(x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)}) \leqslant 0$ 的項都在 S_2 中. m_n 個小區間 $[x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)}]$ 中必有一個如下的小區間,在此區間上, $f(x)$ 的上界爲 $+\infty$ 那末存在着如下的點 ξ:

$$x_{k-1}^{(n)} < \xi < x_k^{(n)}, f(\xi)(x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)}) > n - S_2.$$

因此 $S(x_1^{(n)}, \cdots, x_{m_n}^{(n)}; \xi_1, \cdots, \xi_{k-1}, \xi, \xi_{k+1}, \cdots, \xi_{m_n}) > (n - S_2) + S_2 = n$. 由是可知積分不存在, 同樣可證 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 的下界爲 $-\infty$ 時,積分也不存在,證明完畢.

今設 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是一有界函數, 則在區間 $[x_{k-1}, x_k]$ 上, $f(x)$ 有上界 M_k. 下界 m_k. 置

$$\bar{S} = \bar{S}(x_1, \cdots, x_n) = \sum_1^n M_k(x_k - x_{k-1}),$$

$$\underline{S} = \underline{S}(x_1, \cdots, x_n) = \sum_1^n m_k(x_k - x_{k-1})$$

增加分點後, $\bar{S}$ 决不增大, $\underline{S}$ 决不减少. 由於

$$m(b - a) \leqslant \underline{S} \leqslant \bar{S} \leqslant M(b - a),$$

故當 $\delta \to 0$ 時, $\lim \bar{S}$ 和 $\lim \underline{S}$ 都存在,但 M, m 表示 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 中之上界與下界. 現在證明極限值

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(f) = \lim \bar{S} \text{ 和 } \underline{\sigma} = \underline{\sigma}(f) = \lim \underline{S}$$

與分點系統

$$D(x_1, \cdots, x_n), \ \delta(x_1, \cdots, x_n) \to 0$$

沒有關係. 我們可以假設 $f(x) > 0$; 這是因爲

$$\bar{\underline{\sigma}}(f + p) = \bar{\underline{\sigma}}(f) + p(b - a).$$

取適當大的常數 p 可使 $f + p > 0$. 設 $D(x_1, \cdots, x_n)$ 與 $D(x_1', \cdots, x_m')$ 是兩種分點系統, $\bar{S}, \underline{S}, \bar{S}', \underline{S}'$ 爲其所對應之和. 設

$$\bar{S} \to \bar{\sigma}, \underline{S} \to \underline{\sigma}, \bar{S}' \to \bar{\sigma}', \underline{S}' \to \underline{\sigma}'.$$

我們要證 $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}'$, $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}'$. 固定 n 與 m, 由 $D(x'_1, \cdots, x'_m)$所成諸區間中含有 $D(x_1, \cdots, x_n)$之分點的,設為

$$[x'_{k'-1}, x'_{k'}],$$

其餘諸區間$[x'_{k''-1}, x'_{k''}]$都不含有 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中任何點. 設 $f(x)$ 在$[x'_{k-1}, x'_k]$中的上界為 M'_k. 寫

$$\Sigma' = \sum_{k'} M'_{k'}(x'_{k'} - x'_{k'-1}),\ \Sigma'' = \sum_{k''} M'_{k''}(x'_{k''} - x'_{k''-1}),$$

那末

$$\bar{S}' = \Sigma' + \Sigma''.$$

設 $\delta' = \max(x'_k - x'_{k-1})$, 則 $\Sigma' \leqslant n\delta' M$, $\Sigma'' \leqslant \bar{S}$. 由是

$$\bar{S}' \leqslant n\delta' M + \bar{S}(x_1, \cdots, x_n).$$

令 $\delta' \to \infty$, 得 $\bar{\sigma}' \leqslant \bar{S}(x, \cdots x_n)$. 再令 $\delta \to \infty$, 乃得 $\bar{\sigma}' \leqslant \bar{\sigma}$. 同理 $\bar{\sigma} \leqslant \bar{\sigma}'$. 所以 $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}'$. 又由

$$\underline{\sigma}(f) = -\bar{\sigma}(-f),\ \underline{\sigma}'(f) = -\bar{\sigma}'(-f),$$

知 $\underline{\sigma}' = \underline{\sigma}$.

$\bar{\sigma}$ 和 $\underline{\sigma}$ 與分點系統既無關係,而由 $f(x)(a \leqslant x \leqslant b)$決定,我們稱 $\bar{\sigma}$ 為 $f(x)$ 的**上積分**, $\underline{\sigma}$ 為 $f(x)$ 的**下積分**, 兩者通稱為**打布(Darboux)的積分**,用下面的記號來表達這些積分:

$$\bar{\sigma} = \overline{\int_a^b} f(x)dx,\ \underline{\sigma} = \underline{\int_a^b} f(x)dx.$$

定理 2. *設 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上之有界函數,則黎曼積分*

$$\int_a^b f(x)dx.$$

存在的充要條件是兩打布積分相等: $\bar{\sigma} = \underline{\sigma}$.

證明 假如 $\bar{\sigma} = \underline{\sigma}$ 則由 $\underline{S} \leqslant S \leqslant \bar{S}$, 即得

$$\lim_{\delta \to 0} S = \bar{\sigma} = \underline{\sigma}.$$

其次,證明條件的必要性. 假如 $f(x)$ 的黎曼積分存在, 那末對於任一分點系統 $D(x_1, \cdots, x_n)(\delta \to 0)$, 作出如下的 $\bar{S}(x_1, \cdots, x_n)$,

$S(x_1, \cdots, x_n)$等數．於$[x_{k-1}, x_k]$中取如下的兩點ξ_k, η_k：

$$0 \leqslant M_k - f(\xi_k) < \frac{1}{n},\ 0 \leqslant f(\eta_k) - m_k < \frac{1}{n},$$

則

$$\Sigma f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \geqslant \bar{S} - \frac{1}{n}(b-a),$$

$$\Sigma f(\eta_k)(x_k - x_{k-1}) \leqslant \underline{S} + \frac{1}{n}(b-a).$$

由是

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant \underline{\int_a^b} f(x)dx$$

然$\underline{\sigma} \leqslant \bar{\sigma}$，故從上式得着$\underline{\sigma} = \bar{\sigma}$．

若$M_k - m_k = \omega_k$是區間$[x_{k-1}, x_k]$上$f(x)$的振幅，則稱

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\bar{S} - \underline{S}}{b-a} = \lim\frac{\Sigma\omega_k(x_k - x_{k-1})}{b-a} = \frac{\bar{\sigma} - \underline{\sigma}}{b-a}$$

爲$f(x)$在$[a, b]$上的平均振幅，由是得

系 1 有界函數$f(x)(a \leqslant x \leqslant b)$具有黎曼積分的充要條件是它的平均振幅等於0．

設$\varepsilon > 0$，設在區間$[x_{k-1}, x_k]$上$\omega_k > \varepsilon$，記這種區間之長$x_k - x_{k-1}$的和爲

$$\lambda(\varepsilon) = \lambda(\varepsilon; x_1, \cdots, x_n),$$

那末$\varepsilon\lambda(\varepsilon) \leqslant \Sigma\omega_k(x_k - x_{k-1}) \leqslant (M-m)\lambda(\varepsilon) + \varepsilon(b-a-\lambda(\varepsilon))$．由是可述

系 2 黎曼積分存在的充要條件是當$\delta \to 0$時，$\lambda(\varepsilon) \to 0$．

下述定理，指出黎曼可積函數的特徵，是勒貝格發明的．

定理 3. 設$f(x)$在$[a, b]$上是一有界函數，在此區間中，$f(x)$的一切不連續點所成之集爲E，則$f(x)$在$[a, b]$上具有黎曼積分的充要條件是E的測度等於0．

證明 先證條件的必要性．設$\delta > 0$，n是一正整數，振幅$\omega(x)$大於$\frac{1}{2^n}$之一切點x，成一點集E_n，由定理1的系2，E_n可用

測度小於 $\frac{\delta}{2^n}$ 之開集覆蓋它，那末 $E = \sum E_n$，$|E|$ 小於 $\sum \frac{\delta}{2^n} = \delta$，$\delta$ 是任意的正數，所以 E 是一零集。

爲着要建立條件的充足性，我們回想到第四章 §7 定理 3 的特別情形：設 $g(x)$ 的定義區是閉區間 $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$，$\omega(x)$ 是 $g(x)$ 的振幅函數。假如 $\omega(x) \leqslant p$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上處處成立，那末對於任一正數 ε，必有 $\delta = \delta(\varepsilon)$，當 $|x - x'| < \delta$ 時，

$$|g(x) - g(x)| < p + \varepsilon.$$

現在從 $|E| = 0$ 導出積分的存在。設 $E(\varepsilon)$ 表示 $f(x)$ 的振幅函數 $\omega(x)$ 大於 ε 的一切 x 所成之點集。$E(\varepsilon)$ 是 E 的子集，其測度等於 0。設 $D(x_1, x_2, \cdots, x_n)(\delta \to 0)$ 是一分點系統。在分點 $x_1, \cdots, x_n$ 組所分成的區間

$$J_k = [x_{k-1}, x_k] \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

中，設其含有 $E(\varepsilon)$ 之點的全體爲 $\Delta = \Delta(x_1, \cdots, x_n)$。$\Delta$ 是由有限個區間所構成之一點集，當分點增多時，$|\Delta|$ 有減無增。極限點集

$$A = \lim_{\delta \to 0} \Delta$$

是一零集：若不然，則 $|A| > 0$。此時對於 A 中一點 ξ，Δ 中有區間 J_k 含有 ξ，因之

$$\omega(\xi) \geqslant \varepsilon.$$

故 $A \subseteq E(\varepsilon)$，這是與 $|E(\varepsilon)| = 0$ 相衝突的。所以 $|A| = 0$。取 δ 甚小，使 $|\Delta| < \varepsilon$，那末 $C(\Delta) = [a, b] - \Delta$ 的測度大於 $b - a - \varepsilon$。若 $x \in C(\Delta)$，則 $\omega(x)$ 小於 ε。$C(\Delta)$ 也是由區間所構成之點集，於其中之任一區間，應用第四章 §7 的定理 3，再分它爲有限個小區間，使 $f(x)$ 在每一小區間中，其振幅小於

$$(p + \varepsilon =)\varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

這樣，於 $D(x_1', \cdots, x_n)$ 添加了新的分點，得新的分點系統

$$\mathfrak{D}(x_1', x_2', \cdots, x_\mu')(\delta' = \delta'(x_1', \cdots, x_\mu') \to 0).$$

從 $\mathfrak{D}$ 所得的和是

$$\mathfrak{S} = \sum_{k=1}^{\mu} \omega_k'(x_k' - x_{k-1}').$$

其中 ω_k' 表示 $f(x)$ 在 (x_{k-1}', x_k') 上的振幅．由是

$$\lim_{\delta\to 0} \mathfrak{S} \leqslant \varepsilon(M - m) + (b - a)2\varepsilon.$$

由於 ε 的任意性，所以平均振幅等於 0．由定理 1 的系 1，知積分存在．證明完畢．

系 1 具有下列性質之一的有界函數 $f(x)(a \leqslant x \leqslant b)$，其黎曼積分必存在：

1° 連續．2° 有界變差．3° 無第二種不連續點．

系 2 設 $a \leqslant c < d \leqslant b$，當 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的黎曼積分存在時，它在 $[c,d]$ 上的黎曼積分也存在．又

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

系 3 若有界函數 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 中的不連續點的全體都是零集，則當 $f(x) \leqslant g(x)$ 時，

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx.$$

特別當 $g(x) = |f(x)|$ 時，此不等式成立．

系 4 設 $m_\nu \leqslant f_\nu(x) \leqslant M_\nu(\nu = 1, 2, \cdots, n)$，又設 $F(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 在閉室

$$m_\nu \leqslant y_\nu \leqslant M_\nu(\nu = 1, 2, \cdots, n)$$

中是一連續函數，那末當黎曼積分

$$\int_a^b f_\nu(x)dx \quad (\nu = 1, 2, \cdots, n)$$

存在時，黎曼積分

$$\int_a^b F(f_1, f_2, \cdots, f_n)dx$$

也存在．

系 5 設 $f_n(x)(n = 1, 2, \cdots, a \leqslant x \leqslant b)$ 是一黎曼可積的

函數列，則當 $\lim f_n(x)$ 匀斂於 $f(x)$ 時，$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的黎曼積分也存在，且

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

設 $F(x)$ 是在 $[a, b]$ 上所定義之一函數，假如對於任一正數 ε，有 $\delta = \delta(\varepsilon)$ 存在；當

$$J_k = [a_k, b_k] \in [a, b],\ J_k \cdot J_l = 0 (k \neq l),$$

$\sum_1^N |J_k| < \delta$ 時，$\Sigma |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$ 常成立，那末，稱 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上是全連續的． 全連續函數又名絕對連續函數，所以絕對連續續函數是一連續函數．$\delta(\varepsilon)$ 是與 ε 有關的，現在設 $\varepsilon = 1$，

$$\frac{b-a}{\delta(1)} + 1 = M,\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

那末

$$|f(x_1) - f(x_0)| + \cdots + |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leqslant M$$

對於任一分點組 $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ 成立．因此，全連續函數是一有界變差的函數．

設 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 具有黎曼積分，那末，稱 x 的函數

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad a \leqslant x \leqslant b$$

為 $f(x)$ 的（黎曼）積分函數，又稱為黎曼不定積分．若 $|f| \leqslant M$，則

$$\Sigma |F(x_k) - F(x'_k)| \leqslant M\Sigma(x_k - x'_k)(x_k > x'_k).$$

所以不定積分是一全連續函數．全連續函數是一有界變差的函數，所以導數 $F'(x)$ 幾乎處處存在．$f(x)$ 在 $[a, b]$ 中之不連續點的全體，成一零集 E，設 $x \bar{\in} E$，那末，從

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h}\{f(t) - f(x)\}dt + f(x) \tag{1}$$

知 $F'(x)$ 存在，且等於 $f(x)$．這就是說，當 $x \bar{\in} E$ 時，

$$F'(x) = f(x),$$

所以對於連續函數 $f(x)$ 積分和微分是可逆運算.

假如 $f(x+0)$存在,那末從(1),得 $F'_{+}(x) = f(x+0)$,同樣,當 $f(x-0)$存在時, $F'_{-}(x) = f(x-0)$, 所以在 $f(x)$之第一種不連續點 $F'(x)$不存在, 事實上, $F'_{+}(x)$ 和 $F'_{-}(x)$ 雖都存在而不相等.

假如有可以的微分的函數 $\varphi(x)$ 適合 $\varphi'(x) = f(x)$, 那末說: $f(x)$具有原函數 $\varphi(x)$. 假如可積函數 $f(x)$具有原函數 $\varphi(x)$, 那末 $\varphi(x)$和不定積分 $F(x)$的差是一常數. 這就是積分的基本定理:

定理 1. 在 $[a, b]$ 上, $f(x)$ 可以(黎曼)積分並且具有原函數 $\varphi(x)$, 那末

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

證明 設 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. 利用中值定理,

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \sum_1^n (\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})) =$$

$$= \sum_1^n \varphi'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}),$$

但 ξ_k 是(x_{k-1}, x_k)中的一點. 因 $\varphi' = f$, 所以

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \sum_1^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

當 $\delta(x_1, \cdots, x_n) \to 0$,即得所要的結果. 證明完畢.

可積函數未必具有原函數. 例如 $f(x)$是在$[0, 1]$所定義的函數,當 x 等於既約分數 $\frac{p}{q}$ 時, $f(x) = \frac{1}{q}$; 在無理點 x, $f(x) = 0$. 由是一切無理數 $x \in (0, 1)$, 都是 $f(x)$的連續點,所以在$(0, 1)$上的黎曼積分存在. 但是 $F(x)$全等於 0, $f(x)$並無原函數.

具有原函數的有界函數,未必可以(黎曼)積分,有實例如下. 設 E 是$[a, b]$中之一疏朗閉集, $|E| > 0$, 這種點集的存在, 詳見

第七章 §2 的末尾. 置 $g(t) = t^2 \sin \frac{1}{t}$. 設

$$\varphi(x) = 0 \quad (x \in E).$$

在 E 之餘區間(α, β)上, $\varphi(x)$的定義如下: 設 γ 是滿足下列諸關係之最大的 x:

$$g'(x) = 0,\ g''(x) < 0,\ 0 < x < \frac{\beta - \alpha}{2}.$$

當 $\alpha < x \leqslant \alpha + \gamma$ 時, $\varphi(x) = g(x - \alpha)$;

當 $\alpha + \gamma < x < \beta - \gamma$ 時, $\varphi(x) = g(\gamma)$;

當 $\beta - \gamma \leqslant x < \beta$ 時, $\varphi(x) = g(\beta - x)$.

現在證明 $\varphi'(x)$處處存在. E 是一疏朗點集, 對於 E 的一點 x, 區間(x, x')中必含有E的餘區間(α, β). 所以當 $x' \to x$ 時,

$$\frac{|\varphi(x') - \varphi(x)|}{x' - x} = \frac{|\varphi(x')|}{x' - x} \leqslant \frac{(x' - x)^2}{x' - x} = x' - x \to 0$$

由是 $\varphi'_+(x) = 0$. 同樣可證 $\varphi'_-(x) = 0$. 由是當 $x \in E$ 時 $\varphi'(x) = 0$. 在$(\alpha, \alpha + \gamma)$中,

$$\varphi'(x) = 2(x - \alpha)\sin \frac{1}{x - \alpha} - \cos \frac{1}{x - \alpha};$$

在 $(\beta - \gamma, \beta)$中, $\varphi'(x) = 2(\beta - x) \sin \frac{1}{x - \beta} + \cos \frac{1}{\beta - x}$.

所以 $\varphi'(x)$ 在 E 中任何點 x, 它的振幅 $= 2$. 因 $|E| > 0$, 所以 $\varphi'(x) = f(x)$是一不可以(黎曼)積分的有界函數.

設 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上之一有限函數, 當 $h \to 0$ 時, 假如 $\overline{\lim}|f(x_0 + h)| = +\infty$, 那末 x_0 是 $f(x)$之一**無限點**. $f(x)$ 的無限點的全體 E 是一閉集. 假如對於任一正數 ε, 有區間(有限個)之集 Δ 遮蓋 E. 在$[a, b] - \Delta$ 上 $f(x)$的黎曼積分常存在. 設

$$\sum_{\nu} (a_\nu, b_\nu) = [a, b] - \Delta,$$

則當極限

$$\lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{\nu} \int_{a_\nu}^{b_\nu} f(x) dx$$

存在且有一定的數值時，稱這個數值爲 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的黎曼哈那克(Harnack)積分．假如 E 是一有限點集，$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k$ 是 E 中所有的點那末當極限

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k \to 0 \\ \eta_1, \cdots, \eta_k \to 0}} \left(\int_a^{\xi_1 - \varepsilon_1} + \int_{\xi_1 + \eta_1}^{\xi_2 - \varepsilon_2} + \cdots + \int_{\xi_k + \eta_k}^{b} \right) f(x) dx$$

存在時，這個極限就是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的哈爾那克積分．當 $\varepsilon_1 = \eta_1$, $\varepsilon_2 = \eta_2, \cdots, \varepsilon_k = \eta_k$ 時，上面的極限可能存在：此時稱 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的柯西積分主值存在．柯西的積分主值分存在時，哈那克積分未必存在，例如函數

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1)$$

在 $[-1, 1]$ 上的積分主值是 0，但是當 $\varepsilon \to 0$, $\eta \to 0$ 時，

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\eta}^{1} \frac{dx}{x} = \log \frac{\varepsilon}{\eta}$$

的極限並不存在．

假如 $|f(x)|$ 和 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的黎曼哈那克積分都存在，那末稱 $\int_a^b f(x) dx$ 是一**絕對收斂的黎曼哈那克積分**．但是當 $f(x)$ 的積分存在時，$|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 上的積分未必存在；例如

$$\int_0^1 \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt,$$

$$\int_0^1 \left| \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} \right| dx = \infty.$$

這個積分 $\int_a^b f(x) dx$，稱爲**條件收斂的積分**．另一方面，當 $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 的黎曼存在的時候，$f(x)$ 的黎曼積分未必存在．例如當 x 爲有理數時 $f(x) = 1$；x 爲無理數時，$f(x) = -1$，那末 $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 上積分等於 $b - a$，但積分 $f(x)$ 的黎曼積分並不存在．

2. 平面曲綫　什麼是平面曲綫？具有某種特性之平面上的點

集是平面曲綫．下列諸條件之一，可以作爲平面連續曲綫的定義：

(i) 沒有內點的平面上之連續點集，這叫做康妥曲綫．

(ii) 閉區間在平面上之連續映像，這叫做若當曲綫．

(iii) 平面上連結區域的境界．

普通所用，連續曲綫的定義不出這三種，但是這三種連續曲綫，兩兩相異，說明如下．

第四章 §4 中之填充空間的連續曲綫是若當曲綫，但是它有內點，所以不是康妥曲綫．設

$$y = \sin\frac{1}{x}\ (-1 \leqslant x < 0,\ 0 < x \leqslant 1)$$
$$= [-1, 1]\ (x = 0),$$

那末(x, y)的全部，是一沒有內點的閉集 M, M 是一聯絡點集，假如不然．那末M可以分解爲兩閉集 M_1 和 M_2:

$$M = M_1 + M_2,\ M_1M_2 = 0,\ M_1 \neq 0,\ M_2 \neq 0.$$

設 $x_1 > 0$, $(x_1, y) \in M_1$, 那末當 $|h|$ 甚小時，一切點

$$\left(x_1 + h, \sin\frac{1}{x_1 + h}\right)$$

都屬於 M_1, 所以在 y 軸右方的，M 中一切的點都屬於 M_1, 同樣可證 M 的點在 y 軸左方的話，它必屬於 M_2. M 在 y 軸上之一切點：

$$x = 0,\ -1 \leqslant y \leqslant 1,$$

都是 M_1 的極限點，也是 M_2 的極限點，所以屬於 M_1M_2, 這是矛盾．因此M是一連續點集，是一康妥曲綫．但是 M 決非若當曲綫．假如不然，應該有連續函數 $\varphi(t)$, $\psi(t)$ 如下：

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ (\alpha \leqslant t \leqslant \beta),$$

M 是點$(\varphi(t), \psi(t))$的全體．假如$[\alpha, t_0]$對應於 M 中 $x < 0$ 的一切點，$[t, \beta]$對應於 M 中 $x > 0$ 的一切點．當 $t \to t_0 - 0$ 或 $t \to t_1 + 0$ 時，只得着兩點 $(\varphi(t_0), \psi(t_0))$ 和 $(\varphi(t_1), \psi(t_1))$, 不成一個區間 $[-1, 1]$.

上述彼阿諾的曲綫是一若當的連續曲綫，但決非區域的境界．

現在舉例說明區域的境界未必是若當曲綫.設有平面區域G,(x,y)是G中任意一點,G含有三種點:

第一種點 $0<x<1$, $\sin\frac{1}{x}<y<2$;

第二種點 $x=0$, $1<y<2$;

第三種點 $0<x<-1$, $-1<y<2$.

G的境界C含有曲綫$y=\sin\frac{1}{x}$ $(0<x\leqslant 1)$和五直綫分:

$x=1$, $\sin 1\leqslant y\leqslant 2$; $-1\leqslant x\leqslant 1$, $y=2$;

$x=-1$, $-1\leqslant y\leqslant 2$; $-1\leqslant x<0$, $y=-1$;

$x=0$, $-1\leqslant y\leqslant 1$.

C不是一條若當曲綫.

容易明白,區域的境界是從康妥曲綫所構成.但是區域的境界而外,還有別的康妥曲綫,例如E是$[0,1]$上之一疏朗完全點集,適合

$$x\in E,\ 0\leqslant y\leqslant 1$$

的一切點(x,y)成一康妥曲綫,然而决非區域的境界.

三種曲綫的定義,範圍各有不同,現在對於若當曲綫,加以"一一對應"的限制,這就是說:平面點集可以跟一區間成一對一的連續對應的,叫做若當的單純曲綫.假如區間的兩端對應於曲綫上同一點,那末稱它爲若當閉曲綫.換句話說:設$\varphi(t)$和$\psi(t)$是區間$[\alpha,\beta]$上的連續函數,當$t\neq t'$時,

$$(\varphi(t),\psi(t))\neq(\varphi(t'),\psi(t')). \tag{1}$$

那末$x=\varphi(t')$, $y=\psi(t)(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$表示若當單純曲綫.假如(1)當$\alpha<t<\beta$, $\alpha<t'<\beta$時成立,但是

$$(\varphi(\alpha),\psi(\alpha))=(\varphi(\beta),\psi(\beta)) \tag{2}$$

的話,$x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$表示若當閉曲綫.這種曲綫,就是跟圓周成一一對應的連續曲綫.下面的定理,是這種曲綫的基本性質,稱爲

若當的曲綫定理　任一若當閉曲綫 C 劃分平面做兩個區域，C 是它們的共通境界.

曲綫定理，初見之於若當(C. Jordan)的解析通論(1887)，繼若當之後，證明曲綫定理的很多．下面的證明，是由於菲列帕夫[1].

設 XY 是一直綫，L 是一折綫，設 p 是 L 與 XY 之一共通點，假如

1）　p 是 L 中某邊的內點，或是

2）　p 是 L 之一頂點，但是通過 p 點的兩邊不在 XY 之同一側，那末稱 p 是 L 和 XY 之一正常交點.

現在先證

補助定理　設 L 與 M 是平面上不相交的兩折綫，而有下列兩種形勢之一：

（一）　L 成一閉多角形，

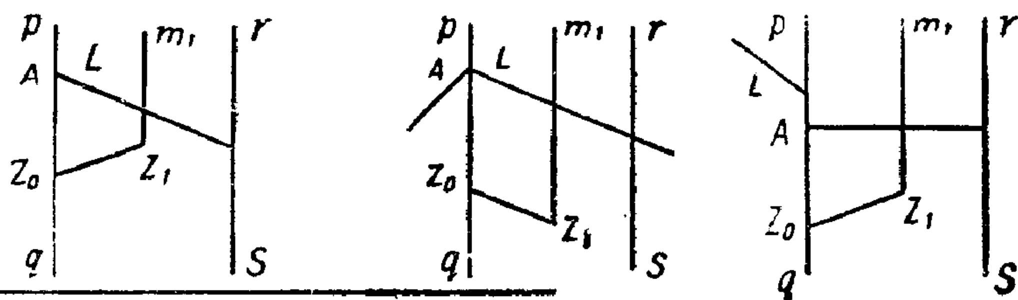
（二）　M 居兩縱綫之間，這兩縱綫各通過 L 之一頂點.

設 $Z\in M$，從 Z 向上作半縱綫 Zm，定 $N(Z, L)$ 的意義於下：假如 L 與 Zm 的正常交點有偶數個，$N(Z, L)$ 等於 0；若不然，$N(Z,L)$ 等於 1，那末函數

$$N(Z, L)\quad (Z\in M)$$

是一常數.

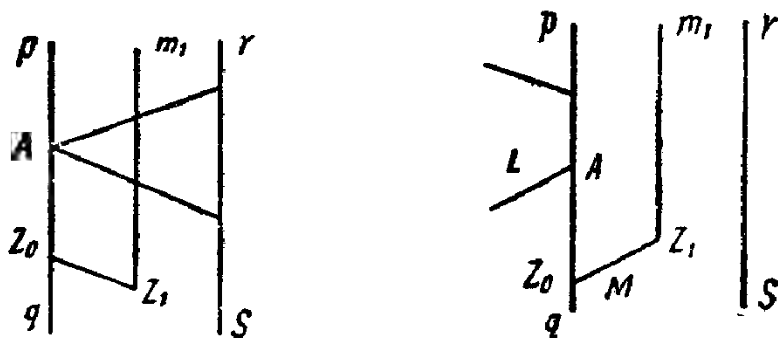
事實上，經過 L 的一切頂點，各作縱綫．M 上的點 Z 在相隣兩縱綫間時，$N(Z, L)$ 顯然不變，這是因爲 L 與 M 不相交的緣故.



1) А. Ф. Филипов (1950).

今設M中之點Z_0在縱綫qp上，Sr是與qp相鄰的縱綫，qp和Sr間有M之點Z_1，假如從qp與L之一正常交點A，可引出L的一邊(但是只有一邊)在兩縱綫qp與Sr間，那末此邊與縱綫Z_1m_1相交於一點．若不然，qp與Sr間，L有兩邊經過A點，或竟無一邊經過A(在qp與Sr間)．所以不拘情形如何，

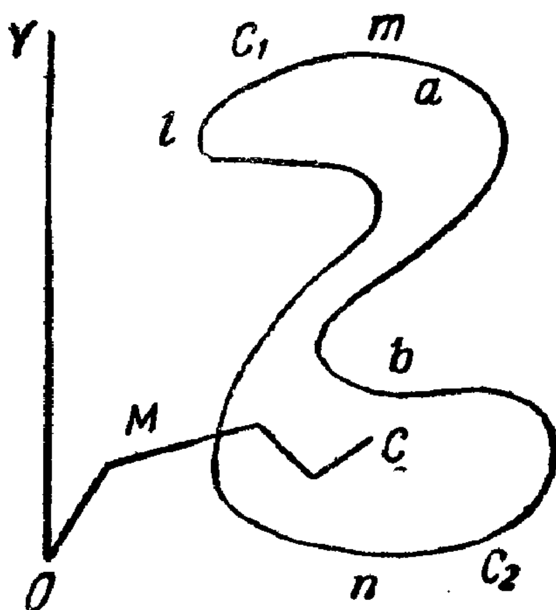
$$N(Z_0, L) = N(Z_1, L).$$



補助定理的證明已經完成．現在證明

I．**設C是平面上之一閉若當曲綫，那末C劃分平面至少做兩部分．**

取坐標軸OY居C之左而不穿過C，C和圓周K可成一對一的連續對應，設l是C上最左的一點，p是C上最右的一點；l, p對應於K上之l', p'，l', p'分K為兩圓弧K_1, K_2，設K_1, K_2對應於C的弧C_1，C_2而C_1在C_2的上方，在l, p之間，作一縱綫nm，mn和C_1的交點中，最高的是a，最低的是b，於mn上取一點C，使C在b的下方，且使



$r(b, c) < r(b, c_2)$從0到c作折綫M，那末M和C必有共通之點，事實上，假如

$r(M, C)=q>0$，那末設 $r(C_1, C_n)=t(>0)$，$r(cb+\widehat{ba}+a_m, c_2)=$ $=S(>0)$，但 $\widehat{ba}$ 表示從 b 沿 c 到 a 的（c 的）部分．又設 h 是 q, t, S 中之最小的數．作 c 之一接觸多角形(頂點都是 c 的點) L,使 L 各邊的都小於 h，且使 a, b, l, p 都是 L 的頂點，設 L 的頂點在 C_1 上的部分折綫是 L_1, C_2 上的部分折綫是 L_2, $\widehat{ba}$ 上的部分是 H.

因 L 上任何點與 C 的距離小於 $\frac{1}{2}h$,

$$r(L, M)\geqslant r(M, C)-\frac{h}{2}=q-\frac{h}{2}\geqslant\frac{1}{2}h>0.$$

所以 L 和 M 不相交，因

$$r(L_1, C_n)\geqslant r(C_1, C_n)-\frac{h}{2}=t-\frac{h}{2}\geqslant\frac{h}{2}>C,$$

所以 L_1 與 C_n 不相交，又因 $r(C_2, \overline{cb}+\widehat{ba}+am)=S\geqslant h$，所以 C_2 與 $\overline{cb}$, H, $\overline{am}$ 都不相交．現在計算 $N(C, L_1)$ 和 $N(C, L_2)$的數值．因 L_1 的兩端在 mn 的兩側，所以 L_1 和 mn 的正常交點有奇數個，這些正常交點都在 C 的上方(因 L_1 與 C_n 不相交)，它的兩端是 c 和 a，由補助定理，

$$N(C, L_2)=N(a, L_2).$$

半直綫 am 不與 L_2 相交，故上式右端等於 0，因之，$N(C, L_2)$等於 0．由是

$$N(C, L)=N(C, L_1)+N(C, L_2)=1.$$

因 OY 軸全在 C 的左方，所以 $N(0, L)=0$．M 和 L 既不相交，故又由補助定理，

$$N(0, L)=N(C, L).$$

左邊是 0，右邊是 1，上式是不能成立的，所以 C 必與 M 相交．I 的證明已經完畢．

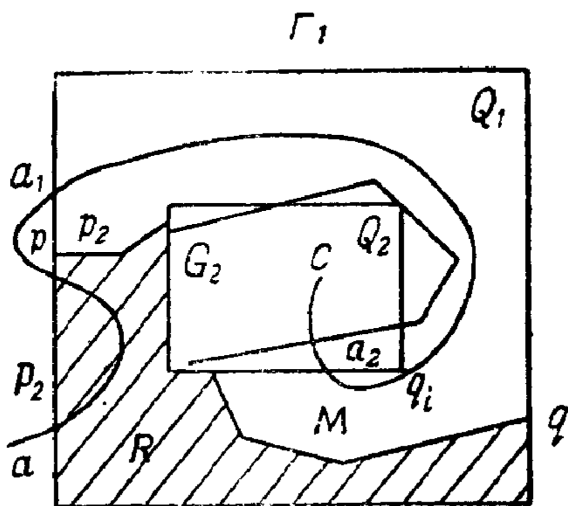
平面點集與一綫分成一對一的連續對應的，叫做單純弧綫．

II．單純弧綫不能劃分平面爲兩個(或兩個以上的)區域．

設 $\widehat{ab}$ 是一單純弧綫，p 和 q 是平面 $\widehat{pq}$ 上的任意兩點，L是以 p,q 做兩端的任意折綫，假如 L 與 $\widehat{ab}$ 常有交點那就可導出如下的矛盾：綫分 $\overrightarrow{ab}$ 與 $\overset{\frown}{ab}$，兩者的點可以使它們成一對一的連續對應，在直綫 $\overrightarrow{ab}$ 上，點從 a 移動到 b 的話；在 $\widehat{ab}$ 上的對應點，也從 a 移動到 b. 在這個(點的順序)規約上，先來證明：

(甲)　C' 是 $\widehat{ab}$ 上的點，$\widehat{ac'}$ 不能劃分平面做兩部分之 C' 的限點是 c；那末

(乙)　$\widehat{ac}$也不能劃分平面做兩部分。



以 C 爲中心，作正方形 Q_1，Q_1 中不含有 a,p,q 三點，Q_1 的周界 P_1 必與$\widehat{ac}$相交，a_1 是它們最後的交點，所以 $\widehat{a_1c}$ 與 Γ_1 不相交. 又以 C 做中心，作小正方形 Q_2，使 $\widehat{aa_1}$ 在 Q_2 的外部；$\widehat{a_1c}$ 必與 Q_2 相交，a_2 是它們最後的交點，因 a_2 是(甲)中之一 C' 點，所以必有折綫

$$L = p \cdots q$$

不與 $\widehat{aa_2}$ 相交，假如 L 不與 $\widehat{ac}$ 相交，那末(乙)成立；假如不然，L 必與 $\widehat{a_2c}$ 相交，設 L 在 Q_1 內的部分是 p_iq_i，p_iq_i 的兩端 p_i 和 q_i 都在 P_i 上，今證有以 p_i 和 q_i 做兩端的折綫 M，M 不與 $\widehat{ac}$ 相交，p_i，q_i 兩點分 P_1做兩部分：第一部分含有點 a_1，記他做 Γ_1，第二部分記它做 Γ_2，折綫 p_iq_i 劃分 Q_1 做兩部分，其中含有Γ_2 的部分記它做 G_2. $\widehat{a_1a_2}$ 與 G_2 沒有共通的點；事實上，a_1 在 G_2 之外部，且 $\widehat{a_1a_2}$ 不與 G 的境界——$\Gamma_2 + p_iq_i$——相交.

點集 $G_2 - Q_2$ 是由多角形所形成，它和 Γ_2 相接的部分記它做 R. 設 M 是 R 的一部分的境界，M 的兩端是 p_i 和 q_i，M 和 Γ_2 合而爲 R 的境界，現在證明 M 不與 $\widehat{ac}$ 相交. 實際上

$$M \subset p_iq_i + \Gamma_2,\ M \subset \overline{G}_2 \quad (\overline{G}_2\text{表示} G_2 \text{的包}),$$

$\widehat{aa_1} \cdot p_iq_i = 0$ ($\because L \cdot aa_2 = 0$), $\widehat{aa_1} \cdot p_2 = 0$ (因 a_1 不在 Q_2 的外部), 又因

$$G_2 \cdot \widehat{a_1a_2} = 0, \quad \widehat{a_2c} \subset Q_2.$$

所以 $M \cdot (\widehat{a_1a_2} + \widehat{a_2c}) = M \cdot \widehat{a_1c} = 0$, 總之: 假如 pq 的某一部分 p_iq_i 與 $\widehat{ac}$ 相交的話, 我們可以作一 M, 使 $M \cdot \widehat{ac} = 0$, 所以 $\widehat{ac}$ 不能劃分 p 和 q. 現在證明

(丙) c 與 b 一致.

假如 $c \neq b$, 那末, $\widehat{cb}$ 上有一點 C_1 適合 $r(C, C_1) < r(\widehat{ac}, L)$. 由是

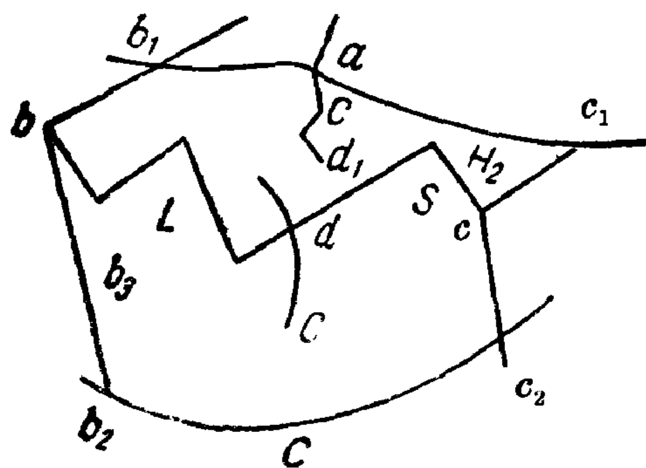
$$r(\widehat{ac}, L) \geqq r(\widehat{ac}, L) - r(c, C_1) > 0,$$

$\widehat{ac_1}$ 與 L 不相交, 這是有背於 C 點的意義的. 從(甲), (乙), (丙), 知道 $\widehat{ac}$ 不能劃分 p 和 q.

III. 假如閉曲綫 C 劃分全平面爲 $G_1, G_2, \cdots$ 等區域, 那末 C 是任一 $G_\nu (\nu = 1, 2, \cdots)$ 的境界.

設 G_1 的境界是 Γ_1, 假如 C 有點 a 不屬於 Γ_1, 那末以 a 做中心, $r(a, \Gamma_1)$ 做半徑, 作圓 K. 設 C 在 K 中的部分是 γ, 那末 $\Gamma_1 \subseteq K - \gamma$. 設 $p \in G_1$ $q \in G_1$, 那末 Γ_1 劃分 p 和 q, 因之 $C - \gamma$ 劃分 p 和 q, 然而 $C - \gamma$ 是單純弧綫, 它不能劃分 p 和 q, 所以 Γ_2 就是 C.

曲綫定理的證明 設 C 劃分全平面做 $G_1, G_2, \cdots$. 又設 a 在 G_1 中而 b 和 c 不屬於 $\overline{G}_1 = G_1 + \Gamma_1$, 證明有折綫 $b \cdots c$ 不與 C 相交好了.



從 b 作直綫 bb_1, bb_2 交 C 於 b_1, b_2. 又從 c 作直綫 cc_1, cc_2 交 C 於 c_1, c_2. 此地 b_1, b_2, c_1, c_2 是最近於 b 或 c 的交點; 它們的

順序限於下列三種情況：

1） $b_1c_1b_2c_2$,

2） $b_1b_2c_2c_1$,

3） $b_1b_2c_1c_2$.

於最後的一種，把 c_1 與 c_2 互換，就和 2)相同；所以寫

$$c_1' = c_2,\ c_2' = c_1$$

的話，2)和 3)是同性質的．折綫 b_1bb_2, c_1cc_2 和 C 的兩弧 $\widehat{b_1c_1}$, $\widehat{b_2c_2}$ 合成一閉曲綫 M, M 劃分全平面為 $H_1, H_2, \cdots$ 等區域．設 a 屬於 H_1, 從 III 知道 b 和 c 都是 H_2 的境界點，在 H_2 中，取兩點 b_3 和 c_3：b_3 甚近於 b, c_3 甚近於 c；使折綫

$$L = bb_3c_3c$$

屬於 H_2. 假如 L 與 C 有交點 d, 那末由 III, 在 d 之一環境

$$S(d) \subset H_2$$

中可得 G_1 的點 d_1；a 也是 G_1 的點，所以有折綫$(d, a) \subset G_1$. 這個折綫(d, a)不與 M 相交；事實上，

$$M \subset C + b_1bb_2 + c_1cc_2,$$

b_1bb_2 和 c_1cc_2 都在 G_1 的外部．但是 $d_1 \in H_2$, $a \in H_1$, 關係

$$(d_1a) \cdot M = 0$$

是不能成立的，所以 $L \cdot C = 0$. 證明完畢．

曲綫的長 設有曲綫 C:

$$x = \varphi(t);\ y = \psi(t),\ (\alpha \leqslant t \leqslant \beta).$$

於 $[\alpha, \beta]$, 作分點 $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$. 設 t_ν 對應於 C 上的點 P_ν:

$$x_\nu = \varphi(t_\nu),\ y_\nu = \psi(t_\nu).$$

設折綫 $P_0P_1, \cdots, P_n$ 的長是 $L(P_1, P_2, \cdots, P_n)$, 那末

$$L(P_1, \cdots, P_n) = \sum_{\nu=1}^{n} \sqrt{[\varphi(t_\nu) - \varphi(t_{\nu-1})]^2 + [\psi(t_\nu) - \psi(t_{\nu-1})]^2}.$$

當 $P_1, \cdots, P_n$ 變動時，$L(P_1, \cdots, P_n)$的上界 $L(C)$ 可能為 ∞. 假

如 $L(C)$ 是一有限數,稱 C 是一有長的曲綫,或稱 C 是一可以伸直的曲綫.

由於

$$L(P_1, \cdots, P_n) \leqslant \sum_1^n [|\varphi(t_\nu) - \varphi(t_{\nu-1})| + |\psi(t_\nu) - \psi(t_{\nu-1})|],$$

$$L(P_1, \cdots, P_n) \geqslant \max\left[\sum_1^n |\varphi(t_\nu) - \varphi(t_{\nu-1})|, \sum_1^n |\psi(t_\nu) - \psi(t_{\nu-1})|\right],$$

所以當 $L(C) < \infty$ 時; φ, ψ 的全變差 $V_\varphi(\alpha, \beta)$, $V_\psi(\alpha, \beta)$ 都不大於 $L(C)$.反過來說:當 φ, ψ 都是有界變差的函數時,

$$L(C) \leqslant V_\varphi(\alpha, \beta) + V_\psi(\alpha, \beta).$$

由是可述

定理 曲綫 $C[x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta]$ 可以伸直的充要條件是:φ 和 ψ 都在 $[\alpha, \beta]$ 上為有界變差.

系 曲綫 $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ 具有長度的充要條件是

$$V_f(a, b) < \infty.$$

連續函數未必是有界變差,所以連續曲綫未必有長.例如連續曲綫 $y = x \sin x^{-1} (0 \leqslant x \leqslant 1)$ 是沒有長的;這條曲綫除在原點而外,處處有切綫.

有長曲綫 $C: x = \varphi(t), y = \psi(t), \alpha \leqslant t \leqslant \beta$ 的長 $L(C)$,在怎樣情況下,可用公式

$$L(C) = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt \qquad (L)$$

表示? 積分限於黎曼意義的話,不能完全回答這個問題.下述定理,僅僅乎給公式成立之一充足條件.

定理 假如 $\varphi(t), \psi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 中處處可以微分,那末,當 $\varphi'(t), \psi'(t)$ 可以(黎曼)積分的時候,公式 (L) 成立.

證明 設 $\alpha = t_0 < t_1 <, \cdots, < t_n = \beta$. 設 $\varphi'(t), \psi'(t)$ 在 $[t_{k-1}, t_k]$

中的上界和下界分別是 $\Phi_k, \Psi_k, \varphi_k, \psi_k$；那末，由中值定理。

$$\sum_1^k (t_k - t_{k-1})\sqrt{\varphi_k^2 + \psi_k^2} \leqslant L_1(P_1, \cdots, P_n) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_1^n (t_k - t_{k-1})\sqrt{\Phi_k^2 + \Psi_k^2}.$$

當 $\max(t_k - t_{k-1})$趨近於 0 時，上式兩端都趨近於(L)中的積分，所以公式成立．證明完畢．

現在於 $[0, 1]$ 上定義 $f(x)$：設 E 是$[0, 1]$中之康妥的疏朗完全點集，那末 E 中任意一點 x，具有如下的形式：

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = (a_1, a_2, \cdots),\ a_n(a_n - 2) = 0.$$

在此點 x 上，定 $f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{2^n} + \cdots\right)$. 設$(a_\nu, b_\nu)$是 E 之一餘區間，則(a_ν, b_ν)的形式爲$[(a_1, a_2, \cdots a_{n-1} 0, 2, 2\cdots), (a_1, \cdots a_{n-1}, 1, 2, 2, \cdots)]$，當 $x \in (a_\nu, b_\nu)$時，定 $f(x) = f(a_\nu)$. 因 a_ν 屬於 E，所以

$$f(a_\nu) = \frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{0}{2^n} + \frac{2}{2^{n+1}} + \frac{2}{2^{n+1}} + \cdots\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{2}{2^n}\right).$$

由是 $f(a_\nu) = f(b_\nu)$. 所以 $f(x)$是增加連續函數：x 從 0 增到 1 時，$f(x)$ 從 0 增到 1．作曲綫

$$C:\quad y = f(x),\quad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

的接觸多角綫 $P_1, \cdots, P_n$，那末 $L(P_1, \cdots, P_n) = 2$，這是易從

$$|\Sigma(a_\nu, b_\nu)| = 1 \text{ 和 } f(0) = 0,\ f(1) = 1$$

明白的。但是當 $x \bar{\in} E$ 時，$f'(x) = 0$，所以$\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ 幾乎處處等於 1，從而，積分（依照下述勒貝格的定義）

$$\int_0^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

之值等於 1，而並不等於 $L(C) = 2$。

公式(L)成立的充要條件是：$\varphi(t)$和$\psi(t)$在$[\alpha,\beta]$都是全連續函數,(證明從略).

同樣的議論施之於空間曲綫$C: x=\varphi(t), y=\psi(t), z=\chi(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$,也是對的. 這就是說：在適當的限制下,$C$的長$C(L)$,可用公式

$$C(L)=\int_{\alpha}^{\beta}[\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2]dt$$

來表示;去其限制,那末上面的積分可能還有它的意義,但是不一定等於$C(L)$,公式成立的充要條件是：φ, ψ, χ三函數都是絕對連續.

至於曲面的面積,較曲綫的長,情形更爲複雜. 就是說凸體的表面吧,它的面積也很難定義. 如果說：凸體的表面積是內接多面體之表面積的極限,那末就有簡單例子說明這樣的定義是不適用的. 設$A(S)$是圓柱面

$$S:\quad x^2+y^2=1,\ 0\leqslant z\leqslant 1$$

的表面積. 將S沿其一側稜割開,鋪在平面上得矩形R, R兩邊的長是1和2π;所以$A(S)$等於2π. 將R的一邊等分爲m部分,他邊等分爲n部分. 通過分點作兩邊的平行綫,把R等分爲mn個小矩形. 設其中一個矩形的頂點是A, B, C, D,兩對角綫相交於F; AB相當於$\frac{2\pi}{n}$, BC相當於$\frac{1}{m}$. 每個矩形由其對角綫分爲四個三角形,那末R分成$4mn$個的三角形了. 把R回復到S原形,以$4mn$個三角形的頂點做頂點,作S的內接多面體,多面體是從$4mn$個平面三角形組成的. 設此多面體的表面積是$A(m,n)$,那末

$$A(m,n)=m\cdot 2n\Delta FBC+2nm\Delta FCD.$$

因ΔFBC的面積等於$\frac{1}{2}\frac{1}{m}2\sin\frac{2\pi}{4n}=\frac{1}{m}\sin\frac{\pi}{2n}$. 而$\Delta AFD$的面積等於

$$\frac{1}{2}\cdot 2\sin\frac{2\pi}{2n}\left[\frac{1}{4m^2}+4\sin^2\frac{\pi}{2n}-\sin^2\frac{\pi}{n}\right]^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\sin\frac{\pi}{n}\left[\frac{1}{4m^2}+4\sin^4\frac{\pi}{2n}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

所以

$$A(m,n)=2n\sin\frac{\pi}{2n}+2n\sin\frac{\pi}{n}\left[\frac{1}{4}+\frac{4m^2}{n^4}\left(n\sin\frac{\pi}{2n}\right)^4\right]^{\frac{1}{2}}.$$

假如 $m=n\to\infty$, 那末 $\lim A(m,n)=\pi+\pi=2\pi=A(S)$. 但是假如 $m=n^3\to\infty$, 那末 $A(m,n)\to\infty$. 又設 $m\sim kn^2$, 則

$$A_{mn}\to\pi+\pi\sqrt{1+k^2\pi^4}>2\pi.$$

所以曲面表面積不能視爲內接多角形面積的極限. 這個例子是辟瓦茲所給的.

曲面 S: $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$, $a\leqslant u\leqslant b$, $c\leqslant v\leqslant d$ 的表面積 $A(S)$的公式是

$$A(S)=\int_a^b\int_c^d\left[\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}du\,dv.$$

但 $\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}$ 表示 $f_ug_v-f_vg_u$. 當應用時, 此公式須加以嚴格的限制, 自不待言. 關於這些問題的研究, 拉多[1]著有"長和面積"一書, 收羅頗富.

3. **黎曼-斯帝捷積分** 設 $f(x)$ 和 $\alpha(x)$是$[a,b]$上所定義的兩個有界函數. $D(x_1,\cdots,x_n)$是一分點系統:

$$\delta=\delta(x_1,\cdots,x_n)=\max_k(x_k-x_{k-1})\to 0.$$

設 $x_{k-1}\leqslant\xi_k\leqslant x_k(k=1,2,\cdots,n)$, 置

$$S=S(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{k=1}^n f(\xi_k)[\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})],$$

當 $\delta\to 0$ 時, 假如 $\lim S$ 常存在且有一定的數值, 那末稱此極限值

1) T. Rado, Length and area (1948).

是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上關於 $\alpha(x)$ 的黎曼斯帝捷積分，用記號

$$\lim_{\delta\to 0} S = \int_a^b f(x)d\alpha(x) \tag{1}$$

表示它．這種積分首先由斯帝捷[1]創造，當 $\alpha(x) = x$ 時，就是黎曼積分．斯帝捷證明假如 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 是連續的，那末當 $\alpha(x)$ 為一增加函數時，(1) 必存在，下述定理的前半是這個結果的拓廣．

定理 1. 設 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上之一連續函數，$\alpha(x)$ 在 $[a, b]$ 上是一有界變差的函數，那末兩個黎曼斯帝捷積分

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) \text{ 和 } \int_a^b d(x)df(x)$$

都存在，兩者之和等於 $f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a)$：

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) + \int_a^b \alpha(x)df(x) = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a). \tag{2}$$

公式 (2) 叫做分離積分的公式．

證明 有界變分的函數 $\alpha(x)$ 是兩個增加函數的差，所以假設 $\alpha(x)$ 是一增加函數來證明定理 1 好了．設 M_k, m_k 是 $f(x)$ 在 $[x_{k-1}, x_k]$ 中的上界與下界，那末

$$\sum_{k=1}^{n} m_k[\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})] \leqslant S(x_1, \cdots, x_n) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{1}^{n} M_k[\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})]. \tag{3}$$

設 $x < x' < x''$，$f(x)$ 在 $[x, x']$ 中的上界和下界是 M', m'；在 $[x', x'']$ 中的上界和下界是 M'', m''，那末

$$\max(M', M'')[\alpha(x'') - \alpha(x)] \geqslant [M'(\alpha(x') - \alpha(x)) + \\ + M''(\alpha(x'') - \alpha(x'))], \tag{4$_1$}$$

$$\min(m', m'')[\alpha(x'') - \alpha(x)] \leqslant [m'(\alpha(x') - \alpha(x)) + \\ + m''(\alpha(x'') - \alpha(x'))]. \tag{4$_2$}$$

---

1) Stieltjes (1894).

由是可知(3)的右端 $\bar{S}$ 决不因分點增多而增大，(3)的左端 $\underline{S}$ 决不因分點增多而減小. 所以把 $D(x_1, \cdots, x_n)$ 中分點逐漸增多，當 $\delta\to 0$ 時，$\bar{S}$ 和 $\underline{S}$ 都有極限. 因 $f(x)$是一連續函數，所以對於 $\varepsilon>0$，有 δ_0，當 $\delta<\delta_0$時，$M_k-m_k<\varepsilon$. 從

$$0\leqslant\sum_1^{m_n}(M_k^{(n)}-m_k^{(n)})(\alpha(x_k^{(n)})-\alpha(x_{k-1}^{(n)}))\leqslant\varepsilon[\alpha(b)-\alpha(a)]$$

得

$$\lim_{\delta\to 0}\sum_1^{m_n}(M_k^{(n)}-m_{k_1}^{(n)})(\alpha(x_k^{(n)})-\alpha(x_{k-1}^{(n)}))=0.$$

因此 $\lim S(x^{(n)},\cdots,x_{m_n}^{(n)})$存在，其值等於

$$\lim_{\delta\to 0}\bar{S}=\lim_{\delta\to 0}\underline{S}. \tag{5}$$

置 $\bar{S}_1=\bar{S}(x_1^{(n')},\cdots,x_{m_{n'}}^{(n')})$，$\bar{S}_2=\bar{S}(x_1^{(n'')},\cdots,x_{m_{n''}}^{(n'')})$. 設 $x_1^{(n')}$，$\cdots$，$x_{m_{n'}}^{(n')}$ 與 $x_1^{(n'')}$，$\cdots$，$x_{m_{n''}}^{(n'')}$ 的全體——依大小的順序——是 $x_1^{(n)}$，$\cdots$，$x_{m_n}^{(n)}$，記

$$\bar{S}=\bar{S}(x_n^{(n)},\cdots,x_{m_n}^{(n)}),\ \delta_n'=\max_k[x_k^j-x_{k-1}^j](j=1,2).$$

同樣作 $\underline{S}_1, \underline{S}_2, \underline{S}$. 由$(4_1)$與$(4_2)$，

$$\underline{S}_k\leqslant\underline{S}\leqslant\bar{S}<\bar{S}_k\ \ (k=1,2).$$

由是 $|\bar{S}_1-\bar{S}_2|\leqslant|\bar{S}_1-\bar{S}|+|\bar{S}-\bar{S}_2|\leqslant(\bar{S}_1-\underline{S}_1)+(\bar{S}_2-\underline{S}_2)$. 當 $\delta'\to 0$，$\delta''\to 0$ 時，$\bar{S}_1-\bar{S}_2\to 0$. 利用(5)，得着

$$\lim_{\delta\to 0}\bar{S}_1=\lim_{\delta'\to 0}\underline{S}_1,\ \lim_{\delta''\to 0}\bar{S}_2=\lim_{\delta''\to 0}S_2.$$

因此 $\lim(\bar{S}_1-\bar{S}_2)=0$，所以 $\lim\limits_{\delta\to 0}S$ 的數值和分點系統無關係. 這就是證明積分

$$I=\int_a^b f(x)d\alpha(x) \tag{6}$$

的確存在. 設 $\xi_0=a$, $\xi_{n+1}=b$. 於恆等式

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha(\xi_k)[f(x_k)-f(x_{k-1})]+\sum_1^{n+1}f(x_{k-1})[\alpha(\xi_k)-\alpha(\xi_{k-1})]=$$
$$=f(b)\alpha(b)-f(a)\alpha(a). \tag{7}$$

令 $\delta(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \to 0$. 左邊第二項趨近於積分(6)所以第一項的極限存在. 從(7)得(2). 證明已畢.

系 在區間 $a \leqslant x \leqslant b$ 上 $f(x)$ 是一有界函數, $\alpha(x)$ 是一單調增加的函數, 積分(6)存在的充要條件是

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_{1}^{n} (M_k - m_k)(\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})) = 0 \tag{8}$$

對於任何分點系統 $D(x_1, \cdots, x_n)(\delta \to 0)$ 成立.

證明 條件的充足性. 從(3)知(8)含有極限(7)的存在, 所以(6)存在.

條件的必要性, 從 $[x_{k-1}, x_k]$ 取定如下的兩點 ξ_k, η_k:

$$M_k - f(\xi_k) < \varepsilon, f(\eta_k) - m_k < \varepsilon.$$

那末 $\Sigma(M_k - f(\xi_k))(\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1}))$ 和 $\Sigma(f(\eta_k) - m_k)(\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1}))$ 都小於 $\varepsilon(\alpha(b) - \alpha(a))$. 由假設積分(b)是存在的, 所以(8)成立. 證明完畢.

兩函數 $f(x)$ 和 $\alpha(x)(a \leqslant x \leqslant b)$ 都是有界變差的時候, 積分(b)未必存在. 例如

$$f(x) = x(0 \leqslant x < 1),\ f(x) = x + 1(1 \leqslant x \leqslant 2),$$
$$\alpha(x) = 0(0 \leqslant x < 1),\ \alpha(x) = 1 \qquad (1 \leqslant x \leqslant 2).$$

那末當 $x = 1$ 是一分點 x_k 時, $S(x_1, \cdots, x_n)$ 等於 ξ_k. 假如 $x_{k-1} < 1 < x_k, \xi_k > 1$, 那末

$$S(x_1, \cdots, x_n) = (\xi_k + 1)(\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})) = \xi_k + 1.$$

當 $\delta \to 0$ 時 $\xi_k \to 1$, 所以 $S(x_1, \cdots, x_n)$ 的上限等於 2, 下限等於 1.

定理 2. 設 $[a, b]$ 是 $f(x)$ 和 $\alpha(x)$ 的定義區間, $f(x)$ 是一有界函數, $\alpha(x)$ 是一有界變差的函數; ω_k 表示 $f(x)$ 在 $[x_{k-1}, x_k]$ 中的振幅. 積分(b)存在的充要條件是對於任一正數 η, 成立着等式,

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_{\omega_k > \eta} |\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})| = 0.$$

證明 設 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, $M_k - m_k = \omega_k$.

$$\mathfrak{S}(x_1, \cdots, x_n) = \sum_1^n \omega_k |\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})|.$$

作 $f_1, \cdots, f_n$ 如下：當 $\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1}) \geqslant 0$ 時，定 $f_k = M_k$；當 $\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1}) < 0$ 時,定 $f_k = m_k$. 置

$$\overline{S}(x_1, \cdots, x_n) = \sum_1^n f_k[\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})].$$

又作 $f'_1, \cdots, f'_n$ 如下:當 $\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1}) \geqslant 0$ 時 $f'_k = m_k$;當 $\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1}) < 0$ 時,定 $f'_k = M_k$. 置

$$\underline{S}(x_1, \cdots, x_m) = \sum_1^n f'_n[\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})],$$

那末 $\overline{S}(x_1, \cdots, x_n) - \underline{S}(x_1, \cdots, x_n) = \mathfrak{S}(x_1, \cdots, x_n)$. 當積分(6)存在時, $\lim \overline{S} = \lim \underline{S}$, $\mathfrak{S}(x_1, \cdots, x_n) \to 0$. 設 $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$, 那末必有如下的正數 δ_0: 當 $\delta(x_1, \cdots, x_n) < \delta_0$ 時,

$$\mathfrak{S}(x_1, \cdots, x_n) < \varepsilon\eta.$$

由是,對於適合 $\omega_k > \eta$ 之 k, 把 $\omega_k |\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})|$ 諸項相加,得

$$\sum_{\omega_k > \eta} \eta |\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})| < \varepsilon\eta.$$

令 $\varepsilon \to 0$, 就得着定理 3 中的條件.

其次,證明條件的充足性[1]. 對於 $\varepsilon > 0$、$\eta > 0$,由假設,必有 δ: 當 $\delta(x_1, \cdots, x_n) < \delta_0$ 時

$$\sum_{\omega_k > \eta} |\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})| < \varepsilon.$$

於 $[x_{k-1}, x_k]$,加入分點系統中的分點:

$$x_{k-1} = x'_{l_k} < x'_{l_{k+1}} < \cdots < x'_{l'_k} = x_k.$$

那末 $f(\xi_k)[\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})] = \sum_{l_k}^{l'_k} f(\xi_k)[\alpha(x'_\nu) - \alpha(x'_{\nu-1})]$.

置 $l'_n = m$, 則

1) 這裏的證明,只限於 $\alpha(x)$ 是一單調函數,完備的證明,請見 1959 年的復旦學報.

$$S(x_1', \cdots, x_m') - S(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\nu=l_k}^{l_k'} [f(\xi_\nu') - f(\xi_k)][\alpha(x_\nu') -$$

$-\alpha(x_{\nu-1}')]$. 它的絕對值小於 $\eta \Sigma |\alpha(x_\nu') - \alpha(x_{\nu-1}')| + (M-m)\varepsilon$. 設 V 是 $\alpha(x)$的全變差,那末,

$$|S(x_1', \cdots, x_m') - S(x_1, \cdots, x_n)| < \eta V + \varepsilon(M-m).$$

ε 與 η 是任意的正數,所以當 $\delta \to 0$ 時 $\lim S(x_1, \cdots, x_n)$存在。

設 $D(x_1', \cdots, x_n')$和 $D(x_1'', \cdots, x_{n''}'')$是兩種分點系統. 用

$$\bar{S}_j(x_1^j, \cdots, x_{n^j}^j) = \sum_1^n M_k[\alpha(x_k^j) - \alpha(x_{k-1}^j)] (j = 1, 2)$$

等記號,如定理 1 的證明,從

$$|\bar{S}_1 - \bar{S}_2| \leqslant (\bar{S}_1 - \underline{S}_1) + (\bar{S}_2 - \underline{S}_2),$$

知 $\lim S_1 = \lim S_2$, 所以積分(6)存在. 證明完畢.

下述定理是容易明白的:

定理 3. 設 $\alpha(x)$ 在 $[a, b]$ 是有界變差的函數. 又設連續函數列 $f_1(x), f_2(x), \cdots$ 在 $[a, b]$ 上勻斂於 $f(x)$, 那末

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x) d\alpha(x) = \int_a^b f(x) d\alpha(x).$$

定理 4. 設 $\alpha(x)$ 是 $[a, b]$ 上之一有界變差的函數, $V(x)$ 表示 $\alpha(x)$ 在 $[a, x]$ 上的全變差, 又設 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是有界, 其絕對值不大於 K, 那末, 當積分

$$I = \int_a^b f(x) d\alpha(x), \quad J = \int_a^b |f(x)| dV(x)$$

都存在時, $|I| \leqslant J$ 且 $|I| \leqslant KV(b)$.

證明 設 $\alpha(x) = \alpha_1(x) - \alpha_2(x)$, $\alpha_1(x)$ 與 $\alpha_2(x)$ 是如下的兩個增加函數:

$$V(x) = \alpha_1(x) + \alpha_2(x).$$

從 $|\Sigma f(\xi_k)(\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1}))| \leqslant \Sigma |f(\xi_k)| [V(x_k) - V(x_{k-1})]$, 得 $|I| \leqslant J$ 和 $|I| \leqslant KV(b)$. 證明完畢。

4. 高度空間中之黎曼積分 設M是 n 度空間 E_n 中之一區域,

$f(x)$ 是在M上所定義之一有限正函數（$f \geqslant 0$）. 設 $\Omega(f, M)$ 是 $n+1$ 度空間 E_{n+1} 中之點集，乃是具有下述性質一切點

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1})$$

的全體: $x=(x_1, \cdots, x_n) \in M$, $0 \leqslant x_{n+1} \leqslant f(x)$. 稱 $\Omega(f,M)$ 爲 $f(x)$ 的直射體，如依照某種測度法——E_{n+1} 中點集的測度——$\Omega(f,M)$具有測度 μ，那末說: $f(x)$在M上關於這種方法是可以積分的，用記號

$$\mu=\int_M f(x)\,dx.$$

表示這個積分．說明高度空間中的黎曼積分之前，首先說 $E_n(n>1)$中之若當測度．

設M是 E_n 中之一有界點集，那末有有限個開室 $I_1, \cdots, I_k$ 掩蓋 M，稱

$$|I_1|+\cdots+|I_k|$$

之下界爲M之若當外測度，用$\overline{M}$表示它．又於M中，取不相疊的有限個閉室 $J_1, \cdots, J_k$，稱

$$|J_1|+|J_2|+\cdots+|J_k|$$

的上界爲M之若當內測度，用$\underline{M}$表示它．當 $\overline{M}=\underline{M}$ 時稱M具有若當測度$\|M\|=\overline{M}=\underline{M}$. 此時$|M|$存在而等於$\|M\|$.

由定義易知下面的定理成立．

定理 1. 設 $M \subset E_n$，則

(i) $0 \leqslant \underline{M} \leqslant \overline{M}$;

(ii) $\overline{M}$等於M之包的測度，$\underline{M}$等於M之核的測度；

(iii) $\underline{M} \leqslant \underline{\dot{M}} \leqslant \overline{\bar{M}} \leqslant \overline{M}$;

(iv) $\overline{M}-\underline{M}$等於$M$之境界的測度．

由 (iv) 知道，M具有若當測度的充要條件是M之境界成一零集．

設 $f(x)$的定義區是 E_n 中之一點集 M，又設 $f(x)$是一有界函數．置

$$f^+(x)=\max(f(x), 0), \quad f^-(x)=\max(-f(x), 0),$$

那末，$f(x) = f^+(x) - f^-(x)$. 設 $f^+(x)$ 和 $f^-(x)$ 的直射體

$$\Omega(f^+, M),\ \Omega(f^-, M).$$

(在空間 E_{n+1} 中)的若當外測度和內測度是

$$\overline{\Omega}(f^+, M),\ \overline{\Omega}(f^-, M),\ \underline{\Omega}(f^+, M),\ \underline{\Omega}(f^-, M).$$

稱 $\overline{\Omega}(f^+, M) - \underline{\Omega}(f^-, M)$ 為 $f(x)$ 在 M 上的黎曼上積分，$\underline{\Omega}(f^+, M) - \overline{\Omega}(f^-, M)$ 為 $f(x)$ 在 M 上的黎曼下積分. 上積分與下積分的記號是:

$$(R)\overline{\int_M} f(x)dx,\quad (R)\underline{\int_M} f(x)dx.$$

假如等式

$$(R)\overline{\int_M} f(x)dx = (R)\underline{\int_M} f(x)dx$$

成立，那末說：$f(x)$ 在 M 上具有黎曼積分 $(R)\int_M f(x)dx$. 又說：$f(x)$ 在 M 上依照黎曼的意義，可以積分.

設閉室 I 包含可測點集 M，分 I 為有限個閉室 $J_1, \cdots, J_k$；其中任何兩個 J_ν 無共通內點. 設 $f(x) > 0$，置

$$\delta_\nu = MI_\nu,$$

$$M_\nu = \max_{x\in\delta_\nu} f(x),\quad m_\nu = \min_{x\in\delta_\nu} f(x),$$

$$\overline{S}(\delta_1, \cdots, \delta_k) = \sum_1^k M_\nu\,|\,\delta_\nu\,|,\ \underline{S}(\delta_1, \cdots, \delta_k) = \sum_1^k m_\nu\,|\,\delta_\nu\,|.$$

作如下的函數 $F_\delta(x)$：在 δ_ν 的內點 x，$f_\delta(x)$ 等於 M_ν：在 δ_ν 的境界點 x，$f_\delta(x)$ 等於 0，那末，

$$(R)\int_M f_\delta(x)dx = \overline{S}(\delta_1, \cdots, \delta_k).$$

又作如下的函數 $\bar{f}(x) = \overline{S}(x, f; M)$. 由於 $\bar{f}(x) \leqq M_k$，知 $\bar{f}$ 的直射體 $\Omega(\bar{f}, M)$ 的外測度 $\overline{\Omega}(\bar{f}, M)$ 不大於 $\overline{S}(\delta_1, \cdots, \delta_k)$. 然而當

$$\delta = \max(|\,\delta_1\,|, \cdots, |\,\delta_k\,|) \to 0$$

時，$\bar{f}_\delta(x)$ 幾乎處處趨近於 $\bar{f}(x)$. 所以

$$\overline{\Omega}(f, M) = \lim_{\delta\to 0} \overline{S}(\delta_1, \cdots, \delta_k)$$

同樣可證

$$\underline{\Omega}(\underline{f}, M) = \lim_{\delta\to 0} s(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_k).$$

但 $\underline{f}(x) = I(x, f; M)$, $\underline{\Omega}(\underline{f}, M)$表示 $\underline{\Omega}(\underline{f}, M)$的內測度. 由是可述下面的定理:

定理 2. 設 $f(x)$ 是區域 $M(\subseteq E_n)$上之一有界正值函數, 那末

$$(R)\overline{\int_M} f(x)dx = \overline{\Omega}(\bar{f}, M),\ (R)\underline{\int_M} f(x)dx = \underline{\Omega}(\underline{f}, M),$$

但 $\bar{f}(x) = S(x, f; M)$, $\underline{f}(x) = I(x, f; M)$.

積分

$$(R)\int_M f(x)dx \quad (f > 0)$$

存在的充要條件是 $\overline{\Omega}(\bar{f}, M) = \underline{\Omega}(\underline{f}, M)$. 由於 $\bar{f} \geqslant \underline{f}$, 所以從

$$\overline{\Omega}(\bar{f}, M) - \underline{\Omega}(\underline{f}, M) \geqslant \overline{\Omega}(\bar{f}, M) - \overline{\Omega}(\underline{f}, M),$$

知積分存在時, $\overline{\Omega}(\bar{f} - \underline{f}, M) = 0$. 這必須

$$\bar{f}(x) = \underline{f}(x)$$

幾乎處處成立. 由是可證

定理 3. 設 $f(x)$ 是 $M(\in E_n)$上之一有界可測函數, 黎曼積分

$$R\int_M f(x)dx$$

存在的充要條件是 $f(x)$ 在 M 中的不連續點全體成一零集.

證明 設 p 是一常數, 那末 $f(x)$ 和 $f(x) + p$ 同時可以積分或同時不能積分, 所以不妨假設 $f(x) > 0$ 來證明. 由上文所述, 可積(黎曼)的充要條件是在 M 上, 等式

$$S(x, f; M) = I(x, f; M)$$

幾乎處處成立, 所以定理成立. 證明完畢.

從黎曼積分的定義和定理 3, 知道下面定理 4 中各項都成立.

定理 4. (i) 設 S 是區域 M 之一子區域, 當 $f(x)$ 在 M 上的黎曼積分存在時, $f(x)$ 在 S 上的黎曼積分也存在.

(ii) 設區域 M 是有限個區域 $M_1, \cdots, M_k$ 之和 M_i 與 M_j 無

共通內點($i\neq j$)關係

$$R\int_M f(x)dx=\sum_{\nu=1}^{k}(R)\int_{M_\nu} f(x)dx$$

成立的充要條件是式中右邊 k 個積分都存在.

(iii) 在區域 M 上假如 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的黎曼積分都存在，那末 $f+g, fg$ 的黎曼積分也存在. 假如 $|f(x)|>C>0$ 那末

$$(R)\int_M \frac{g(x)}{f(x)}dx$$

也存在.

(iv) 平均值定理：當 $(R)\int_M f(x)dx$ 存在時,

$$|M|I(f,M)\leqslant(R)\int_M f(x)dx\leqslant|M|S(f,M).$$

(v) 當 $I=(R)\int_M f(x)dx$ 存在時 $J=(R)\int_M|f(x)|dx$ 也存在且 $I\leqslant J$.

(vi) 設 $f_\nu(x)$ $(\nu=1,2,\cdots)$ 在 M 上的黎曼積分都存在，當 $\nu\to\infty$ 時假如 $f_\nu(x)$ 勻斂於 $f(x)$, 那末 $f(x)$ 的黎曼積分也存在且

$$(R)\int_M f(x)dx=\lim_{\nu\to\infty}(R)\int_M f_\nu(x)dx.$$

5. **區間函數** 設 $M=\{I\}$ 是一區間之集. 假如對於 M 中的任一區間 $I=[\alpha,\beta]$, 有一定的數量

$$f(I)=f(\alpha,\beta).$$

那末, $f(I)$ 是在 M 上所定義的一個區間函數. 區間函數可能具有'多值性'. 例如 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 中的一個'普通的'實函數, $[\alpha,\beta]$ 是 $[a,b]$ 的一個子區間, $\xi\in[\alpha,\beta]$ 的話, 區間函數

$$f(\alpha,\beta)=(\beta-\alpha)f(\xi)\quad \alpha\leqslant\xi\leqslant\beta \tag{1}$$

的值跟着 ξ 在 $[\alpha,\beta]$ 中變動而變動, 乃是一個——一般地說——多值的區間函數, 此地的 M 是一切子區間 $[\alpha,\beta]$ 所成之集.

現在從 M 中取出不相重疊的有限個 $I=[\alpha,\beta]$, 使其和適為

$[a, b]$,設其中最大區間的長爲 δ, 當 $\delta \to 0$ 時,假如 $\Sigma f(\alpha, \beta)$趨近於一定的極限值,那末我們說 $f(\alpha, \beta)$在$[a, b]$上可以積分,其積分之値

$$\int_a^b f(\alpha, \beta) \tag{2}$$

就是這個極限值 $\lim\limits_{\delta \to 0} \Sigma f(\alpha, \beta)$. 當 $f(x)$在$[a, b]$中是有界時,則對於區間函數(1)而言,(2)的存在等價於黎曼積分

$$\int_a^b f(x)dx$$

的存在. 假設 $f(x)$和 $g(x)$都是$[a, b]$上的函數, 那末對於區間函數

$$f(\alpha, \beta) = [g(\beta) - g(\alpha)]f(\xi), \ \alpha \leqq \xi \leqq \beta \tag{3}$$

而言,(2)的存在,等價於黎曼斯帝耳捷積分

$$\int_a^b f(x)dg(x)$$

的存在.

當區間 $[\alpha, \beta]$ 收斂於一點 x 時, 對於區間函數 $f(\alpha, \beta)$而言, 假如

$$\frac{f(\alpha, \beta)}{\beta - \alpha}$$

的極限存在,那末我們就說: $f(\alpha, \beta)$在 x 具有導數.

設 I 的右端就是 J 的左端,則當區間函數 $f(I)$常滿足等式

$$f(I + J) = f(I) + f(J)$$

時,稱 $f(I)$具有**加減性**,設 $f(\alpha, \beta)$是一具有加減性的區間函數,則當它在點 x 具有導數時,從

$$f(x, x + h) = f(a, x + h) - f(a, x)$$

知道,這個導數等於 $f'(a, x)$.

定理 1. 設區間函數 $f(\alpha, \beta)$ 常取正值或 0, 在 $[a, b]$ 上可以積分, 其積分之值等於 0, 那末 $f(\alpha, \beta)$ 的導數在 $[a, b]$ 中幾乎處處存在且等於 0.

證明 設$\{(\alpha,\beta)\}$是$[a,b]$中不相重疊的有限個區間，其和組成$[a,b]$，其中任一區間的長都不超過δ_n，並且

$$\Sigma f(\alpha,\beta)<\frac{1}{2^n}.$$

設$a\leqslant x\leqslant b$，置

$$F_n(x)=\max_{\beta-\alpha\leqslant\delta_n}\sum_{[\alpha,\beta]\subset[a,x]}f(\alpha,\beta),$$

$\Sigma f(\alpha,\beta)$中的任何兩個(α,β)都不相重疊，那末$F_n(x)$是一增加函數，其值小於2^{-n}. 因此$\Sigma F_n(x)$是一匀斂的級數，從富弼尼的定理，$F'_n(x)\to 0$。當$\beta-\alpha\leqslant\delta_n$時，成立着

$$\frac{f(\alpha,\beta)}{\beta-\alpha}\leqslant\frac{F_n(\beta)-F_n(\alpha)}{\beta-\alpha}.$$

當(α,β)收斂於一點時，右邊的極限幾乎處處存在，左邊的上限與n無關係，因此左邊幾乎處處收斂於0. 定理證畢.

其次，我們將證：當$f(\alpha,\beta)$在$[a,b]$上可以積分時，它必幾乎到處可以微分，在證明這個事實之前，我們注意：當積分$\int_a^b f(\alpha,\beta)$存在時，$f(\alpha,\beta)$在$[a,b]$的任一子區間$[c,d]$上也可以積分. 事實上，對於$\varepsilon>0$，有$\delta=\delta(\varepsilon;a,b)$，當相銜接而不相重疊的小區間$[\alpha,\beta]$的長小於$\delta(\varepsilon;a,b)$時，可使不等式

$$\left|\int_a^b f(\alpha,\beta)-\Sigma f(\alpha,\beta)\right|<\varepsilon$$

成立. 現在於$[c,d]$上作兩種分法，使其各個小區間的長都小於δ，記所得兩個$\Sigma f(\alpha,\beta)$之和爲$\Sigma_1(c,d)$, $\Sigma_2(c,d)$. 又於$[a,c]$和$[d,b]$上作分點，使其所得各一小區間之長都小於δ，那末從

$$|(\Sigma(a,c)+\Sigma_1(c,d)+\Sigma(d,b))-(\Sigma(a,c)+\\+\Sigma_2(c,d)+\Sigma(d,b))|<2\varepsilon,$$

得

$$|\Sigma_1(c,d)-\Sigma_2(c,d)|<2\varepsilon.$$

由收斂原理，知$\Sigma(c,d)$的極限存在，這就是說，$f(\alpha,\beta)$在$[c,d]$

上可以積分．同時我們明白極限關係

$$\lim_{\delta\to 0}\Sigma(c,d)=\int_c^d f(d,\beta)$$

對於$[c,d]\subset[\alpha,b]$是均勻的．最後，我們也看到區間函數

$$\int_c^d f(\alpha,\beta),\quad a\leqslant c<d\leqslant b$$

具有如減性，它可用積分函數$F(x)$來表達：

$$F(d)-F(c)=\int_c^d f(\alpha,\beta).$$

對於$\varepsilon>0$，有$\delta=\delta(\varepsilon;a,b)$，當不相重疊的區間$I_1,I_2,\cdots,I_n$的長都小於$\delta$，且

$$I_1+\cdots+I_n=(a,b)$$

時，成立着$\left|\int_a^b f(\alpha,\beta)-\Sigma f(I_k)\right|<\varepsilon$．現在設想兩種分法，每種分法都保留某些$I_k$而不再添加分點，將其餘的小區間陸續插入分點，使其所得小區間的長趨近於0．對於後者，$f(I_k)$趨於

$$\int_{\alpha_k}^{\beta_k} f(\alpha,\beta)=F(b_k)-F(\alpha_k).$$

由於兩種分法所得的和$\Sigma f(\alpha_k,\beta_k)$——其中有些項變爲$F(\beta_k)-$ $-F(\alpha_k)$——之差小於2ε；所以

$$\sum_1^n\pm[f(\alpha_k,\beta_k)-(F(\beta_k)-F(\alpha_k))]\leqslant 2\varepsilon.$$

其中無論那一項之前，都可以取“$+$”也可以取“$-$”．因此

$$\sum_1^n|f(\alpha_k,\beta_k)-(F(\beta_k)-F(\alpha_k))|\leqslant 2\varepsilon.$$

由是可知區間函數

$$g(I)=g(\alpha,\beta)=|f(\alpha,\beta)-(F(\beta)-F(\alpha))|$$

可以積分，其積分之值是0，由定理1，極限

$$\lim_{\beta\to x,\ \alpha\to x}\frac{g(\alpha,\beta)}{\beta-\alpha}$$

幾乎處處存在，其值爲0．這樣，我們證明了下面的

定理2． 區間函數$f(I)$在$[a,b]$上可以積分的話，它和它的

積分函數 $F(x)$ 幾乎處處有同一導數. 除開一個零集中的點, 假如 $F'(x)$ 存在而為有限數, 那末

$$\lim_{\beta\to x,\ \alpha\to x} \frac{f(\alpha, \beta)}{\beta - \alpha} = F'(x).$$

其逆亦眞: 就是說, 當上式左邊是一有限數時, $F'(x)$ 存在而等於此有限數.

設 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的一個有界函數, 則得兩個區間函數

$$g(\alpha, \beta) = (\beta - \alpha)\min_{\alpha\leqslant x\leqslant\beta} f(x)$$

和

$$G(\alpha, \beta) = (\beta - \alpha)\max_{\alpha\leqslant x\leqslant\beta} f(x).$$

積分

$$\int_a^b g(\alpha, \beta) \quad 和 \quad \int_a^b G(\alpha, \beta)$$

是存在的, 它們是 $f(x)$ 的打布積分. 兩者未必相等, 相等的時候, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的黎曼積分存在. 由是可知黎曼積分

$$\int_a^b f(x)dx$$

的存在, 等價於正值區間函數 $(\beta-\alpha)\omega(f;\alpha,\beta)=G(\alpha,\beta)-g(\alpha,\beta)$ 在 $[a, b]$ 上的積分等於 0; $\omega(f;\alpha,\beta)$ 表示 $f(x)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上的振幅, 而

$$\lim_{\substack{\alpha\to x\\ \beta\to x}} \omega(f;\alpha,\beta) = \omega(x)$$

是 $f(x)$ 在 x 的振幅. 由定理 1, 當 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的黎曼積分存在時, $\omega(x)$ 必須幾乎到處等於 0. 這是已經證明過的事實.

另一方面, 我們也可以用區間函數的性質, 來證明: 當 $\omega(x)\doteq 0$ 時, $\int_a^b f(x)dx$ 存在, 但 $f(x)$ 是一有界函數. 此時 $\omega(f;\alpha,\beta)$ 也是有界, 因此必有常數 c 適合

$$\Omega(\beta) - \Omega(\alpha) \leqslant c(\beta - \alpha),$$

此地的

$$\Omega(x) = \int_a^x (\beta - \alpha)\omega(f;\alpha,\beta)$$

是一不取負値的增加函數．由定理 2,等式

$$\Omega'(x) = \lim_{\alpha\to x,\beta\to x} \omega(f;\alpha,\beta)$$

在(a,b)中幾乎到處成立．由是$\Omega'(x) \doteq 0$.

由於$\Omega(a)=0$，我們只要證明$\Omega(x)$是一常數就好了．

點集$E=[a,b]-(\Omega'(x)=0)$的測度等於 0．由是可證映像$\Omega(E)$的測度也等於 0．事實上,我們可以測度甚小的開集O包含E,則從$|\Omega(E)|\leqslant C|O|$,知$|\Omega(E)|=0$．$E$的餘集

$$e=[a,b]-E=(\Omega'(x)=0)$$

的映像$\Omega(e)$也是零集:事實上,當$x\in e$時，$\Omega'(x)=0$；所以對於$\varepsilon>0$,必有如下的ξ,

$$x<\xi,\ \Omega(\xi)-\Omega(x)<\varepsilon(\xi-x).$$

置$g(x)=\varepsilon x-\Omega(x)$,則得$g(x)<g(\xi)$．由黎斯的引理，$e$是一開集$e_\varepsilon=\Sigma(a_k,b_k)$之一子集,此地

$$g(a_k)\leqslant g(b_k),\ k=1,2,\cdots.$$

由是，$\Omega(b_k)-\Omega(a_k)\leqslant\varepsilon(b_k-a_k)$．因此,從

$$|\Omega(e)|\leqslant|\Omega(e_\varepsilon)|\leqslant\varepsilon\Sigma(b_k-a_k)<\varepsilon(b-a)$$

知$\Omega(e)$是一零集．這樣一來,我們得到

$$0\leqslant\Omega(b)-\Omega(a)\leqslant|\Omega(e)|+|\Omega(E)|=0.$$

從上面證明,我們可述下面的結果．

系 設$\Omega(x)$是$[a,b]$上之單調增加的全連續函數，則當$\Omega'(x)\doteq 0$時，$\Omega(x)$是一常數．

上述打布積分的存在,其原理含在下述定理 3 之中．

假如對於$\alpha<\beta<\gamma$,不等式$f(\alpha,\gamma)\leqslant f(\alpha,\beta)+f(\beta,\gamma)$常成立，那末稱$f(\alpha,\beta)$是一"不因分解而減少"的區間函數．又設$a\leqslant x\leqslant b$,當$\alpha\to x,\beta\to x$時，$f(\alpha,\beta)\to 0$均勻地成立，則稱$f(\alpha,\beta)$在$[a,b]$上是一連續的區間函數．

定理 3. 設$f(\alpha,\beta)$在$[a,b]$上是一不因分解而減少的連續函數．假如

$$S = \Sigma f(\alpha_{k-1}, \alpha_k)$$

具有有限的上界 L, 那末

$$\int_a^b f(\alpha, \beta) = L.$$

證明 對於 $\varepsilon > 0$, 有區間 $[a, b]$ 的分法 Δ_ε, 使由 Δ_ε 所得的 $S_\varepsilon = S$ 適合於

$$S_\varepsilon > L - \frac{\varepsilon}{2}.$$

設 Δ_ε 的分點個數是 ν, 則必有 δ, 使當 $\beta - \alpha < \delta$ 時, $|f(\alpha, \beta)| < \frac{\varepsilon}{6\nu}$; 這是由於 $f(\alpha, \beta)$ 的連續性. 設 Δ 是 $[a, b]$ 的一種分法, 其中任一小區間的都小於 δ, 其所對應的和爲 S. 將 Δ_ε 和 Δ 相併, 得一分法 Δ'. 由於 $f(\alpha, \beta)$ 是一不因分解而減少的函數, 所以相當於 Δ' 的和 S' 適合

$$S' \geqslant S_\varepsilon > L - \frac{\varepsilon}{2}.$$

於 Δ 插入 Δ_ε 的一個分點, 則對應於 Δ 的和 S 最多增加了 $\frac{\varepsilon}{3\nu}$. 因此, 從 Δ 變到 Δ', 至多經過 ν 次步驟, S 最多添加了 $\nu \times \frac{\varepsilon}{3\nu} < \frac{\varepsilon}{2}$. 由是

$$S' \leqslant S + \frac{\varepsilon}{2},$$

而 $S > L - \varepsilon$. 從 $|L - S| < \varepsilon$ 知道 $f(\alpha, \beta)$ 的積分等於 L. 定理證畢.

有界函數 f 之打布的下積分是一定理 3 中的積分, 而其上積分與

$$\int_a^b (\beta - \alpha)\omega(f; \alpha, \beta)$$

乃是不因分解而增加的函數的積分.

對於區間 $[a, b]$ 上的一個有界變差函數 $f(x)$, 作區間函數

$$f(\alpha,\beta)=|f(\beta)-f(\alpha)|.$$

這是一個不因分解而減少的區間函數. 假如 $f(x)$ 是一連續函數, 那末 $f(\alpha,\beta)$ 也具有連續性. 此時簡寫

$$\int_a^b f(\alpha,\beta) \text{ 為 } T(b)=\int_a^b |df(x)|.$$

從定理 2, 得到已知的事實 $T'(x)\doteq|f'(x)|$.

設 $x(t), y(t), z(t)$ 是閉區間 $a\leqslant t\leqslant b$ 中的三個連續函數, 它們表示空間中的一條連續曲綫 Γ. 設

$$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b,$$

P_k 是對應於 t_k 的點 $x(t_k), y(t_k), z(t_k)$, 則得一折綫 Γ_n, Γ_n 與 Γ 相接於 $P_0, P_1, \cdots, P_n$ 諸點, 假如折綫 Γ_n 的長對於分點 $t_0, \cdots, t_n$ 有上界, 那末稱此上界為 Γ 的長 $|\Gamma|$. 由是, Γ 具有有限長度 $|\Gamma|$ 的充要條件是 $x(t), y(t), z(t)$ 在 $[a,b]$ 中都是有界變差. 這個長度 $|\Gamma|$ 等於區間函數

$$f(\alpha,\beta)=\sqrt{(x(\alpha)-x(\beta))^2+(y(\alpha)-y(\beta))^2+(z(\alpha)-z(\beta))^2}$$

的積分 $\int_a^b f(\alpha,\beta)$. 置

$$S(t)=\int_a^t f(\alpha,\beta),$$

則由定理 2, $(S'(t))^2\doteq(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2$. 這是勒貝格和湯納利的公式[1]. 假如取參數為 S, 那末得到

$$(x'(S))^2+(y'(S))^2+(z'(S))^2\doteq 1.$$

第八章 第一部分的習題

1. 設 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 之一有限函數, 則黎曼積分

$$\int_a^b f(x)dx$$

存在的充要條件是兩个打布積分相等:

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx=\overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

1) H. Lebesgue (1928); L. Tonelli (1916).

2. 證明 §1 中定理 3 的系 1—系 5.

3. 設黎曼積分 $\int_a^b f(x)dx$ 存在，則 $f^+(x)$ 與 $f^-(x)$ 在 $[a, b]$ 上的黎曼積分都存在.

4. 設 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是一連續函數，則當 $f(x) \geqslant 0$ 並且

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

时，$f(x)$ 全等于 0.

5. 設 $0 < p < 1$，證明 $\int_0^1 x^{-p} \sin \frac{1}{x} dx$ 是一收斂的积分，但只当 $p < 1$ 时绝对收斂.

6. 設 $f_n(x), f(x), p(x)$ 在 $[a, b]$ 上都是黎曼可積的函數，則當 $f_n(x) \to f(x), |f_n(x)| \leqslant p(x)$ 時，

$$\lim \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx = 0.$$

第二部分　勒貝格積分

6. 勒貝格積分　設 M 是 E_n 中之一點集，$f(x)$ 是 M 上所定義之一有界可測函數，設 $|M| < \infty$，$L < f(x) < U$，

$$L = l_0 < l_1 < \cdots < l_n = U, \quad \delta_n = \max(l_k - l_{k-1}).$$

適合 $l_{k-1} \leqslant f(x) < l_k, x \in M$ 的一切 x 成一點集 $e(l_{k-1}, l_k)$. 簡寫 $e(l_{k-1}, l_k)$ 的測度為 e_k. 置

$$\underline{S}_n = \sum_{k=1}^{n} l_{k-1} e_k, \qquad \overline{S}_n = \sum_{k=1}^{n} l_k e_k.$$

當 $l < l' < l''$ 時，$e(l, l'') = e(l, l') + e(l', l'')$. 由是可知

$$\underline{S_n} \leqslant \underline{S_{n+1}}, \overline{S_n} \geqslant \overline{S_{n+1}}.$$

因 $\underline{S}_n < U|M|$，$\overline{S}_n > L|M|$，所以兩數列 $\{\overline{S}_n\}$ 和 $\{\underline{S}_n\}$ 都有極限. 設

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}_n = \underline{S}, \ \lim_{n\to\infty} \overline{S}_n = \overline{S},$$

那末，$0 \leqslant \overline{S} - \underline{S} \leqslant \overline{S}_n - \underline{S}_n = \sum_1^n (l_k - l_{k-1}) e_k < \delta_n |M| \to 0.$

所以 $\bar{S}$ 等於 S. 現在證明極限值 $S(=\underline{S})$ 與分點系統 $(l_1, \cdots, l_n)$ $(\delta_n \to 0)$無關係.

設由兩分點系統 $D(l_1^j, \cdots, l_n^j)(\delta_n^j \to 0, j=1, 2)$得極限值

$$S' = \bar{S}' = \underline{S}', \bar{S}'' = \underline{S}'' = S''.$$

設 $l_1', \cdots l_n'; l_1'', \cdots, l_n''$ 排列成為 $l_1, \cdots, l_m$; 從 $D(l_1, \cdots, l_m)$, 得 $\bar{S}_m, \underline{S}_m$. 那末從

$$\underline{S}_n' \leqslant \underline{S}_m \leqslant \bar{S}_m \leqslant \bar{S}_n, \underline{S}_n'' \leqslant \underline{S}_m \leqslant \bar{S}_m \leqslant \bar{S}_n''$$

得着 $S'' = S' = \underline{S} = \bar{S}(=\underline{S})$,稱極限值 S 為 $f(x)$在M上的勒貝格積分,以記號

$$(L)\int_M f(x)dx = \int_M f(x)dx. \qquad (1)$$

表示 S, 由是得如下的定理.

定理 1. 設 $f(x)$ 是點集 $M(|M|<\infty)$上所定義之一有界可測函數,那末勒貝格積分(1)必存在.

設 $f(x)>0$, 用§4 中的記號知 $S=|\Omega(f, M)|$,由是得

系 1 設 $f(x)$ 是區域 M 上之一有界正函數,那末

$$(R)\overline{\int_M} f(x) = (L)\overline{\int_M} f(x)dx,$$
$$(R)\underline{\int_M} f(x)dx = (L)\int_M f(x)dx.$$

系 2 在定理 1 的假設下, 當 $f(x)>0$ 時, $\Omega(f, M)$的測度就是 $f(x)$ 在 M 上的勒貝格積分.

假如 $f(x)$是一可測函數,那末,$f^+(x)$和 $f^-(x)$都是可測函數,關係

$$\int_M f(x)dx = \int_M f^+(x)dx - \int_M f^-(x)dx \qquad (2)$$

當 $f(x)$為有界時成立. 事實上取 $l=0$ 常為 $l_0, l_1, \cdots, l_n$ 中之一點,當 $\delta_n \to 0$ 時, 知 (2) 成立. 設 $f(x)$ 是一無界可測函數, 假如 $|\Omega(f^+, M)|$ 和 $|\Omega(f^-, M)|$ 都是有限數,那末我們定義

$$(L)\int_M f^{\pm}(x)dx = |\Omega(f^{\pm}, M)|,$$

且用等式(2)來定義 $f(x)$ 在 M 上的勒貝格積分.

設 $f(x) \geqslant 0 (x \in M)$. 置 $f_N(x) = \min(N, f(x))$, 那末從

$$\lim_{n\to\infty} |\Omega(f_N, M)| = |\Omega(f, M)|$$

得下面的定理:

定理 2. 設 $f(x) \geqslant 0$, $f(x)$ 是在 M 上的可測函數, 那末

$$\lim_{N\to\infty}\int_M \min(N, f(x))dx = \int_M f(x)dx.$$

設 $f(x)$ 是在 M 上所定義的有界可測函數, 又設

$$M = M_1 + M_2 + \cdots, M_iM_j = 0 (i \neq j), |M| < \infty.$$

設 $L < f(x) < U, L = l_0 < l_1 < \cdots < l_n = U.$

$$\delta_n = \max(l_k - l_{k-1}).$$

適合於 $l_{k-1} \leqslant f(x) < l_k, x \in M_\nu$ 的一切成一點集 E_ν. 從

$$\Sigma l_k |E_1 + E_2| = \Sigma l_k |E_1| + \Sigma l_k |E_2|$$

得着等式

$$\int_{M_1+M_n} f(x)dx = \int_{M_1} f(x)dx + \int_{M_2} f(x)dx,$$

由是

$$\int_{M_1+\cdots+M_n} f(x)dx = \int_{M_1} f(x)dx + \cdots + \int_{M_n} f(x)dx.$$

置 $R_n = M - M_1 - M_2, \cdots, M_n$ 那末 $|R_n| \to 0$, 所以

$$\left|\int_M f(x)dx - \sum_1^n \int_{M_\nu} f(x)dx\right| =$$

$$= \left|\int_{R_n} f(x)dx\right| < U|R_n| \to 0.$$

因之

$$\int_M f(x)dx = \int_{M_1} f(x)dx + \int_{M_2} f(x)dx + \cdots. \quad (3)$$

利用(3)可以證明下面的

定理 3. 設 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 M 上的勒貝格積分都存在, 那末

$$\int_M [f(x)+g(x)]dx=\int_M f(x)dx+\int_M g(x)dx. \qquad (4)$$

證明 先設 $f(x)$ 的絕對值小於常數 K, $g(x)$ 是一常數 C, 用前面的種種記號,

$$\int_M (f(x)+C)dx=\lim_{\delta_n\to 0}\Sigma(l_k+C)l_k=$$

$$=\lim \Sigma l_k e_k+C\Sigma e_k=\int_M f(x)dx+\int_M cdx. \qquad (5)$$

次設 $g(x)$ 也是有界函數,從(3)得

$$\int_M (f(x)+g(x))dx=\Sigma\int_{M_k}(f(x)+g(x))dx,$$

此地 $M_k=e(l_{k-1},l_k)$. 因

$$\int_{M_k}(l_{k-1}+g(x))dx\leqslant\int_{M_k}(f(x)+g(x))dx\leqslant$$

$$\leqslant\int_{M_k}(l_k+g(x))dx$$

由是得所要的結果(4).

現在暫時假設 $f(x)\geqslant 0$, $g(x)\geqslant 0$. 置 $H=f+g$. 作函數 $H_N(x)=\min(N,H(x))$, $f_N(x)=\min(N,f(x))$, $g_N(x)=\min(N,g(x))$, 那末

$$H_N(x)\leqslant f_N(x)+g_N(x)\leqslant H_{2N}(x).$$

事實上,左方的不等式容易明白. 當 $H_{2N}=2N$ 時,右方的不等式顯然成立. 假如 $H_{2N}=H$, 那末把兩個關係 $f_N\leqslant f$, $g_N\leqslant g$ 邊邊相加,又得着 $f_N+g_N\leqslant H_{2N}$. 所以

$$\int_M H_N dx\leqslant\int_M (f_N+g_N)\,dx\leqslant\int_M H_{2N}dx.$$

令 $N\to\infty$ 就得着所要的等式(4).

設 $M^*\in M$, 在 M^* 上各點 x, 三函數 $f(x)$, $g(x)$, $H(x)$ 的符號都有一定例如

$$f(x)\geqslant 0,\ g(x)\leqslant 0,\ H(x)\geqslant 0$$

在 M^* 上成立的話,那末從 $f(x)=H(x)+(-g(x))$ 得

$$\int_{M^*} f(x)dx = \int_{M^*} H(x)dx + \int_{M^*} [-g(x)]dx$$

所以(4)在 M^* 上成立, M 可分解爲這樣的 M^*, 至多不過六個 M_1, $\cdots$, M_6, 從

$$\Sigma\int_{M_\nu} [f(x) + g(x)]dx = \Sigma\int_{M_\nu} f(x)dx + \Sigma\int_{M_\nu} g(x)dx$$

得到(4), 定理證畢.

利用(4)可以拓廣(3), 得着如下的定理.

定理 4. 設 $f(x)$ 在 M 上可以積分, 那末當 $M_iM_j = 0$, $M = \Sigma M_\nu$, 且 $M_1M_1, M_2, \cdots$ 都具有有限測度時, (3)必成立.

證明 先設 $f(x) \geqslant 0$, 置 $f_N = \min(N, f)$. 因積分

$$\int f_N(x)dx$$

是 N 的單調增加函數, 所以

$$\int_M f_N(x)dx = \Sigma\int_{M_\nu} f_N(x)dx \leqslant \Sigma\int_{M_\nu} f(x)dx.$$

令 $N \to \infty$ 從定理 2, 得

$$\int_M f(x)dx \leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty}\int_{M_\nu} f(x)dx. \tag{6}$$

另一方面, 於

$$\int_M f_N(x)dx \geqslant \sum_{\nu=1}^{n}\int_{M_\nu} f_N(x)dx,$$

令 $N \to \infty$, 得

$$\int_M f(x)dx \geqslant \sum_{\nu=1}^{n}\int_{M_\nu} f(x)dx.$$

再令 $n \to \infty$, 得

$$\int_M f(x)dx \geqslant \sum_{\nu=1}^{\infty}\int_{M_\nu} f(x)dx. \tag{7}$$

從(6)和(7)得(3). 最後, 從

$$\int_M f(x)dx = \int_M \frac{|f| + f}{2}dx - \int_M \frac{|f| - f}{2}dx =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\int_{M_\nu}\frac{|f|+f}{2}\,dx - \int_{M_\nu}\frac{|f|-f}{2}\,dx\right]$$

知道(3)對於無界函數$f(x)$亦成立．定理證畢．

由(2)，$\int f\,dx$存在的充要條件是兩積分$\int f^{\pm}dx$都存在．由是，當$\int f\,dx$存在時

$$\int_M |f(x)|\,dx = \int_M \frac{|f(x)|+f(x)}{2}\,dx + \int_M \frac{|f(x)|-f(x)}{2}\,dx$$

也存在，這就是說：勒貝格積分是絕對收斂的積分．下面的定理，指出勒貝格積分另一特性．

定理 5. 假如$f(x)$在M上的勒貝格積分存在，那末當

$$S \subset M,\ |S| \to 0$$

時，$f(x)$在S上的積分勻斂於0，換句話說：對於任一正數ε，有正數δ，當$S \subset M, |S| < \delta$時，

$$\left|\int_S f(x)dx\right| < \varepsilon.$$

證明 假如$f(x)$是有界函數，那末當$|f(x)| \leqslant K$時，

$$\left|\int_S f(x)dx\right| \leqslant K|S|$$

所以取$\delta < \frac{\varepsilon}{K}$好了．假如$f(x)$是一無界正函數，那末取適當的$N$，可使

$$\int_M f(x)dx < \int_M f_N(x)dx + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

這是從定理2知道的．取$\delta = \frac{\varepsilon}{2N}$，那末當$|S| < \delta$時，

$$\int_S f(x)dx < N\frac{\varepsilon}{2N} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

最後，假如$f(x)$是一(不定符號的)無界函數，那末

$$\int_S \frac{|f| \pm f}{2}\,dx < \frac{\varepsilon}{2} \text{ 含有 } \left|\int_S f(x)dx\right| < \varepsilon.$$

定理證畢.

下面的定理叫做(積分數列的)收斂定理.

定理 6. 設 $f_n(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$是有限可測點集 M 上的(勒貝格)可積函數列,又設

$$|f_n(x)| \leqslant P(x), \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

那末當 $\int_M P(x)dx$ 存在時,

$$\lim_{n\to\infty} \int_M f_n(x)dx = \int_M f(x)dx.$$

證明 $f(x)$是可測函數列的極限,所以是可測的,又因$|f(x)|$不大於可積函數 $P(x)$, 所以 $f(x)$ 是一可積函數. 現在還要證明的是

$$\lim_{n\to\infty} \int_M [f_n(x) - f(x)]dx = 0.$$

此結果含在$\int_M G_n(x)dx \to 0$ 中,但 $G_n(x) = |f_n(x) - f(x)|$. 置

$$M_1 = \prod_{n=1}^{\infty} (G_n(x) < \varepsilon), \quad M_k = \left(G_{k-1}(x) \geqslant \varepsilon\right) \cdot \prod_{n=k}^{\infty} (G_n(x) < \varepsilon\Big)$$

$(k > 1)$, 那末 $M = M_1 + M_2 + \cdots$, $M_i \cdot M_j = 0$ $(i \neq j)$, 設 $R_k = M - M_1 - \cdots - M_k$, 那末 $|R_n| \to 0$. 所以對於 $\varepsilon > 0$. 有如下的 m, 當 $k \geqslant m$ 時,

$$2\int_{R_k} P(x)dx < \varepsilon.$$

由是當 $n \geqslant m$ 時,$\int_M G_n(x)dx = \Sigma \int_{M_k} G_n(x)dx$. 這個級數等於

$$\sum_{k=1}^{m} \int_{M_k} G_n(x)dx + \sum_{k=m+1}^{\infty} \int_{M_k} G_n(x)dx <$$

$$< \sum_{k=1}^{m} \int_{M_k} \varepsilon dx + \sum_{k=m+1}^{\infty} \int_{M_k} 2P(x)dx = \varepsilon(|M - |R_m|) + \varepsilon.$$

由是$\int_M G_n(x)dx < \varepsilon(1 + |M|)(n > m)$. 所以$\int_M G_n(x)dx \to 0$.

定理證畢．利用收斂定理，可證下面的

定理 7. （勒維的定理）[1] 設 $f_n(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$ 是點集 M 上之一可測函數列，假如

$$O \leqslant f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)(n=1, 2, \cdots), \ f_n(x) \rightarrow f(x),$$

那末

$$\lim_{n\to\infty} \int_M f_n(x)dx = \int_M f(x)dx.$$

證明 當 $\int_M f(x)dx$ 存在時，取 $P(x)=f(x)$．從定理 6 就知道 $\int f_n(x)dx$ 收斂於 $\int f(x)dx$．假如 $\int f(x)dx = \infty$，那末

$$\lim_{n\to\infty} \int_M f_n(x)dx = \infty.$$

為什麼呢？因為

$$\lim_{n\to\infty} \int_M \min(N, f_n(x))dx = \int_M \min(N, f(x))dx,$$

左邊的積分小於或等於 $\int_M f_n(x)dx$．所以

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \int_M f_n(x)dx \geqslant \int_M \min(N, f(x))dx.$$

令 $N\to\infty$ 就得着 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_M f_n(x)dx = \int_M f(x)dx$．

證明完畢．

定理 8. 設 $f(x)$ 在點集 M 上依勒貝格意義可以積分，那末對於任一正數 ε，M 上必有連續函數 $\varphi(x)$ 適合

$$\int_M |f(x)-\varphi(x)|\,dx < \varepsilon.$$

證明 假如 $|M|=0$，那末取 $\varphi(x)\equiv 0$ 好了，今設 $|M|>0$，M_ν 是 M 之一子集，是適合 $|f(x)|>\nu$ 的一切 x 所成之集，那末取 ν 甚大可使

$$\nu\,|M_\nu| < \int_{M_\nu} |f(x)|\,dx < \varepsilon.$$

1) B. Levi.

置 $M - M_\nu = R_\nu$, R_ν 中必有如下的完全子集 S, 在 S 上, $f(x)$ 是連續的並且

$$|R_\nu - S| < \frac{S}{\nu}.$$

這是由於第七章 §9 的定理 8. 現在應用第四章 §6 的定理 6,在 M 上作如下的連續函數 $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = f(x) \quad (x \in S),$$

$$-\nu \leqslant I(f, S) \leqslant \varphi(x) \leqslant S(f, S) \leqslant \nu \quad (x \in M - S)$$

那末

$$\int_M |f(x) - \varphi(x)| dx = \int_S + \int_{M_\nu} + \int_{R_\nu - S} \leqslant$$

$$\leqslant 0 + \int_{M_\nu} [|f(x)| + \nu] dx + \int_{R_\nu - S} 2\nu dx <$$

$$< \varepsilon + \nu |M_\nu| + 2\nu |R_\nu - S| < 4\varepsilon.$$

證明完畢.

7. 區間上的勒貝格積分 假如 M 是一區間 $[a, b]$, 那末我們把 $f(x)$ 在 M 上的勒貝格積分寫成如下的形式:

$$(L)\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

假如 $f(x)$ 當 x 是一有理數時,等於 0, 當 x 是無理數時, $f(x)$ 等於 1, 那末 $f(x)$ 在任何區間 $[a, b]$ 上的黎曼積分不能存在,但是

$$(L)\int_a^b f(x)dx = b - a.$$

這個例子和下面的定理結合起來, 知道勒貝格積分確是黎曼積分的拓廣.

定理 1. 假如有限函數 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的黎曼積分存在那末它的勒貝格積分也存在且兩積分相等.

證明 假設 $f(x)$ 的黎曼積分存在,那末 $f(x)$ 是一有界函數, 於 $[a, b]$ 中, 任意作一分點系統: $D(x_1^{(n)}, \cdots, x_n^{(n)})$, $\delta(x_1^{(n)}, \cdots, x_n^{(n)}) \to 0$. 設 M_k, m_k 是 $f(x)$ 在 $[x_{k-1}, x_k]$ 中的上界和下界, 作函數

$f_n(x)$和$g_n(x)$:

$$f_n(x) = M_k,\ g_n(x) = m_k\ (x_{k-1} < x < x_k);$$
$$f_n(b) = M_n,\ g_n(b) = m_n\ (x_{k-1} < x < x_k).$$

那末

$$\sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} (L)\int_{x_{k-1}}^{x_k} f_n(x)dx = (L)\int_a^b f_n(x)dx,$$
$$\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} (L)\int_{x_{k-1}}^{x_k} g_n(x)dx = (L)\int_a^b g_n(x)dx.$$

因爲 f 在$[a, b]$上的黎曼積分存在，所以當 $\delta(x_1, \cdots, x_n) \to 0$ 時，從上面兩式得着

$$(R)\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to 0}(L)\int_a^b f_n(x)dx = \lim_{\delta\to 0}(L)\int_a^b g_n(x)dx. \quad (1)$$

又從 $g_n \leqslant g_{n+1} \leqslant f \leqslant f_{n+1} \leqslant f_n$，知 $\lim f_n$ 與 $\lim g_n$ 都存在.置

$$\lim f_n(x) = F(x),\ \lim g_n(x) = G(x).$$

那末 $G(x) \leqslant f(x) \leqslant F(x)$. 利用勒維的收斂定理，從(1)導出

$$(R)\int_a^b f(x)dx = (L)\int_a^b F(x)dx = (L)\int_a^b G(x)dx. \quad (2)$$

又從 $F(x) - G(x) \geqslant 0$ 和 $(L)\int(F - G)dx = 0$，知道 $F(x) - G(x)$幾乎處處等於零，由是$[a, b]$含有一零集 N. 當 $x \bar{\in} N$時，

$$F(x) = G(x) = f(x). \quad (3)$$

從(2)和(3)得着

$$(R)\int_a^b f(x)dx = (L)\int_a^b f(x)dx.$$

定理證畢.

注意 設 $M \subset E_1$, $f(x) \geqslant 0$ $(x \in M)$ 當 $\Omega(f, M)$具有若當測度時，亦必具有勒貝格測度；所以有界函數 $f(x)$在M上具有黎曼積分時，也具有勒貝格積分，此時

$$(R)\int_M f(x)dx = (L)\int_M f(x)dx.$$

這是定理 1 的拓廣.

設 $a \leqslant \xi \leqslant b$，當 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 具有勒貝格積分時，$f(x)$ 在 $[a, \xi]$ 上也如此，此時稱

$$F(x) = (L)\int_a^x f(t)dt$$

爲 $f(x)$ 的積分函數(不定積分)．設 $J_k = (x'_k, x_k)$，

$$J_k J_{k'} = 0 \quad (k \neq k'),\ S = J_1 + J_2 + \cdots + J_l.$$

那末當 $|S|$ 很小時，下式

$$\sum_{k=1}^{l} |F(x_k) - F(x'_k)| < \int_S |f(x)|dx$$

的右邊也很小，由是知 $F(x)$ 是一全連續函數．上文曾述黎曼積分函數具有此性質，現在知道勒貝格積分函數也具有此性質．由是得到

定理 2. 設 $f(x)$ (有界或無界)在 $[a, b]$ 上具有勒貝格積分，那末

$$F(x) = (L)\int_a^x f(x)dt \quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

是一全連續函數．

第一部分中，有例表明在 $[a, b]$ 上的連續函數 $\varphi(x)$ 的導數 $\varphi'(x) = f(x)$ 存在且有界時，$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上依黎曼意義，未必可以積分，但是

$$f_n(x) = \frac{\varphi\left(x + \frac{1}{n}\right) - \varphi(x)}{\frac{1}{n}} \to \varphi'(x) \quad (a \leqslant x < b),$$

$$f_n(b) = \frac{\varphi\left(b - \frac{1}{n}\right) - \varphi(b)}{-\frac{1}{n}} \to \varphi'(b).$$

這樣，$\varphi'(x)$ 是可測函數列 $f_n(x)(n = 1, 2, \cdots)$ 的極限函數所以 $\varphi'(x)$ 是一可測函數．有界可測函數，依勒貝格意義，是可以積分的，所以

$$F(x) = (L)\int_a^x f(t)dt \quad (a \leq x \leq b)$$

是一積分函數，由中值定理，$f_n(x) = \varphi'(x + \theta/n)(0 < |\theta| > 1)$.
從 $\varphi'(x)$ 的有界性，知 $f_n(x)(n = 1, 2, \cdots)$ 是均勻有界的函數列，應用收斂定理，得

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n(t)dt = \int_a^x f(t)dt \ (a \leq x \leq b).$$

右邊是 $F(x)$，左邊當 $a \leq x \leq b$ 時，等於

$$\lim_{n\to\infty} n\left\{\int_x^{x+\frac{1}{n}} \varphi(t)dt - \int_a^{a+\frac{1}{n}} \varphi(t)dt\right\} = \varphi(x) - \varphi(a).$$

所以 $F(x) = \varphi(x) - \varphi(a)$. 因 $F(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $x = b$ 是連續的.
所以 $F(b) = \varphi(b) - \varphi(a)$. 由是得到下面的積分基礎定理：

定理 3. 設 $\varphi(x)$ 在區間 $[a, b]$ 上可以微分；它的導函數 $f(x)$ 是有界，那末 $f(x)$ 的勒貝格積分

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad (a \leq x \leq b)$$

存在，且 $F(x) = \varphi(x) - \varphi(a) \quad (a \leq x \leq b)$.

在深入研究積分函數的性質之前，我們引入階梯函數。

8. 階梯函數　設 (a, b) 是一有限或無限的區間. i_k 是 (a, b) 中的有限個區間. 今有函數在 i_k 上等於常數 c_k，在這些 i_k 之外，函數值是 0，稱這種函數為 (a, b) 上之一階梯函數，以和

$$\Sigma c_k \mid i_k \mid$$

為此階梯函數的積分.

定理 1. 設 $\{\varphi_n(x)\}$ 是一單調減少的階梯函數列. 假如

$$\varphi_n(x) \to 0, \ a \leq x \leq b,$$

那末

$$\int_a^b \varphi_n(x)dx \to 0.$$

證明　設 E 是 $\varphi_n(x) \to 0$ 不成立的 x 和 $\varphi_n(x)$ 的不連續点 x 所成之點集. 這就是說：當 $x \in E$ 時，一切 $\varphi_n(x)$ 都在 x 為連續，

並且 $\varphi_n(x)\to 0$. 用測度小於 ε 的開集 O_ε 掩蓋 E. 若 $x_0\bar{\in} O_\varepsilon$, 則必有 $\varphi_n(x)$ 適合於 $\varphi_n(x_0)<\varepsilon$; 由 $\varphi_n(x)$ 在 $x=x_0$ 的連續性, 不等式

$$\varphi_n(x)<\varepsilon$$

在包含 x_0 的一區間 $J(x_0)$ 上成立. 這些區間的全體 $\Sigma=\Sigma J(x_0)$ 和 O_ε 掩蓋着含有$[a, b]$的一個閉區間$[a_1, b_1]$. 在$[a_1, b_1]$的外部, 階梯函數 $\varphi_1(x)$ 之值等於 0. 由波雷耳的掩蓋定理, $\Sigma+O_\varepsilon$ 中有有限個區間掩蓋着$[a_1, b_1]$的一切點. 記 $\varphi_1(x)$ 的上界為 M, 則由 $\{\varphi_n(x)\}$ 的單調性, 成立着

$$\int_{O'_\varepsilon}\varphi_n(x)dx\leqslant M\varepsilon,$$

此地的 O'_ε 表示上述有限個區間屬於 O_ε 的部分. 設上述有限個區間在 Σ 中的部為 Σ', 在 Σ' 中每一區間上, 必有一 $\varphi_n(x)$ 小於 ε, 設這些 n 中之最大的是 N. 則當 $n\geqslant N$ 時, 成立着

$$\int_{a_1}^{b_1}\varphi_n(x)dx<M\varepsilon+\varepsilon(b_1-a_1),$$

即

$$\int_a^b\varphi_n(x)dx<(M+b_1-a_1)\varepsilon\quad(n\geqslant N).$$

定理證畢.

定理 2. 設 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots$ 是一單調增加的階梯函數列. 假如 $\varphi_n(x)$ 的積分成一有界數列, 那末極限 $\lim\varphi_n(x)$ 幾乎到處是一有限數.

證明 我們不妨假設 $\varphi_n(x)\geqslant 0$ 來證明定理 2, 否則的話, 我們可以考慮 $\{\varphi_n(x)-\varphi_1(x)\}$. 在此假設下, 我們假設

$$\int_a^b\varphi_n(x)dx\leqslant A,\ n=1, 2, \cdots.$$

設 $\lim\varphi_n(x)=\infty$ 之 x 的全體為 E_0. 對於 x, 假如有 $n(x)$, 當 $n>n(x)$時, 成立着

$$\varphi_n(x)>\frac{A}{\varepsilon},$$

記這種點 x 的全體為 E_ε. 固定 n,使上式成立的 x 的全體成一區間之集 $\Sigma_{\varepsilon, n}$. 由是,從

$$\frac{A}{\varepsilon}|\Sigma_{\varepsilon, n}| < \int_a^b \varphi_n(x)dx,$$

得 $|\Sigma_{\varepsilon, n}| < \varepsilon$. 又由 $\varphi_n(x) \leqslant \varphi_{n+1}(x)$,知道 $\Sigma_{\varepsilon, n} \subset \Sigma_{\varepsilon, n+1}$. 所以 $|E_\varepsilon| < \varepsilon$. 由於 $E_0 \subset E_\varepsilon$, 所以 E_0 是一零集. 定理證畢.

記一切階梯函數所成之族為 C_0. 假如函數 $f(x)$ 幾乎處處等於定理 2 中的極限函數 $\lim \varphi_n(x)$, 特別在極限函數的連續點, 兩者相等, 那末稱這種一切函數 $f(x)$所成之族為 C_1. 此時定極限函數 $f(x) = \lim \varphi_n(x)$的積分為

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx.$$

對於這個定義的確當性,我們必須建立下面的

引理 設 $\{\varphi_n(x)\}$ 和 $\{\psi_n(x)\}$ 是適合定理 2 的兩個階梯函數列,那末當

$$\lim \varphi_n(x) = \lim \psi_n(x)$$

時,成立着

$$\lim \int_a^b \varphi_n(x)dx = \lim \int_a^b \psi_n(x)dx.$$

證明 我們只要證明下記的事實就够了: 設 $\varphi_n(x) \to f(x)$, $\psi_n(x) \to g(x)$,則當 $g(x) \geqslant f(x)$幾乎處處成立時,

$$\lim \int_a^b \psi_n(x)dx \geqslant \lim \int_a^b \varphi_n(x)dx.$$

記此式的左邊為 J, 右邊為 I, 我們要從 $g(x) \geqslant f(x)$ 導出 $J \geqslant I$. 使 $\varphi_m(x) - \psi_n(x) > 0$ 的部分, 當 $n \to \infty$ 時,必須幾乎到處收斂於 0,因此關於這部分的積分,由定理 1,也一定收斂於 0. 由是

$$\int_a^b \varphi_m(x)dx - J \leqslant 0, \text{ 即} \int_a^b \varphi_m(x)dx \leqslant J.$$

令 $m \to \infty$,就得到 $I \leqslant J$. 引理證畢.

函數 C_1 中任意兩個函數 f_1 與 f_2 的差 $f_1 - f_2$ 所成之函數族,記它為 C_2;定 $f_1 - f_2$ 的積分為

$$\int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx.$$

但是這裏必須檢查這個定義的確當性，就是說：當 f_1, f_2, g_1, g_2 都屬於 C_1，而 $f_1 - f_2 = g_1 - g_2$ 時，等式

$$\int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx = \int_a^b g_1(x)dx - \int_a^b g_2(x)dx$$

是否一定成立？從 $f_1 + g_2 = g_1 + f_1$，知道它們的積分相等；由是易知

$$\int_a^b f_2(x)dx + \int_a^b g_2(x)dx = \int_a^b g_1(x)dx + \int_a^b f_1(x)dx.$$

所以上面的等式成立.

定理 3. 設 $h(x), h_1(x), h_2(x)$ 都是 C_2 中的函數，則當 c_1, c_2 是常數時，

（一） $c_1h_1(x) + c_2h_2(x) \in C_2$,

（二） $\int_a^c h(x)dx + \int_c^b h(x)dx = \int_a^b h(x)dx \ (a<c<b)$,

（三） $|h(x)| = h^+(x) - h^-(x) \in C_2, \ h^\pm(x) \in C_2$.

證明 當 $f(x) \in C_1$ 時，$f(x)$的常數倍顯然地，也屬於 C_1. 由是可知（一）成立.

由於（二），當 $h(x)$是一階梯函數時成立，所以（二）當 $h(x) \in C_2$ 時成立，因此當 $h(x) \in C_2$ 時成立.

現在證明（三）. 設 $h(x) = f_1(x) - f_2(x)$. f_1 和 f_2 都屬於 C_1. 由於

$$|h| = \max(f_1, f_2) - \min(f_1, f_2),$$

$$h^+ = \max(f_1, f_2) - f_2 = f_1 - \min(f_1, f_2),$$

$$h^- = \max(f_1, f_2) - f_1 = f_2 - \min(f_1, f_2);$$

而且 $\max(f_1, f_2)$ 和 $\min(f_1, f_2)$ 都屬於 C_1，所以 $|h|, h^+, h^-$ 都屬於 C_2. 定理證畢.

定理 4. 設 $h(x) \in C_2$，則必有階梯函數列 $\{\varphi_n(x)\}$ 適合

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |h(x) - \varphi_n(x)|\, dx = 0.$$

證明 設 $h(x)=f_1(x)-f_2(x)$, $f_1(x)\in C_1$, $f_2(x)\in C_1$. 對於 $f_j(x)$ 必有單調增加的階梯函數列 $\varphi_{jn}(x)(n=1,2,\cdots)$ 概斂(幾乎處處收斂)於 $f_j(x)(j=1,2)$. 置

$$\varphi_n(x)=\varphi_{1n}(x)-\varphi_{2n}(x),$$

則當 $n\to\infty$ 時,

$$\int_a^b|h(x)-\varphi_n(x)|dx\leqslant\sum_{j=1}^{2}\int_a^b[f_j(x)-\varphi_{jn}(x)]dx\to 0.$$

定理證畢.

現在我們建立黎曼可積函數與階梯函數的關係.

定理 5. 在區間 $a\leqslant x\leqslant b$ 上,有界函數 $f(x)$ 具有黎曼積分的充要條件是 $f(x)$ 和 $-f(x)$ 都屬於 C_1.

證明 設 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有黎曼積分,我們將 $[a,b]$ 等分為 2^n 個小區間 $J_1,\cdots,J_{2^n}$. 作如下的函數:

$$\varphi_n(x)=\min_{x\in J_\nu}f(x)\quad(x\in J_\nu),\ \nu=1,2,\cdots,2^n,$$

其中 $J_1,J_2,\cdots J_{2^n-1}$ 都是左閉右開的區間,而 J_{2^n} 是一閉區間. 由於 $f(x)$ 的不連續點成一零集,所以函數列 $\varphi_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 概斂於 $f(x)$. 因此,極限

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\varphi_n(x)dx$$

一方面表示此地所定義的積分 $\int_a^b f(x)dx$, 另一方面,乃是 $f(x)$ 的達爾部下積分,就是黎曼積分. 所以 $f(x)\in C_1$. 又因 $-f(x)$ 的黎曼積分也存在,所以 $-f(x)$ 也屬於 C_1.

其次,當 $f(x)$ 和 $-f(x)$ 都屬於 C_1 時, $f(x)$ 的上下兩個達爾部分積分都等於 $f(x)$ 依此地的定義的積分. 因此,這積分,依照黎曼的意義存在. 定理證畢.

下述定理,相當於勒維的定理.

定理 6. 設 $h_n(x),n=1,2,\cdots$, 都屬於 C_2, 則當

$$h_n(x)\leqslant h_{n+1}(x),\ n=1,2,\cdots,$$

並且

$$\int_a^b h_n(x)dx \leqslant C$$

時，$h_n(x)$ 概斂於一個函數 $h(x) \in C_2$. 它適合於等式

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b h_n(x)dx = \int_a^b h(x)dx.$$

證明 首先假設 $f_n(x) \in C_1$, $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$,

$$\int_a^b f_n(x)dx \leqslant B,\ n = 1, 2, \cdots,$$

則必有階梯函數 $\varphi_{nm}(x)$ 適合於 $\varphi_{n1}(x) \leqslant \varphi_{n2}(x) \leqslant \cdots$,

$$\lim_{m\to\infty}\varphi_{nm}(x) \doteq f_n(x),\ n = 1, 2, \cdots.$$

函數 $\varphi_m = \max(\varphi_{1m}, \varphi_{2m}, \cdots, \varphi_{mm})$ 關於 m 是增加的. 由於

$$\varphi_{1m} \leqslant f_1, \cdots, \varphi_{mm} \leqslant f_m,$$

所以 $\varphi_m \leqslant f_m$. 因此

$$\int_a^b \varphi_m dx \leqslant \int_a^b f_m dx \leqslant B.$$

由是階梯函數列 $\{\varphi_m\}$ 概斂於一函數 f. 另一方面，於不等式

$$\varphi_{nm} \leqslant \varphi_m \quad (m \geqslant n),$$

令 $m \to \infty$，得到 $f_n \leqslant f$. 從 $\varphi_n \leqslant f_n \leqslant f$ 和 $\varphi_n \to f$，得到

$$f_n \to f,\ f \in C_1.$$

因此

$$\int_a^b \varphi_n(x)dx \to \int_a^b f(x)dx;$$

$$\int_a^b f_n(x)dx \to \int_a^b f(x)dx. \tag{1}$$

正值函數 $h_{n+1}(x) - h_n(x)$ 是屬於 C_2 的，它可以表達爲 C_1 中兩個正值函數函數 $f_n(x)$, $g_n(x)$ 的差:

$$h_{n+1} - h_n = f_n - g_n.$$

由於 g_n 是階梯函數的極限，所以經過適當的調整，我們可以使 g_n 適合

$$J_n = \int_a^b g_n(x)dx < \frac{1}{2^n}.$$

因此 ΣJ_n 成一收斂級數. 另一方面,我們從

$$I_n = \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b (h_{n+1} - h_n)dx + \int_a^b g_n dx$$

得

$$\sum_1^\infty I_n \leq \varliminf_{n\to\infty} \left(\int_a^b (h_n(x) - h_1(x))\right) dx + \sum_1^\infty 2^{-n} \leqslant$$

$$< C + \int_a^b |h_1(x)|dx + 1.$$

應用(1)於函數列 $f_1(x) + \cdots + f_n(x)$ 和 $g_1(x) + \cdots + g_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 則知 $\Sigma f_n(x)$ 和 $\Sigma g_n(x)$ 分別概斂於 C_1 中的函數. 並且

$$\Sigma I_n = \int_a^b \Sigma f_n(x)dx, \ \Sigma J_n = \int_a^b \Sigma g_n(x)dx.$$

由是

$$\sum_1^\infty (I_n - J_n) = \int_a^b \sum_{n=1}^\infty (f_n - g_n)dx = \int_a^b \sum_1^\infty (h_{n+1}(x) -$$

$$- h_n(x))dx = \int_a^b \lim(h_n(x) - h_1(x))dx.$$

此地的 $\lim h_n(x)$ 等於

$$h_1(x) + \sum_1^\infty f_n(x) - \sum_1^\infty g_n(x).$$

乃是 C_2 中的一個函數 $h(x)$, 它的積分是 $h_n(x)$ 的積分的極限. 定理證畢.

7. 現在我們要通過階梯函數, 指出 $[a, b]$ 中可測點集的特徵. 我們首先建立

引理　設 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的函數. 假如對於任一正數 ε, $C_2(a,b)$ 中有函數 $g(x)$ 和 $h(x)$ 適合於

$$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x), \int_a^b [h(x) - g(x)]dx \leqslant \varepsilon,$$

那末 $f(x) \in C_2(a, b)$.

證明　設對應於 $\varepsilon = 2^{-n}$ 的 $g(x), h(x)$ 為 $g_n(x), h_n(x)$, 則因

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b [h_n(x)-g_n(x)]dx \leqslant \sum_1^{\infty}\frac{1}{2^n}=1,$$

可知 $\Sigma[h_n(x)-g_n(x)]$是一概斂的級數,因此 $h_n(x)-g_n(x)$概斂於 0, $h_n(x)$ 和 $g_n(x)$ 都概斂於 $f(x)$. 寫

$$f^+(x)=\max(f(x),0),\ f^-(x)=\max(-f(x),0),$$

等等. 我們要從

$$0\leqslant g_n(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x),\ g_n(x)\to f(x),$$

導出 $f(x)\in C_2(a,b)$. 由於

$$\max(g_1(x),g_2(x))=g_2(x)+[g_1(x)-g_2(x)]^+\in C_2,$$

所以 $f_n(x)=\max[g_1(x),g_2(x),\cdots,g_n(x)]\in C_2$,

$$\int_a^b f_n(x)dx\leqslant \int_a^b h(x)dx.$$

從定理 6, 知道 $f_n(x)$ 概斂於 C_2 中的一個函數 $\tilde{f}(x)$, 但是

$$g_n(x)\leqslant \tilde{f}(x)\leqslant f(x),\ g_n(x)\to f(x).$$

所以 $f(x)\doteq\tilde{f}(x)$. 引理證畢.

定理 7. 設 $e(x)$ 是點集 $E\subset[a,b]$ 的特徵函數,則 E 成一可測點集的充要條件是 $e(x)\in C_2$. 當 $|E|$ 存在時,

$$|E|=\int_a^b e(x)dx.$$

證明 設區間的組 Σ_1 和 Σ_2 分別包含可測點集 E 和 $[a,b]-E$,

$$|\Sigma_1|<|E|+\varepsilon,\ |\Sigma_2|<|[a,b]-E|+\varepsilon.$$

設 Σ_1 和 Σ_2 的特徵函數為 $e_1(x)$ 與 $e_2(x)$, 則

$$1-e_2(x)\leqslant e(x)\leqslant e_1(x),$$

$$\int_a^b [e_1(x)-(1-e_2(x))]dx=|\Sigma_1|+|\Sigma_2|-(b-a)<2\varepsilon.$$

從引理知道 $e(x)\in C_2(a,b)$. 又從

$$|E|-\varepsilon<\int_a^b(1-e_2(x))dx<\int_a^b e(x)dx<$$

$$<\int_a^b e_1(x)dx<|E|+\varepsilon,$$

知 $|E|$ 等於 $e(x)$的積分.

反過來說，從 $e(x) \in C_2$ 我們能導出 $|E|$ 的存在．事實上，此時存在着階梯函數列 $\{\varphi_n(x)\}$ 概斂於 $e(x)$．我們不妨假設 $\varphi_n(x)$ 是有限個區間組 Σ_n 的特徵函數，函數

$$\psi_n(x) = \max[\varphi_n(x), \varphi_{n+1}(x), \cdots]$$

是 $\Sigma_n+\Sigma_{n+1}+\cdots$ 的特徵函數，$\psi_n(x)\geqslant\psi_{n+1}(x)$．和集 $\Sigma_n+\Sigma_{n+1}+\cdots$ 是由區間所成的點集，它含有 E 的幾乎一切點，所以從

$$|\Sigma_n + \Sigma_{n+1} + \cdots| = \int_a^b \psi_n(x)dx \to \int_a^b e(x)dx$$

得到

$$\overline{E} \leqslant \int_a^b e(x)dx.$$

對於 $[a, b] - E$ 來說，我們有

$$\overline{[a, b] - E} \leqslant \int_a^b [1 - e(x)]dx.$$

由是

$$\overline{E} \leqslant \int_a^b e(x)dx \leqslant \underline{E}.$$

所以 $\overline{E} = \underline{E}$．定理證畢．

最後我們證明函數族 $C_2(a, b)$ 就是 $L(a, b)$．我們首先注意 $L(a, b)$ 中的函數是依勒貝格的意義是可測的，階梯函數以及階梯函數列的極限函數也都是可測的，因此 $C_2(a, b)$ 中的函數，一定是可測的．設 $f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, 是一可測函數．

$$0 < l_n - l_{n-1} \leqslant \delta,\ \delta > 0,\ n = \cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots,$$

$$l_{-n} \to -\infty,\ l_n \to +\infty (n \to +\infty).$$

設點集 $E_n = (l_{n-1} \leqslant f(x) < l_n)$ 的特徵函數函數為 $e_n(x)$，則 $f(x) \in L(a, b)$ 的充要條件是

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| l_n \int_a^b e_n(x)dx \right| < \infty.$$

事實上，從上面的定理，

$$|E_n| = \int_a^b e_n(x)dx.$$

設 $l_0 = 0$, 兩級數

$$\sum_{n=0}^{\infty} l_n \int_a^b e_n(x)dx \text{ 和 } \sum_{n=0}^{\infty} -l_{-n}\int_a^b e_{-n}(x)dx$$

都收斂的話,則當 $\delta \to 0$ 時,其極限必然地存在. 因此

$$\int_a^b \max(f(x), 0)dx \text{ 和 } \int_a^b \max(-f(x), 0)dx$$

都存在,所以 $f(x) \in L(a, b)$. 反過來說,當 $f(x) \in L(a, b)$時.

$$\int_a^b \max(f(x),0)dx = \lim_{\delta\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} l_{n-1}\int_a^b e_n(x)dx,$$

$$\int_a^b \max(-f(x),0)dx = \lim_{\delta\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} -l_{-n+1}\int_a^b e_{-n}(x)dx,$$

因此

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| l_n \int_a^b e_n(x)dx \right| < \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| l_{n-1}\int_a^b e_n(x)dx \right| + \\ + \delta(b-a) < \infty.$$

由於

$$\sum_1^{\infty} l_{n-1}e_n(x) \leqslant \max(f(x), 0) \leqslant \sum_1^{\infty} l_n e_n(x),$$

當 $f(x) \in L(a, b)$時,上式兩端都屬於 $C_2(a, b)$(定理 7,定理 6).
由定理 7 的引理

$$\max(f(x), 0) \in C_2(a, b).$$

因此, $\max(-f(x), 0) \in C_2(a, b)$. 合併起來, $f(x) \in C_2(a, b)$.

反過來說,假如 $f(x) \in C_2(a, b)$, 那末從

$$\sum_1^{\infty} l_{n-1}e_n(x) \leqslant \max(f(x),0) \in C_2$$

$$\sum_1^{\infty} l_{-(n-1)}e_{-n}(x) \leqslant \max(-f(x), 0) \in C_2$$

得

$$\sum_1^{\infty} \pm l_{\pm n}\int_a^b e_{\pm n}(x)dx < \infty.$$

所以 $f(x) \in L(a, b)$. 我們證明了下述

定理 8. $C_2(a, b) = L(a, b)$.

9. **積分函數與絕對連續函數** 設 $f(x) \in L(a, b)$. 我們要求出積分函數

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

的全變差函數 $T(x)$. 設 $a = x_0 < \cdots < x_n = b$, 作階梯函數

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_k \quad (x_{k-1} < x < x_k), \ -1 \leqslant \varepsilon_k \leqslant 1.$$

那末

$$\int_a^b \varepsilon(x)f(x)dx = \sum_{n=1}^{n} \varepsilon_k[F(x_k) - F(x_{k-1})] \leqslant$$
$$\leqslant \Sigma |F(x_k) - F(x_{k-1})|.$$

由是

$$T(b) = \max_{|\varepsilon(x)| \leqslant 1} \int_a^b \varepsilon(x)f(x)dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

式中等號等必須成立：由於 $f(x)$ 也屬於 C_2, 所以有階梯函數列 $\varphi_1(x), \cdots$ 概斂於 $f(x)$. 設

$$|\varepsilon_n(x)| = 1, \ \varepsilon_n(x)\varphi_n(x) \geqslant 0,$$

則 $\varepsilon_n(x)f(x)$ 概斂於 $|f(x)|$. 由是得到

定理 1. 當 $f(x) \in L(a, b)$ 時, $f(x)$ 的積分函數的全變差等於

$$\int_a^b |f(x)|\, dx.$$

若 $f(x) \in C_1$, 則有單調增加的階梯函數列 $\varphi_n(x)$ 概斂於 $f(x)$. 記 $\varphi_n(x)$ 的積分函數為 $\Phi_n(x)$, 則 $f(x)$ 的積分函數 $F(x)$ 可以寫成

$$F(x) = \Phi_1(x) + (\Phi_2(x) - \Phi_1(x)) + (\Phi_3(x) - \Phi_2(x)) + \cdots.$$

由富弼尼的定理, $F'(x)$ 幾乎到處存在, 並且成立着等式

$$F'(x) \doteq \lim \varphi_n(x) = f(x).$$

但是 $f(x) \in L(a, b)$ 的話, $f(x)$ 是 C_1 中兩個函數之差, 因此, 我們可述如下的

定理 1. 若 $F(x)$ 是 $f(x) \in L(a, b)$ 的積分函數, 則 $F'(x)$ 幾

乎到處存在而等於 $f(x)$.

現在要問這個定理之逆,在怎樣的狀況中成為定理?或是,幾乎到處有導數的連續函數是否一定是一個積分函數?

下面的定理給這個問題以否定的回答.

定理 2. 在區間 $[0,1]$ 上存在單調增加的連續函數 $F(x)$, 在任何子區間中不是常數,而 $F'(x) \doteq 0$.

證明 設 $0<\lambda<1$. 於 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 上用歸納法作成如下的連續函數列 $\{F_n(x)\}$. 設 $F_0(x)=x$. 假如 $F_n(x)$ 已經如下的定義着:它在區間

$$(\alpha,\beta)=\left(\frac{k}{2^n},\ \frac{k+1}{2^n}\right)(k\text{ 是整數})$$

中是一次的,連續的. 那末在 $x=\alpha$ 和 $x=\beta$, 定義 $F_{n+1}(x)=F_n(x)$, 在 α 和 β 的中點 $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, 定義

$$F_{n+1}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{1-\lambda}{2}F_n(\alpha)+\frac{1+\lambda}{2}F_n(\beta).$$

此式關於 λ 是增加的,所以

$$F_{n+1}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)>F_n\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right),$$

在 $\left(\alpha,\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$, $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \beta\right)$ 上,定 $F_{n+1}(x)$ 之值為一次的. 因此

$$F_{n+1}(x)>F_n(x),\ \alpha<x<\beta.$$

由是 $F_0(x) \leqslant F_1(x) \leqslant \cdots$ 在 $[0,1]$ 上成立,並且 $0 \leqslant F_n(x) \leqslant 1$. 那末當 $n\to\infty$ 時, $F_n(x)$ 收斂於一個單調增加的函數 $F(x)$.

現在我們要證 $F(x)$ 是一嚴格增加而幾乎到處具有導數為 0 的連續函數. 設 $x\in[0,1]$, 則 x 含在如下的區間 $[\alpha_n,\beta_n]$ 之中,但

$$\alpha_n=\frac{k}{2^n},\ \beta_n=\frac{k+1}{2^n},\ (k\text{ 是整數},\ n=0,1,\cdots).$$

由定義,

$$F_{n+1}\left(\frac{\alpha_n+\beta_n}{2}\right)-F_{n+1}(\alpha_n)=\frac{1+\lambda}{2}\left[F_n(\beta_n)-F_n(\alpha_n)\right],$$

$$F_{n+1}(\beta_n) - F_{n+1}\left(\frac{\alpha_n + \beta_n}{2}\right) = \frac{1-\lambda}{2}\,[F_n(\beta_n) - F_n(\alpha_n)].$$

所以

$$F_{n+1}(\beta_{n+1}) - F_{n+1}(\alpha_{n+1}) = \frac{1 \pm \lambda}{2}\,[F_n(\beta_n) - F_n(\alpha_n)].$$

由於 $F_k(\alpha_k) = F(\alpha_k)$, $F_k(\beta_k) = F(\beta_k)$, 所以從上式得到

$$F(\beta_{n+1}) - F(\alpha_{n+1}) = \frac{1 \pm \lambda}{2}\,[F(\beta_n) - F(\alpha_n)].$$

由是

$$F(\beta_n) - F(\alpha_n) = \prod_1^n \frac{1+\lambda\varepsilon_\nu}{2}, \quad (\varepsilon_\nu = \pm 1).$$

由是得到 $F(\beta_n) - F(\alpha_n) > 0$; 當 $n \to \infty$ 時,

$$F(\beta_n) - F(\alpha_n) \leqslant \left(\frac{1+\lambda}{2}\right)^n \to 0.$$

因此 $F(x)$是一嚴格增加的連續函數.

單調函數的導數 $F'(x)$ 是幾乎到處存在的. 一切$\{\alpha_n\}$和$\{\beta_n\}$是可列的. 假如 x 不屬於這個可列集,那末

$$\alpha_n < x < \beta_n.$$

從

$$\frac{F(\beta_n) - F(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} = \prod_1^n (1 + \varepsilon_\nu \lambda)$$

和無限乘積 $\prod_1^\infty (1+\varepsilon_\nu\lambda)$ 的發散性, 當上式的極限存在 $(n \to \infty)$ 時,其極限值必須等於 0. 所以 $F'(x)$ 幾乎處處等於 0. 定理證明完畢.

系 有界變差的連續函數未必是一積分函數.

定理 3. 函數 $F(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, 成一積分函數的充要條件是 $F(x)$在 $[a, b]$ 中具有絕對連續性.

證明 設 $F(x)$是 $f(x)$的積分函數,則當$[a, b]$中的子區間

$$J_k = (x_k, x_k'), \ k = 1, 2, \cdots, l,$$

不相重疊時,

$$\sum_{k=1}^{l} |F(x_k) - F(x'_k)| \leq \int_{J_1+J_2+\cdots+J_l} |f(x)|\,dx.$$

右邊當 $|J_1 + J_2 + \cdots + J_l| = \sum_1^l |J_k|$ 甚小時,可小於任意小的數,由是可知 $F(x)$ 具有絕對連續性.

現在假設 $F(x)$ 是一絕對連續函數,要證明 $F(x)$ 是一積分函數. 由於函數 $F(x)$ 的正變差函數和負變差函數都具有絕對連續性,所以我們不妨假設 $F(x)$ 是一單調增加的函數來證明它是一個積分函數,這樣一來,比值

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

不取負值、且當 $h \to 0$ 時,概斂於 $F'(x)$. 另一方面,當 $h \to 0$ 時,

$$\int_\alpha^\beta \frac{F(x+h) - F(x)}{h}\,dx =$$

$$= \frac{1}{h}\int_\beta^{\beta+h} F(x)dx - \frac{1}{h}\int_\alpha^{\alpha+h} F(x)dx$$

的極限等於 $F(\beta) - F(\alpha)$. 從法都的引理 $F'(x) \in L(\alpha, \beta)$, 並且

$$\int_\alpha^\beta F'(x)dx \leq F(\beta) - F(\alpha).$$

設 $F'(x)$ 的積分函數為 $G(x)$, 則上式可以寫成

$$G(\beta) - G(\alpha) \leq F(\beta) - F(\alpha).$$

由是可知 $F(x) - G(x)$ 是一單調增加的函數.

由於 $F'(x) - G'(x)$ 幾乎到處等於 $F'(x) - F'(x) = 0$, 所以從區間函數這一節中定理 2 的系,知道 $F(x) - G(x)$ 是一常數. 因此 $F(x)$ 是一積分函數,定理證畢.

我們現在指出單調的連續函數的結構, 我們稱滿足下述三個條件的單調函數 $F(x)$, $a \leq x \leq b$, 為一**奇異函數**:

(一) $F(x)$ 在 $[a, b]$ 中是連續的, (二) $F'(x) \doteq 0$, (三) $F(x)$ 不是常數. 奇異函數的存在,已見第八章 §2.

定理 4. 連續的單調函數 $F(x)$ 不具有絕對連續性的話，它是一個絕對連續函數 $G(x)$ 與一奇異函數 $H(x)$ 之和.

證明　設 $F(x)$ 是一單調增加函數，$a \leqslant x < b$，則由前定理的證明，$F'(x) \in L(a, b)$. 置

$$G(x) = \int_a^x F'(t)dt.$$

又由前定理的證明，知 $F(x) - G(x) \equiv H(x)$ 是一增加函數. 由於 $F'(t) \geqslant 0$，所以 $G(x)$ 也是一個增加函數. 又由於 $H'(x) \doteq 0$，所以得到所示的結果:

$$F(x) = G(x) + H(x).$$

定理證畢.

系　單調函數 $F(x)$ 的一般形式是 $F(x) = G(x) + H(x) + S(x)$，$S(x)$ 是一階梯函數，$H(x)$ 是一奇異函數，$G(x)$ 是一絕對連續函數.

10. 幾個實變數的函數　此地限於兩個實變數來說話，所說的事情可以推廣到三個，四個…實變數的函數. 首先定義兩個實變數的階梯函數 $\varphi(x, y)$. 設 (x, y) 平面上有有限個矩形 $R_i (i=1, 2, \cdots)$；在 R_i 上，$\varphi(x, y)$ 等於常數 C_i，在 ΣR_i 之外，$\varphi(x, y)=0$，則稱 $\varphi(x, y)$ 是一階梯函數. 平面上的點集的測度和函數 $f(x, y)$ 的議論，可用對應原理來展開. 將平面劃分爲邊長爲 1 的正方形系:

$$K_{m,n}^{(0)}: m \leqslant x < m+1,\ n \leqslant y < n+1,$$
$$(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

將這些 $K_{m,n}^{(0)}$ 一一對應於直線上的區間 $J_k^{(0)} = (k, k+1) (k = 0, \pm 1, \cdots)$ 的系，而將 $K_{m,n}^{(0)}$ 的全體寫成 $K_k^{(0)} (k = 0, \pm 1, 2, \cdots)$，$K_k^{(0)}$ 對應於 $J_k^{(0)}$，等分 $K_k^{(0)}$ 爲四個正方形

$$K_{k1}^{(0)},\quad K_{k2}^{(0)},\quad K_{k3}^{(0)},\quad K_{k4}^{(0)},$$

等分 $J_k^{(0)}$ 爲四個區間 $J_{k1}^{(0)}$, $J_{k2}^{(0)}$, $J_{k3}^{(0)}$, $J_{k4}^{(0)}$；而令 $K_{k\nu}^{(0)}$ 對應於 $K_{k\nu}^{(0)}$. 將一切 $K_{k\nu}^{(0)}$ $(\nu = 1, 2, 3, 4)$ 寫成 $K_k^{(1)}$ $(k=0, \pm 1, \cdots)$，一切 $J_{k,\nu}^{(0)}$

寫成 $J_k^{(1)}$ $(k=0, \pm 1, \cdots)$,其中 $K_k^{(1)}$ 對應於 $J_k^{(1)}$. 將 $\{K_k^{(1)}\}$ 和 $\{J_k^{(1)}\}$ 施行與 $\{K_k^{(0)}\}$ 和 $\{J_k^{(0)}\}$ 同樣的劃分——四等分——和對應，簡寫此結果爲

$$\{K_k^{(2)}\} \sim \{J_k^{(2)}\}.$$

如是逐次進行,獲得

$$\{K_k^{(\nu)}\} \sim \{J_k^{(\nu)}\}, \quad \nu = 0, 1, 2, 3, \cdots.$$

這樣一來平面上的開集 K, 對應於直綫上的一個開集 J, 我們定義 $|J|$ 爲 K 的測度 $|K|$. 假如 $K \supset E$, 則以 $|K|$ 的下界爲 E 的外測度. 設正方形 S 含有 E, 則從 $|S|$ 減去 $S-E$ 的外測度，定爲 E 的內測度. 當外測度 $\overline{E}$ 等於內測度 $\underline{E}$ 時, 稱 E 是可測的——依勒貝格的定義. 記 E 的測度爲 $|E| = \overline{E} = \underline{E}$. 這些概念和定義都平行於綫性點集的種種事情. 因此許多定理關於綫性點集的, 在平面點集上也成立, 在此地我們不必逐一指出. 不但如此,關於 $f(x)$ 的許多事實,也可以移到 $f(x, y)$ 上來. 例如矩形

$$R = [a \leqslant x \leqslant b, \ c \leqslant y \leqslant d]$$

中可測點集 E 的測度可以計算如下:含在 E 中的有限個正方形的和 R_n 的面積爲 R_n 的特徵函數 $e_n(x, y)$ 的積分:

$$|R_n| = \iint_R e_n(x, y)\,dx\,dy.$$

假如 $R_n \subset R_{n+1} \subset E$, $|R_n| \to |E|$,那末 $e_n(x, y) \leqslant e_{n+1}(x, y)$, $|R_n| \leqslant |E|$. 從階梯函數的性質, $e_n(x, y)$ 概斂於一個函數 $e(x, y)$. 又由勒維的定理,

$$\iint_R e(x, y)\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \iint_R e_n(x, y)\,dx\,dy.$$

函數 $e(x, y)$ 幾乎到處等於 E 的特徵函數. 另一方面,對於階梯函數 $e_n(x, y)$,成立着

$$\iint_R e_n(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d e_n(x, y)\,dy\right) dx.$$

由於上式當 $n \to \infty$ 時的極限存在,函數列

$$\int_c^d e_n(x, y)dy \ (n = 1, 2, \cdots)$$

概斂於一個 x 的函數，這是根據着階梯函數的定理 2 的。在這個事實上，再由這個定理 2，函數列 $e_n(x, y)(n = 1, 2, \cdots)$概斂於 $e(x, y)$，並且

$$\lim_{n\to\infty}\int_c^d e_n(x, y)dy = \int_c^d e(x, y)dy.$$

由是，從

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\int_c^d e_n(x, y)dy\,dx = \int_a^b\lim_{n\to\infty}\int_c^d e_n(x, y)dy\,dx$$

得到

$$\lim_{n\to\infty}\iint_R e_n(x, y)dx\,dy = \int_a^b\int_c^d e(x, y)dy\,dx.$$

記矩形 R 上之階梯函數 $\varphi(x, y)$的全體爲 $C_0(R)$。假如$C_0(R)$中的單調增加函數列 $\varphi_n(x, y)$概斂於 $f(x, y)$，並且 $\varphi_n(x, y)$在 R 上的積分爲有界，那末說 $f(x, y)$屬於 $C_1(R)$. 從勒維的定理，成立等式

$$\lim_{n\to\infty}\iint_R \varphi_n(x,y)dx\,dy = \iint_R f(x,y)dx\,dy.$$

與上文同樣，知道此二重積分可以改成累次積分．在這樣的基礎上，我們獲得富弼尼的累次積分定理：

定理 1. 若 $f(x, y) \in L(R)$則

$$\iint_R f(x,y)dx\,dy = \int_a^b\left(\int_c^d f(x, y)dy\right)dx =$$

$$= \int_c^d\left(\int_a^b f(x, y)dx\right)dy.$$

此地的 R 是矩形 $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, 函數族 $L(R)$的定義可仿 $L(a, b)$來敍述——通過對應原理，函數族 $C_1(R)$中兩個函數之差是 $C_2(R)$中的一個函數。等式

$$L(R) = C_2(R)$$

可以按照 $L(a, b) = C_2(a, b)$的證明來建立。

富彼尼的定理，當然可以推廣到幾個實變數 $x, y, \cdots, z$ 的函數：設 R 是

$$a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d, \cdots,\ e \leq z \leq f,$$

則當 $f(x, y, \cdots, z) \in C_2(R)$ 時，

$$\int_a^b \int_c^d \cdots \int_e^f f(x, y, \cdots, z) dx\, dy\, dz = \iint_R \cdots$$

$$\cdots \int f(x, y, \cdots, z) dx\, dy, \cdots dz.$$

其次，我們研究矩形函數的導數，此地的一切矩形 R，它的兩邊都平行於兩個坐標軸．設 $f(R)$ 是一具有加減性的正值矩形函數．設坐標軸的兩個平行綫敍列，在平面上，都是到處稠密的，由是作成一系的閉的矩形 (R)．設 $P \in R$, $R \in (R)$，則當 R 的對角綫收縮於 P 點時，比值

$$\frac{f(R)}{|R|}$$

有上限 $\overline{D}f(P)$ 與下限 $\underline{D}f(P)$．當 $\overline{D}f(D) = \underline{D}f(P)$ 時，寫此共通值為 $Df(P)$，稱 $f(R)$ 在點 P 具有導數 $Df(P)$．由於區間函數幾乎到處有導數，所以從對稱原理，$Df(P)$ 幾乎到處存在．但是我們必須證明這事實與 (R) 無關係，明確地說：

定理 2. 設 $f(R)$ 是一個具有加減性的正值矩形函數，則當矩形 R 的對角綫收縮於一點 P 時，比值 $f(R)/|R|$ 無極限 $Df(P)$ 的 P 成一零集（平面測度為 0 的點集）．

證明 所要證明的是：除開一個零集，等式

$$\lim_{\substack{R \in (R) \\ P \in R}} \frac{f(R)}{|R|} = \lim_{\substack{R' \in (R') \\ P \in R'}} \frac{f(R')}{|R'|}$$

不成立的點 P 成一零集，此地 (R) 和 (R') 表示兩個矩形系統．

由於 (R) 中的界綫（R 的邊）和 (R') 中的界綫的全體成一零集，所以我們不妨光是考慮 R 和 R' 內部的點 P，並且光是考慮兩個極限

$$Df(P)=\lim_{R\to P}\frac{f(R)}{|R|} \text{ 和 } D'f(P)=\lim_{R'\to P}\frac{f(R')}{|R'|}$$

都存在(而不相等)的點 P. 設 c 和 r 是兩個正的有理數 $c<r$, 記適合

$$Df(P)<c<r<D'f(P)$$

的一切 P 所成之集爲 $((c, r))$ 的話, 那末點集 $(Df(P)<D'f(P))$ 是 $((c, r))$ 關於 c 和 r 的和集. 因此, 固定 c 和 r, 我們證明 $((c,r))$ 是一零集的話, 就知道 $(Df(P)<D'f(P))$ 是一零集.

設 $P\in((c, r))$, 記敍列 (R) 中適合 $f(R)<c|R|$ 和 $P\in R$ 的第一個 R 爲 R_P. 將這些 R_P, 去其重復, 得一系的矩形 $\Sigma_1\subset(R)$. 又記適合

$$f(R')>r|R'| \text{ 和 } R'\subset R_P$$

的 (R') 中第一個 R' 爲 R'_P: 將這些 R'_P, 去其重復, 得一系的矩形 $\Sigma_2\subset(R')$. 對於 Σ_1 和 Σ_2 中的 R 和 R', 我們有

$$r\Sigma|R'|\leqslant\Sigma f(R')\leqslant\Sigma f(R)\leqslant c\Sigma|R|.$$

爲記號的統一起見, 寫上面的 R 爲 $R^{(1)}$, R' 爲 $R'^{(2)}$, 則得

$$\Sigma|R'^{(2)}|\leqslant\frac{c}{r}\Sigma|R^{(1)}|.$$

現在記敍列 (R) 中適合 $f(R)<c|R|$, $P\in R$, $R\subset R'^{(2)}$ 的最初之 R 爲 $R^{(3)}$, 等等, 則又得

$$\Sigma|R'^{(4)}|\leqslant\frac{c}{r}\Sigma|R^{(3)}|\leqslant\frac{c}{r}\Sigma|R'^{(2)}|.$$

因此

$$\Sigma|R'^{(4)}|\leqslant\left(\frac{c}{r}\right)^2|\Sigma R^{(1)}|.$$

如是繼續進行, 得到

$$\Sigma|R^{(2n-1)}|\leqslant\Sigma|R'^{(2n)}|\leqslant\left(\frac{c}{r}\right)^n|\Sigma R^{(1)}|,\ n=1, 2, \cdots.$$

由於 $((c, r))\subset\Sigma R^{(2n-1)}$, $n=1, 2, \cdots$, 所以 $((c, r))$ 是一零集.

同樣可證 $(D'f(P)<Df(P))$ 是一零集. 由是除開一個零集,

$D'f(P) = Df(P)$.

設 $f(R)$是一具有加減性的矩形函數．當 R 分爲任意個矩形 R_k 時，$\Sigma |f(R_k)|$ 是有界的話，稱其上界爲矩形 R 上的全變差，記此全變差爲 $T_f(R)$．$T_f(R)$是 $f(R)$的全變差函數，從

$$f(R) = T_f(R) - [T_f(R) - f(R)]$$

知道有界變差的矩形函數(即 $T_f(R)$ 常爲有限數的 $f(R)$)是兩個正值矩形函數的差．這是與一個變數 x 的有界變差函數相類似的．類似於第六章 §5 定理 6 中等式

$$|f'(x)| \doteq T'(x)$$

的，有如下的定理。

定理 3. 若 $f(R)$是一具有加減性的有界變差的矩形函數，則等式

$$DT_f(P) = |Df(P)|$$

幾乎處處成立。

這是可以仿照 $|f'(x)| \doteq T'(x)$的證明來建立的，因此我們首先拓廣富弼尼的分項微分定於矩形函數級數：具有加減性的正值矩形函數的收斂級數，關於一定的矩形系統(R)幾乎到處可以分項微分．

顯然地，這個拓廣並不需要特殊的(異乎一個變數的函數的)證明．

利用這個富弼尼定理，我們就能按照第六章 §5 定理 6 的證明來建立定理 3。

11. 勒貝格積分在複變函數論上之一應用　下面的定理是複變函數論的基礎。

定理　設 G 是複素數 z 的平面上之一區域，G 的境界 C 是一條有長的若當閉曲綫，假如函數 $f(z)$ 在 G 中是正則的，在 $G+C$ 上是連續的，那末 $f(z)$ 在 C 上的綫積分等於 0．

這是函數論中柯西定理的拓廣，我們現在通過巴拿赫的定理

來證明它.

巴拿赫的定理[1] 在區間 $[a, b]$ 上, $g(x)$ 是一有界變差的連續函數. 設 y 是一實數, $k(y)$ 表示適合 $g(x)=y$ 的 x 之個數 [$k(y)$ 可以爲 ∞] 那末 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上的全變差等於勒貝格積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(y)dy.$$

證明 於 $[a,b]$ 任意作一分點系統 $D(x_1^{(n)},\cdots,x_{k_n}^{(n)})(n=1,2,\cdots)$

$$D(x_1^{(n)},\cdots,x_{k_n}^{(n)}) \subset D(x_1^{(n+1)},\cdots,x_{k_{n+1}}^{(n+1)}),$$

$$\max_k(x_k^{(n)}-x_{k-1}^{(n)})=\delta(x_1^{(n)},\cdots,x_{k_n}^{(n)})=\delta_n\to 0.$$

固定 n, k_n 個小區間 $[x_0^{(n)}, x_1^{(n)})$, $[x_1^{(n)}, x_2^{(n)},\cdots)$, $\cdots$, $[x_{k_n-1}^{(n)}, x_{k_n}^{(n)}]$ 中含有方程

$$g(x)=y$$

的解的區間, 設其個數爲 $k_n(y)$, 那末 $k_n(y)\leqslant k_{n+1}(y)$. 假如 $k(y)$ 是一有限數, 那末當 n 甚大時, $k_n(y)$ 等於 $k(y)$. 假如 $k(y)$ 是 $+\infty$, 那末 $k_n(y)\to\infty$. 總而言之,

$$\lim_{n\to\infty} k_n(y)=k(y).$$

作如下的函數 $k_{n\nu}(y)$: 當方程 $g(x)=y$ 在 $[x_{\nu-1}^{(n)}, x_\nu^{(n)}]$ 有解時, $k_{n\nu}(y)$ 等於 1. 若不然, $k_{n\nu}(y)$ 等於 0. 那末

$$k_{n1}(y)+k_{n2}(y)+\cdots+k_{nn}(y)=k_n(y).$$

設 $g(x)$ 在 $[x_{\nu-1}^{(n)}, x_\nu^{(n)}]$ 中的上界和下界爲 $M_\nu^{(n)}$, $m_\nu^{(n)}$. 那末, 當 $m_\nu^{(n)}<y<M_\nu^{(n)}$ 時, $k_{n\nu}(y)=1$; 當 $y<m_\nu^{(n)}$ 或 $y>M_\nu^{(n)}$ 時, $k_n(y)=0$. 由是

$$\int_{-\infty}^{\infty} k_{n\nu}(y)dy=\int_{m_\nu^{(n)}}^{M_\nu^{(n)}} dy=M_\nu^{(n)}-m_\nu^{(n)},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} k_n(y)dy=\sum_{\nu=1}^{n}(M_\nu^{(n)}-m_\nu^{(n)})\geqslant$$

1) Banach, Fundamenta Math. 7 (1925).

$$\geqslant \sum_{\nu=1}^{n} | g(x_\nu^{(n)}) - g(x_{\nu-1}^{(n)}) |. \tag{1}$$

但是函數 $g(x)$ 是連續的，$[x_{\nu-1}^{(n)}, x_\nu^{(n)}]$ 中必有如下的兩點 $\xi_\nu^{(n)}$, $\eta_\nu^{(n)}$:

$$g(\xi_\nu^{(n)}) = M_\nu^{(n)},\ g(\eta_\nu^{(n)}) = m_\nu^{(n)}.$$

所以 $\Sigma(M_\nu^{(n)} - m_\nu^{(n)}) = \Sigma | g(\xi_\nu^{(n)}) - g(\eta_\nu^{(n)}) | \leqslant V$. 把這個關係和(1)合併起來看，知道

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_n(y)dy = V.$$

設 $g(x)$ 的上界和下界是 M, m, 利用 §6 的定理 7.

$$V = \lim \int_m^M k_n(y)dy = \int_m^M k(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} k(y)dy$$[1]

證明完畢.

因 V 是一有限數，所以使 $k(y) = +\infty$ 的 y, 其全體成一零集. 利用這個性質易證下面的

系 1 設 C 是一有長的連續曲綫，$x = g(t)$, $y = h(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$. 那末直綫 $x = c$ 與 C 有無數個交點的 c 其全部成一零集(綫測度等於零的點集).

證明 事實上適合 $g(t) = c$ 和 $k(c) = \infty$ 的 c, 其全體成一直綫上之點集 E, 因 $g(t)$ 是有界變差，所以 E 是零集. 證明完畢.

系 2 假如區域 G 的境界是一有長的若當曲綫，那末對於任一正數 δ 必有兩組互相直交的平行綫，劃分 G 爲有限個區域，而兩組平行綫中任何相降兩綫距離等於 δ.

證明 用系 1 的種種記號，適合

$$g(t) = c,\ k(c) = \infty$$

的一切數 c 成一零集 E, 具有形式

$$c + m\delta (m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots),\ c \in E$$

---

1) 定理中，$g(x)$ 的連續性，是不可免除的假設，例如

$$g(x) = 0\ (0 \leqslant x \leqslant 1,\ x \neq \tfrac{1}{2}),\ g(\tfrac{1}{2}) = 1.$$

那末 $V = 2$, $\int k(y)dy = 0$.

一切數成一零集 $\varepsilon(\delta)$. 假如 $\alpha \bar{\in} \varepsilon(\delta)$, 那末平行綫組

$$x = \alpha + m\delta \ (m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

中的任何一綫與 C 的交點不過有限個,同樣可得平行綫組

$$y = \beta + m\delta (m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

其中任何一綫與 C 的交點不過有限個. 證明完畢.

積分定理的證明 假如單純閉曲綫 Γ 完全落在 G 中, 那末 $f(z)$在 Γ 上的積分等於 0, 這是普通函數論中有證明的事實. 現在假設 ϵ 是任意之一正數,由函數 $f(z)$在 $G+C$ 上的連續性, 必有如下的正數 $\delta, \delta<1$,當 $G+C$ 中兩點 z 與 z' 的距離小於 2δ 時

$$|f(z') - f(z)| < \varepsilon.$$

由上述的系 2,作兩組互相直交的平行綫,劃分 G 爲有限個區域G_1, $G_2, \cdots, G_r$, 相隣兩平行綫的距離等於 δ. 設 C_ν 是 G_ν 的正方向境界, $C_1, \cdots, C_m$ 都含有 C 的點 $C_{m+1}, \cdots, C_r$ 都不含有 C 的點,那末

$$\int_C f(z)dz = \sum_{\nu=1}^{m} \int_{C_\nu} f(z)dz, \int_{C_\nu} f(z)dz = 0 \ (\nu = m+1, \cdots, r).$$

最後的 $r-m$ 個等式,是根據普通函數論中柯西定理的. 由是

$$\int_C f(z)dz = \sum_{\nu=1}^{m} \int_{C_\nu} f(z)dz.$$

設 $1 \leqslant \nu \leqslant m$, z' 是 C_ν 上的一點, C_ν 的長是 l_ν, 那末當 $z \in C_\nu$ 時, z 與 z' 的距離小於 2δ

$$\left|\int_{C_\nu} f(z)dz\right| = \left|\int_{C_\nu} [f(z) - f(z')]dz\right| < \varepsilon l_\nu.$$

因之

$$\left|\int_C f(z)dz\right| < \varepsilon(l_1 + l_2 + \cdots + l_m)$$

$C_1 + C_2 + \cdots + C_m$ 是由 C 的弧段和種種直綫段所構成的. 上述兩平行綫組所成之許多小正方形中,有遇着 C 的點的,設這種小正方形的個數是 N. 設 C 的長是 l, 那末

$$l_1 + \cdots + l_m \leqslant l + 4\delta N.$$

五個隣接的小正方形中,必有兩個小正方形相距不小於 δ, 分 C 爲

$\left[\frac{l}{\delta}\right]+1$ 部分，使各小部分的長都小於 δ，那末每一部分所能接觸的正方形，最多不過四個，由是可知

$$N \leqslant 4\left(\frac{l}{\delta}+1\right).$$

因之 $l_1+\cdots+l_m<l+16(l+\delta)<17l+16$，由是

$$\left|\int_C f(z)dz\right|<\varepsilon(17l+16).$$

ε 是任意的，所以上面的積分等於 0. 定理證畢.

12. 含有勒貝格積分的種種基本解析工具、分離積分法 設 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上的勒貝格積分都存在. 置

$$G(x)=\int_a^x g(t)dt,\ F(x)=\int_a^x f(t)dt,$$

那末

$$\int_a^b f(x)G(x)dx=F(b)G(b)-\int_a^b G'(x)F(x)dx.$$

證明 $F(x)$ 和 $G(x)$ 都是連續函數，對於 $\varepsilon>0$ 有 δ: 當 x 和 x' 的差小於 δ 時，

$$|F(x)-F(x')|<\varepsilon,\ |G(x)-G(x')|<\varepsilon.$$

設 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,\ x_{k-1}-x_k<\delta\ (k=1, 2, \cdots, n)$，那末

$$\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k}[F(x)-F(x_k)]g(x)dx\right|<\varepsilon\int_{x_{k-1}}^{x_k}|g(x)|dx.$$

由是從

$$\int_a^b G'(x)F(x)dx=\sum_{k=1}^n\int_{x_{k-1}}^{x_k}[F(x)-F(x_k)]g(x)dx+$$
$$+\sum_{k=1}^n F(x_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k}G'(x)dx$$

和 $G'(x)\doteq g(x)$ 得

$$\left|\int_a^b G'(x)F(x)dx-\sum_{k=1}^n F(x_k)[G(x_k)-G(x_{k-1})]\right|<$$
$$<\varepsilon\int_a^b|g(x)|dx.$$

同樣

$$\left|\int_a^b F'(x)G(x)dx - \sum_{h=1}^{n} G(x_{k-1})[F(x_k) - F(x_{k-1})]\right| <$$

$$< \varepsilon\int_a^b |f(x)|dx.$$

由於

$$\sum_1^n G(x_{k-1})[F(x_k) - F(x_{k-1})] +$$

$$+ \sum_1^n F(x_k)[G(x_k) - G(x_{k-1})] = F(b)G(b)$$

所以

$$\left|\int_a^b G'(x)F(x)dx + \int_a^b F'(x)G(x) - F(b)G(b)\right| <$$

$$< \varepsilon\int_a^b [|f(x)| + |g(x)|]dx.$$

令 $\varepsilon \to 0$, 就獲得分離積分的公式.

第一平均值定理 設 $p(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 M 上的勒貝格積分都存在. 假如

$$p(x) \geqslant 0, \quad m \leqslant \varphi(x) \leqslant M,$$

那末 $[m, M]$ 中必有如下的 μ:

$$\int_M p(x)\varphi(x)dx = \mu\int_M p(x)dx.$$

證明 因 $mp(x) \leqslant \varphi(x)p(x) \leqslant Mp(x)$, 所以 $\varphi(x)p(x)$ 在 M 上可以積分, 從

$$m\int_M p(x)dx \leqslant \int_M p(x)\varphi(x)dx \leqslant M\int_M p(x)dx,$$

知 $[m, M]$ 中有 μ 適合題意.

第二平均值定理 在區間 $[a, b]$ 中, 設 $\varphi(x)$ 是一有界的單調函數, $f(x)$ 是一可積函數, 那末 (a, b) 中必有點 ξ 適合於

$$\int_a^b \varphi(x)f(x)dx = f(a)\int_a^\xi f(x)dx + f(b)\int_\xi^b f(x)dx.$$

當黎曼積分 $\int f(x)dx$ 存在時, 這是瓦也斯脫拉司的定理.

證明 假設 $\varphi(x)$ 是一減少函數來證明就好了. 設 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的積分函數, M, m 是 $F(x)$ 的上界和下界. 於$[a, b]$作一分點系統 $D(x_1, \cdots, x_n)$, $\delta(x_1, \cdots, x_n) \to 0$. 置

$$S(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} F(x_{k-1})[\varphi(x_{k-1}) - \varphi(x_k)] =$$

$$= \sum_{1}^{n} \varphi(x_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx - \varphi(b)F(b).$$

那末

$$m[\varphi(b) - \varphi(a)] \leqslant S(x_1, \cdots, x_n) \leqslant M[\varphi(b) - \varphi(a)].$$

所以 $[m, M]$ 中有 $\mu = \mu(x_1, \cdots, x_n)$ 適合於 $S(x_1, \cdots, x_n) = \mu[\varphi(a) - \varphi(b)]$. 當 $\delta \to 0$ 時,

$$\lim S(x_1, \cdots, x_n) = \int_a^b f(x)\varphi(x)dx - \varphi(b)F(b).$$

事實上, 置

$$\varepsilon = \varepsilon(x_1, \cdots, x_n) = \max \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x)|\, dx$$

的話, 則當 $\delta \to 0$ 時, $\varepsilon \to 0$. 另一方面,

$$\left| \int_a^b f(x)\varphi(x)dx - \varphi(b)F(b) - S(x_1, \cdots, x_n) \right| =$$

$$= \left| \sum_{1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} [\varphi(x) - \varphi(x_k)] f(x)dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{1}^{n} [\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})] \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x)|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon[\varphi(b) - \varphi(a)].$$

因此

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \lim \mu(x_1, \cdots, x_n)\,[\varphi(a) - \varphi(b)] +$$

$$+ \varphi(b)F(b).$$

因 $F(x)$ 的連續性, $\lim \mu$ 是 $F(x)$ 之一函數值. 設 $\mu = F(\xi)$ $(a \leqslant \xi \leqslant b)$, 就得到所要的結果.

設 A 和 B 是如下的兩個數: $\varphi(a+0) \leqslant A$, $\varphi(b-0) \geqslant B$.

取 $\varphi(a)=A$, $\varphi(b)=B$ 的話，函數 $\varphi(x)$ 在閉區間 $[a,b]$ 上仍不失單調性,因此 $[a,b]$ 中有點 ξ 適合

$$\int_a^b \varphi(x)f(x)dx = A\int_a^\xi f(x)dx + B\int_\xi^b f(x)dx.$$

當 $\varphi\geqslant 0$ 時,不妨取 $B=0$,由是得

邦納的平均值定理* 在 $[a,b]$ 上設 $f(x)$ 具有勒貝格積分. 假如 $\varphi(x)$ 是一單調減少的正值有界函數,那末 $[a,b]$ 中有如下的 ξ:

$$\int_a^b \varphi(x)f(x)dx = \varphi(a)\int_a^\xi f(x)dx.$$

假如 $\varphi(x)$ 是一單調增加的正值有界函數,那末 $[a,b]$ 中有如下的 η:

$$\int_a^b \varphi(x)f(x)\ dx=\varphi(b)\int_\eta^b f(x)\ dx.$$

設 $0<L<U$, $\varphi(x)=\dfrac{1}{x}$, 那末 $[L,U]$ 中有 X 適合

$$\int_L^U \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{L}\int_L^X \sin x\,dx.$$

所以積分的絕對值小於 $\dfrac{2}{L}$. 當 L 甚大時, $\dfrac{2}{L}$ 甚小,這就是證明積分

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

的收斂性.

幾個簡單的不等式 設 $x\geqslant 0$, $f(x)$ 和 $g(x)$ 是兩個單調增加的連續函數, $g(0)=f(0)=0$,假如 $f(x)$ 和 $g(y)$ 互爲逆函數:

$$y=f(x),\ x=g(y).$$

那末當 $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$ 時,

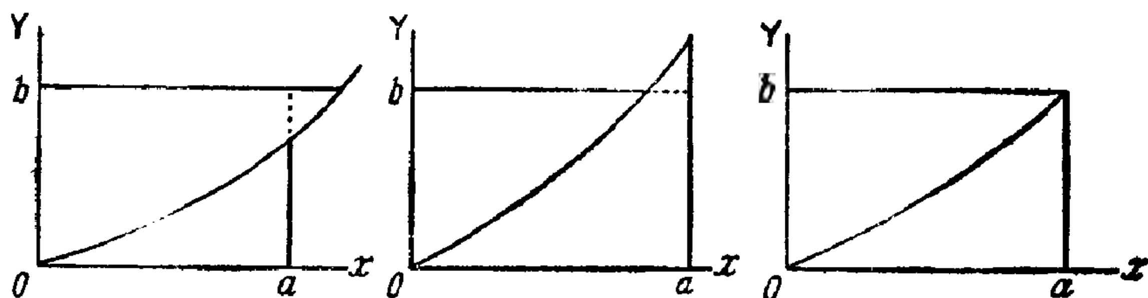
$$\int_0^a f(x)dx + \int_0^b f(y)dy \geqslant ab.$$

其中等號限於 $b=f(a)$ 時成立, 這是楊格 (W. H. Young) 的不

---

* 邦納(Bonnet)的原來定理,限於黎曼積分.

等式,它的眞確性、可以從下圖直觀地明瞭.



設 $\alpha = p - 1 > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 於楊格不等式置 $f(x) = x$, 則得

$$\frac{1}{\alpha+1} a^{\alpha+1} + \frac{\alpha}{\alpha+1} b^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \geqslant ab(\alpha > 0,\ a \geqslant 0,\ b \geqslant 0).$$

等號成立的充要條件是 $b = a^{\alpha}$. 這就是

$$\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q \geqslant ab,\ 但\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{1}$$

其中 a, b, p, q 都是正數. (1)中等號成立的充要條件是 $b = a^{p-1}$, 即 $a^p = b^q$.

在點集 M 上,設正值函數 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的積分都存在. 又設 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p > 0$, $q > 0$. 假如 $\varphi^p = (\varphi(x))^p$ 和 $\psi^q = (\psi(x))^q$ 也都是可積的,則從(1)得到

$$\frac{\int \varphi\psi dx}{\left(\int \psi^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int \psi^q dx\right)^{\frac{1}{q}}} = \int \left(\frac{\varphi^p}{\int \psi^p dx}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\varphi^q}{\int \varphi^q dx}\right)^{\frac{1}{q}} dx \leqslant$$

$$\leqslant \int \left\{\frac{1}{p} \frac{\varphi^p}{\int \varphi^p dx} + \frac{1}{q} \frac{\psi^q}{\int \psi^q dx}\right\} dx = 1.$$

其中等號成立的充要條件是比例式 $\varphi^p : \psi^q = \int \varphi^p dx : \int \varphi^q dx$ 幾乎處處成立. 由是得着

赫而竇(Hölder)的不等式[*]　設 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 都是在 M 上可以積分的正值函數，假如 φ^p 和 ψ^q 在 M 上也可以積分的話，那末

$$\int_M \varphi(x)\psi(x)dx \leqslant \left(\int_M \varphi^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_M \psi^q(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

但 $p>0,\ q>0,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 等式成立的充要條件是比

$$\varphi^p(x):\ \psi^q(x)$$

在 M 上幾乎處處等於同一常數.

應該注意，當函數 $\varphi(x)$ 可以積分時，$\varphi^p(x)\ (p>1)$ 未必可以積分. 例如

$$\varphi(x)=x^{\frac{1}{p}}\quad (p>1,\ 0\leqslant x\leqslant 1)$$

$$\int_0^1 \varphi(x)dx=\frac{p}{p-1},\quad \int_0^1 \varphi^p(x)dx=\infty.$$

從赫而竇不等式容易導出

敏高夫斯基 (Minkowoski) 的不等式　設 $p\geqslant 1,\ \varphi\geqslant 0,\ \psi\geqslant 0$，那末

$$\left[\int_M (\varphi(x)+\psi(x))^p dx\right]^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\int_M \varphi^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}+$$
$$+\left(\int_M \psi^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

其中等號成立的充要條件是: $\varphi(x):\psi(x)=$ 常數.

證明　設 $p>1$，置 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，從赫而竇不等式,

$$\int_M(\varphi+\psi)^p dx=\int_M \varphi(\varphi+\psi)^{p-1}dx+\int_M \psi(\psi+\varphi)^{p-1}dx\leqslant$$
$$\leqslant\left(\int_M \varphi^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_M (\varphi+\psi)^{(p-1)q}dx\right)^{\frac{1}{q}}+$$

---

[*] 當 $p=q=2$ 時，稱爲薛瓦茲和蒲尼亞可夫斯基(Буняковский)的不等式

$$+\left(\int_M (\varphi+\psi)^{(p-1)q}dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int \psi^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left[\left(\int_M \varphi^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_M \psi^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\right]\left[\int_M (\varphi+\psi)^p dx\right]^{\frac{1}{q}}.$$

由是得着所要的不等式．中間的等式成立條件是

$$\varphi^p \div (\varphi+\psi)^p \text{ 和 } \psi^p \div (\varphi+\psi)^p$$

幾乎處處等於常數．這就是說 $\varphi : \psi =$ 常數．

13. 彼隆（Perron）積分 設 $f(x)$ 的定義區是 $[a, b]$．對於任一正數 ε，假如有正數 δ，當 $[a, b]$ 中不相重疊的有限個區間 $J_\nu = (a_\nu, b_\nu)$ 適合 $\Sigma|J_\nu| < \delta$ 時，

$$\Sigma|f(b_\nu)-f(a_\nu)| < \varepsilon,$$

那末 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 是全連續的．現在置 $\Delta = \Delta(J_1, J_2, \cdots, J_n) = \sum_1^N |J_\nu|$，設 $f(x)$ 是一全連續函數，那末當 $\Delta \to 0$ 時 $\Sigma(f(b_\nu) - f(a_\nu))$ 均勻收斂於 0．假如

$$\varliminf_{\Delta\to 0} \Sigma[f(b_\nu)-f(a_\nu)] \geqslant 0$$

均勻地成立，那末稱 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 是下半全連續，又假如

$$\varlimsup_{\Delta\to 0} \Sigma[f(b_\nu)-f(a_\nu)] \leqslant 0$$

均勻地成立．稱 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 是上半全連續．假如

$$\lim_{\Delta\to 0} \Sigma[f(b_\nu)-f(a_\nu)] = 0$$

均勻地成立，那末 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 一定是全連續：為什麼呢？設

$$\Sigma J_\nu = \Sigma J'_\nu + \Sigma J''_\nu,\ J'_\nu = (a'_\nu, b'_\nu),\ J''_\nu = (a''_\nu, b''_\nu),$$

$$f(b'_\nu) - f(a'_\nu) \geqslant 0,\ f(b''_\nu) - f(a'_\nu) \leqslant 0,$$

那末

$$\lim \Sigma[f(b'_\nu) - f(a'_\nu)] = 0,\ \lim[f(b''_\nu) - f(a''_\nu)] = 0$$

因之

$$\lim_{\Delta\to 0} \Sigma|f(a_\nu) - f(b_\nu)| = 0,$$

下面指出上(下)半全連續函數之一重要性質；

定理 1. 區間 $[a, b]$ 上之下(上)半全連續函數 $f(x)$ 的導數

$f'(x)$ 幾乎處處存在.

證明　設 $D_+f(x)=-\infty$ 的 x 之全體成一點集 E_+，我們要證 E_+ 是一零集．假如 E_+ 的外測度 $\mu>0$，那末$[a,b]$必有一部分區間 J_1，其長等於 $\frac{b-a}{2}$ 而 $\overline{JE_+}>0$．J_1 又有一部分區間 J_2，其長等於 $\frac{1}{2}|J_1|$ 而 $\overline{J_2E_+}>0$．如此連續進行，J_{k-1} 中有一部分區間 J_k．

$$|J_k|=\frac{1}{2}|J_{k-1}|,\ \overline{E_+J_k}>0.$$

置 $\mu_k=\overline{E_+J_k}$，那末 $\mu_k\leqslant|J_k|\to 0$．設開集 $O_k\supset E_+J_k$，$|O_k|<<2\mu_k$，對於 E_+J_k 中一點 x，O_k 中有點 x' 適合

$$\frac{f(x')-f(x)}{x'-x}<-\frac{1}{\mu_k}\text{ 和 }x'>x. \tag{1}$$

如是，E_+J_k 中任何點 x 的右方附着(x,x')適合(1)，由謝爾兵司基的測度定理，$\{(x,x')\}$中有如下的不相重疊的有限個區間：

$$(x_\nu^{(k)},x_\nu'^{(k)})\quad(\nu=1,2,\cdots,N_k),$$

$(x_\nu^{(k)},x_\nu'^{(k)})\subset O_k$，點集 J_kE_+ 落在這些區間中的部分之外測度大於 $\frac{1}{2}\mu_k$．那末 $\Sigma(x_\nu'^{(k)}-x_\nu^{(k)})>\frac{1}{2}\mu_k$，因之

$$\sum_{\nu=1}^{Nk}[f(x_\nu'^{k})-f(x_\nu^{(k)})]<-\frac{1}{\mu_k}\sum_{\nu=1}^{Nk}(x_\nu'^{(k)}-x_\nu^{(k)})<-\frac{1}{2}.$$

當 $k\to\infty$ 時，$\Sigma(x_\nu'^{(k)}-x_\nu^{(k)})\to 0$，所以 $\underline{\lim}\,\Sigma[f(x_\nu'^{(k)})-f(x_\nu^{(k)})]\leqslant\leqslant-\frac{1}{2}$，這不合於下半全連續的假設．所以 $\mu=0$．

同樣可證 $D_-f(x)=-\infty$ 的 x 之全體成一零集 E_-．

E_- 和 E_+ 既然都是零集，那末由沙克思等三人的導數定理，$f(x)$幾乎處處存在．

假如 $f(x)$是一上半全連續函數，那末，$-f(x)$ 是一下半全連續函數，所以 $f(x)$幾乎處處存在，定理證畢．

設 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上所定義之一函數，$\psi(x)$ 是如下的下半全連續函數：$\psi(a) = 0$ 關係

$$\psi'(x) \geqslant f(x)$$

在 (a, b) 上幾乎處處成立，稱這樣的 $\psi(x)$ 爲 $f(x)$ 之一**益積函數**。假如 $\varphi(x)$ 是一上半全連續函數，$\varphi(a) = 0$，

$$\varphi'(x) \leqslant f(x)$$

在 (a, b) 上幾乎處處成立，那末這樣的 $\varphi(x)$ 爲 $f(x)$ 之一**損積函數**

定理 2. 設 $\psi(x)$ 是 $f(x)(a \leqslant x \leqslant b)$ 之一益積函數，$\varphi(x)$ 是 $f(x)$ 之一損積函數，那末

$$\omega(x) = \psi(x) - \varphi(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

是一單調增加函數。

證明 因 $\omega(x) = \psi(x) + (-\varphi(x))$，所以 $\omega(x)$ 是一下半全連續函數。對於 $\varepsilon > 0$，必有 δ，當 $\Sigma(b_\nu - a_\nu) < \delta$ 時，

$$\Sigma[\omega(b_\nu) - \omega(a_\nu)] > -\varepsilon, \tag{1}$$

但 $\Sigma(a_\nu, b_\nu)$ 是不相重疊的有限個區間 (a_ν, b_ν). (a, b) 除一零集 E，在其它各點 x，$\omega'(x)$ 存在，且

$$\varphi'(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi'(x), \quad (x \in E).$$

假如 x 不屬於 E，那末

$$\omega'(x) = \psi'(x) - \varphi'(x) \geqslant f(x) - f(x) = 0.$$

對於這種 x，有如下的 x'：

$$\omega(x') - \omega(x) > -\varepsilon(x' - x), \quad x' > x. \tag{2}$$

這就是說在 E 的餘集 $C(E)$ 中各點 x，有區間 (x, x') 適合(2)。由謝爾兵司基的測度定理，$\{(x, x')\}$ 中有不相重疊的有限個區間 $(x_k, x'_k)(k = 1, 2, \cdots, N)$ 適合

$$(x'_1 - x_1) + (x'_2 - x_2) + \cdots + (x'_N - x_N) > b - a - \delta.$$

點集 $[a, b] - \Sigma(x_k, x'_k)$ 也從有限個區間 $(a_\nu, b_\nu)(\nu = 1, 2, \cdots l)$ 所構成，它的測度小於 δ. 由(1)與(2)得

$$\omega(b) - \omega(a) > -\varepsilon - \varepsilon(b - a - \delta).$$

令 $\varepsilon \to 0$, 就得着 $\omega(b) \geqslant \omega(a)$. 同理當 $a < c < d < b$ 時, $\omega(d) > \omega(c)$. 定理證畢.

設 $f(x)$ 的定義區是 $[a, b]$. 固定 $[a, b]$ 中的一點 x. 記 $f(x)$ 之益積函數 $\psi(x)$ 的下界爲 $\Psi(x)$, 損積函數 $\varphi(x)$ 的上界爲 $\Phi(x)$. 稱 $\Psi(x)$ 爲 $f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ 的彼隆的上積分, $\Phi(x)$ 爲彼隆的下積分. 寫着

$$\Psi(x) = (p)\overline{\int_a^x} f(t)dt, \quad \Phi(x) = (p)\underline{\int_a^x} f(t)dt.$$

從定理 1 知道 $\Psi(x) \geqslant \Phi(x)$. 假如 $\Psi(b) = \Phi(b)$, 稱 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 具有彼隆積分

$$(P)\int_a^b f(x)dx = \Psi(b) = \Phi(b).$$

此時對於 $\varepsilon > 0$, 有益積函數 $\psi(x)$ 和損積函數 $\varphi(x)$ 適合

$$\psi(b) - \varphi(b) \leqslant \Psi(b) - \Phi(b) + \varepsilon = \varepsilon.$$

從定理 1, $\omega(x) \leqslant \psi(b) - \varphi(b) \leqslant \varepsilon$. 另一方面,

$$\Psi(x) - \Psi(x) \leqslant \psi(x) - \varphi(x) = \omega(x) \leqslant \omega(b).$$

所以 $\Psi(x) - \Phi(x) \leqslant \varepsilon$. 因之 $\Psi(x) = \Phi(x)$. 這就是說: 當

$$(P)\int_a^b f(x)dx$$

存在時,

$$\int_a^x f(t)dt \quad (a \leqslant x < b)$$

也存在. 此時, 兩函數

$$\psi(x) - (P)\int_a^x f(t)dt \text{ 與 } (P)\int_a^x f(t)dt - \varphi(x)$$

都是單調增加. 爲什麼呢? 設 $a \leqslant x' < x \leqslant b$, 取 $f(x)$ 之一損積函數 $\varphi_1(x)$ 使它適合

$$\varphi_1(x) > (P)\int_a^x f(t)dt - \varepsilon.$$

由定理 1, $\psi(x') - \varphi(x) \leqslant \psi(x) - \varphi(x)$. 因此,

$$\psi(x') - \varphi_1(x') \leqslant \psi(x) - (P)\int_a^x f(t)dt + \varepsilon.$$

所以

$$\psi(x') - (P)\int_a^x f(t)dt \leqslant \psi(x) - (P)\int_a^x f(t)dt + \varepsilon.$$

令 $\varepsilon \to 0$ 知 $\psi(x) - \Psi(x)$ 是一單調增加函數，同樣可證 $\Phi(x) - \varphi(x)$ 的單調增加性．

定理 3. 假如 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的彼隆積分存在，那末

$$\frac{d}{dx}\left[(P)\int_a^x f(t)dt\right] = f(x)$$

在 $[a, b]$ 上幾乎處處成立．

證明 對於正整數 n，必有益積函數 $\psi_n(x)$ 適合

$$\psi_n(b) - (P)\int_a^b f(x)dx < \frac{1}{n},$$

所以

$$\psi_n(x) - (P)\int_a^x f(t)dt < \frac{1}{n},\ a \leqslant x \leqslant b.$$

事實上，上式左邊是 x 的增加函數．由是 $\psi_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 勻斂於

$$(P)\int_a^x f(t)dt.$$

同樣，對於 $f(x)$ 必有它的損積函數列 $\varphi_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 勻斂於 $f(x)$ 的彼隆積分函數．$[a, b]$ 中有零集 K，當 x 不屬於 K 時，

$$\varphi_n'(x),\ \psi_n'(x)\ (n = 1, 2, \cdots)$$

都存在．設 $x' < x''$．那末

$$\varphi_n(x'') - \varphi_n(x') \leqslant (P)\int_a^{x''} f(t)dt - (P)\int_a^{x'} f(t)dt \leqslant$$
$$\leqslant \psi_n(x'') - \psi_n(x').$$

對於一切正整數 n 成立，設 $x \bar{\in} K$，於上式置 $x' = x$，乘以 $\frac{1}{x'' - x}$，令 $x'' \to x$，得着

$$\varphi_n'(x) \leqslant D_+\left[(P)\int_a^x f(t)dt\right] \leqslant$$
$$\leqslant D^+\left[(P)\int_a^x f(t)dt\right] \leqslant \psi_n'(x). \qquad (1)$$

又於上式，置 $x''=x$，乘以 $\frac{1}{x-x'}$，令 $x'\to x$，那末得到

$$\varphi_n'(x)\leqslant D_-\left[(P)\int_a^x f(t)dt\right]\leqslant$$
$$\leqslant D^-\left[(P)\int_a^x f(t)dt\right]\leqslant \psi_n'(x). \qquad (2)$$

由是，四個函數 $D^\pm_\pm\left[(P)\int_a^x f(t)dt\right]$ 都是幾乎處處取有限值．利用導數定理，知道

$$\frac{d}{dx}\left[(P)\int_a^x f(t)dt\right]$$

幾乎處處存在．因此，$[a,b]$ 中有零集 K_0，當 x 不屬於 K_0 時，上記的導數存在．

設 $\varepsilon>0$，適合

$$\psi_n'(x)-\varphi_n'(x)\geqslant\varepsilon,\ x\bar{\in}K+K_0$$

的一切點 x，成一點集 E_n，那末 $|E_n|\to 0$．假如不然，必有正數 δ 和正整數列 $n_j(j=1,2,\cdots)$ 適合

$$|E_{n_j}|\geqslant\delta \quad (j=1,2,\cdots).$$

單調增加函數 $\omega_{n_j}=\psi_{n_j}-\varphi_{n_j}$，在 E_{n_j} 中任意一點 x，

$$\omega_{n_j}'(x)\geqslant\varepsilon,$$

所以有 x' 適合於 $\omega_{n_j}(x')-\omega_{n_j}(x)\geqslant\frac{1}{2}\varepsilon(x'-x)>0$，由謝爾兵司基的測度定理，有如下的不相重疊之有限個區間

$$(x_k,x_k')\quad(k=1,2,\cdots,N),$$
$$\sum_1^N(x_k'-x_k)\geqslant\frac{1}{2}\delta,\ \omega_{n_j}(x_k')-\omega_{n_j}(x_k)\geqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

由是

$$\sum_{k=1}^N[\omega_{n_j}(x_k')-\omega_{n_j}(x_k)]\geqslant\frac{\varepsilon\delta}{4}.$$

從 $\omega_{n_j}(-b)=\omega_{n_j}(b)-\omega_{n_j}(a)\geqslant\sum_1^N[\omega_{n_j}(x_k')-\omega_{n_j}(x_k)]$

知道

$$\omega_{n_j}(b)=\psi_{n_j}(b)-\varphi_{n_j}(b)\geqslant\frac{\varepsilon\delta}{4}.$$

當 $j\to\infty$ 時,左邊為 0. 這是不合理的,所以 $|E_n|\to 0$.

由益積函數和損積函數的定義,除一零集 K_1 中的點 x 而外,

$$\varphi_n'(x)<f(x)\leqslant\psi_n'(x)\quad(n=1,2,\cdots).\tag{3}$$

由(1),(2),(3),當 $x\bar{\in}K+K_0+K_1+E_n$ 時,

$$\left|\frac{d}{dx}\left[(P)\int_a^x f(t)dt\right]-f(x)\right|<\varepsilon.$$

由於 $|E_n|\to 0$, 所以上式幾乎處處成立. 又因 ε 的任意性,知

$$\frac{d}{dx}\left[(P)\int_a^x f(t)dt\right]=f(x)$$

在$[a,b]$上幾乎處處成立.

定理 4. 彼隆積分與勒貝格積分等價. 這就是說:兩積分

$$(P)\int_a^b f(x)dx \text{ 與 } (L)\int_a^b f(x)dx$$

中有一個存在,還有一個也存在,並且兩者相等.

證明 設 $(L)\int f(x)dx$ 存在,那末全連續函數

$$(L)\int_a^x f(t)dt\equiv\psi(x)=\varphi(x)$$

是 $f(x)$ 的益積函數, 也是 $f(x)$ 的損積函數. 所以 $f(x)$ 的彼隆積分存在,且得

$$(L)\int_a^x f(t)dt=(P)\int_a^x f(t)dt.$$

假如 $f(x)$ 是一有界函數,那末有連續函數 $g(x)$ 和 $h(x)$ 適合

$$h(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x),\quad(a\leqslant x\leqslant b).$$

由是得着 $f(x)$ 的益積函數 $\psi(x)$ 和損積函數 $\varphi(x)$:

$$\psi(x)=\int_a^x g(t)dt,\quad \varphi(t)=\int_a^x h(t)dt.$$

假如彼隆積分 $(P)\int f(x)dx$ 存在, 設 $S(x)=(P)\int_a^x f(t)dt$,

$a \leqslant x \leqslant x' \leqslant b$, 那末

$$\varphi(x') - \varphi(x) \leqslant S(x') - S(x) \leqslant \psi(x') - \psi(x).$$

設(x_k, x'_k) $(k=1, 2, \cdots)$是$[a, b]$中不相重疊的有限個區間，那末

$$\Sigma[\varphi(x'_k) - \varphi(x_k)] \leqslant \Sigma[S(x'_k) - S(x_k)] \leqslant$$
$$\leqslant \Sigma[\psi(x'_k) - \psi(x_k)].$$

因 $\psi(x)$, $\varphi(x)$都是全連續函數，所以當 $\Sigma(x'_k - x_k) \to 0$ 時，從上式得

$$\lim \Sigma [S(x'_k) - S(x_k)] = 0.$$

由是$S(x)$是一全連續函數．由 §8 的定理3，它是一勒貝格不定積分．又從

$$S'(x) = f(x),$$

知道

$$(P)\int_a^x f(t)dt = S(x) = (L)\int_a^x S'(t)dt = (L)\int_a^x f(t)dt.$$

現在對於無界函數 $f(x)$, 要證明彼隆積分

$$(P)\int_a^b f(x)dx$$

的存在含有函數

$$S(x) = (P)\int_a^x f(t)dt$$

的全連續性．假如 $S(x)$不是全連續，那末應該有不相重疊的有限個區間

$$\Delta_n = \{(x_k^{(n)}, x_k'^{(n)})\}$$

的系統：當 $|\Delta_n| \to 0$時，$\lim\limits_{n\to 0} \sum\limits_k \{S(x_k'^{(n)}) - S(x_k^{(n)})\} = \sigma \neq 0$.

不妨假設 σ 是一正數．取 $f(x)$之一如下的損積函數 $\varphi(x)$:

$$S(b) - \varphi(b) < \frac{\sigma}{2}.$$

從 $F(x) = S(x) - \varphi(x)$的增加性，得着

$$\Sigma\{F(x_k'^{(n)}) - F(x_k^{(n)})\} \leqslant F(b) - F(a) = F(b).$$

這就是

$$\Sigma\{S(x_k'^{(n)}) - S(x_k^{(n)})\} - \Sigma\{\varphi(x_k'^{(n)}) - \varphi(x_k^{(n)})\} \leqslant$$

$$\leqslant S(b) - \varphi(b) < \frac{\sigma}{2}.$$

因此，

$$\overline{\lim_{n\to 0}} \sum_k \{\varphi(x_k'^{(n)}) - \varphi(x_k^{(n)})\} \geqslant \sigma - \frac{\sigma}{2} = \frac{\sigma}{2}.$$

這是不可能的，因爲 $\varphi(x)$ 是一上半全連續函數．定理證畢．

最後，我們從彼隆積分的看法來研討黎曼積分．

設 $f(x)(a \leqslant x \leqslant b)$ 是一有界函數；U 和 L 是 f 的盈積函數和損積函數的全體．從 U, L 取出適當之子集 U^*, L^*，可使

$$(R)\overline{\int_a^b} f(x)dx = \Psi^*(x) = \underset{\psi\in U^*}{\text{下界}}\, \psi(x),$$

$$(R)\underline{\int_a^b} f(x)dx = \Phi^*(x) = \underset{\varphi\in L^*}{\text{上界}}\, \varphi(x).$$

事實上，下面的 U^*, L^* 就適合這些關係：

U^* 中的函數 $\psi(x)$ 是用下面三個條件決定的：

(一) $\psi(x)$ 是一連續函數，$\psi(a) = 0$，

(二) $D_+\psi(x) \geqslant f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$，

(三) 在 $[a, b]$ 上，$D_+\psi(x)$ 幾乎處處具有上半連續性．

L^* 中的函數 $\varphi(x)$ 是用下面三個條件決定的：

(i) $\varphi(x)$ 是一連續函數，$\varphi(a) = 0$，

(ii) $D^-\varphi(x) \leqslant f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$；

(iii) 在 $[a, b]$ 上 $D^-\varphi(x)$ 幾乎處處具有下半連續性．

適合(一)和(二)的 $\psi(x)$，是一下半全連續函數；適合(i)和(ii)的 $\varphi(x)$，是一上半全連續函數．爲什麽呢？假如

$$m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

置 $\Delta = \Sigma(a_\nu, b_\nu)$，令 $|\Delta| \to 0$．則當 $D_+\psi(x) \geqslant f(x)$ 時，從

$$\frac{\psi(b_\nu) - \psi(a_\nu)}{b_\nu - a_\nu} \geqslant m,$$

得着 $\underline{\lim}\,[\psi(b_\nu) - \psi(a_\nu)] \geqslant 0$．又當 $D^-\varphi(x) \leqslant f(x)$ 時，從

$$\frac{\varphi(b_\nu)-\varphi(a_\nu)}{b_\nu-a_\nu}\leqslant M,$$

得到 $\overline{\lim}\,\Sigma[\varphi(b_\nu)-\varphi(a_\nu)]\leqslant 0$.

一切半絕對連續函數幾乎處處可以微分,所以

$$\varphi'(x)\leqslant f(x)\leqslant \psi'(x)$$

幾乎處處成立. 所以滿足(一),(二)的 $\psi(x)$ 屬於 U, 滿足(i),(ii)的 $\varphi(x)$ 屬於 L.

設 $\psi\in U^*$, $\psi(x)$ 的下界是 $\Psi^*(x)$; $\varphi\in L^*$, $\varphi(x)$ 的上界是 $\Phi^*(x)$. 當 $\Psi^*(x)=\Phi^*(x)\equiv S^*(x)$ 時,稱 $S^*(x)$ 爲 $f(x)$ 在 $[a,x]$ 上彼隆的狹義積分,用下面的記號表示它:

$$S^*(x)=(P^*)\int_a^x f(t)dt.$$

定理 5. 設 $f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ 是一有界函數, 那末兩積分

$$(R)\int_a^x f(t)dt \quad 與 \quad (P^*)\int_a^x f(t)dt$$

中有一個存在的話,兩個都存在,且兩者相等.

證明 假如 $S^*(b)$ 存在,那末 U^*, L^* 各有函數列

$$\psi_n(x),\ \varphi_n(x),\ (x=1,2,\cdots)$$

匀斂於 $S^*(x)$. $[a,b]$ 除一零集 E_0 中的點 x 而外, $D_+\psi_n(x)$ 和 $D^-\varphi_n(x)$ 都是半連續,並且

$$\varphi_n'(x)\leqslant S^{*\prime}(x)\leqslant \psi_n'(x)\ \ (x=1,2,3,\cdots).$$

設 $\varepsilon>0$, 適合

$$\psi_n'(x)-\varphi_n'(x)\geqslant\varepsilon,\ x\in E$$

的 x 之全體爲 E_n. 從定理 2 的證明, 知道 $|E_n|\to 0$. 設 x 不屬於 E_0+E_n, 則由 $D_+\psi_n(x)$ 和 $D^-\varphi_n(x)$ 的半連續性, 必有如下的正數 $\delta=\delta(x)$, 當 $|x'-x|<\delta$ 時,

$$D_+\psi_n(x')<\psi_n'(x)+\frac{1}{n},\quad D^-\varphi_n(x')>\varphi_n'(x)-\frac{1}{n}.$$

由假設, $D^-\varphi_n\leqslant f\leqslant D_+\psi_n$; 所以當 $x\notin E_0+E_n$, $|x'-x|<\delta$

時,

$$|f(x')-f(x)|<\left(\psi_n'(x)+\frac{1}{n}\right)-\left(\varphi_n'(x)-\frac{1}{n}\right)<\varepsilon+\frac{2}{n}.$$

對於 $\eta>0$, $[a, b]$ 中有子集 E, $|E|>b-a-\eta$, 取 n 甚大使 $(E_0+E_n)\cdot E=0$. 那末當 $x\in E$, $|x'-x|<\delta$ 時,

$$|f(x')-f(x)|<\varepsilon+\frac{2}{n}<2\varepsilon(n>n_0).$$

因此 E 中的一切點 x 都是 f 的連續點. 由於 η 可以任意小,所以 $f(x)$ 的不連續點的全體, 是一零集. 由是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的黎曼積分是存在的, 當然勒貝格積分 $\int f,dx$ 也存在. 由定理 4,

$$(P^*)\int_a^b f(x)dx=(R)\int_a^b f(x)dx.$$

次設 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的黎曼積分存在, E 是 $f(x)$ 之不連續的全部,那末 $|E|=0$. 我們拓廣函數 f 的定義於 $[a, b]$ 的外部:

$$f(x)=f(a)\ (x<a),\ f(x)=f(b)\ (x>b).$$

對於 $\delta>0$,有如下的開集 $O=\Sigma(a_\nu, b_\nu)\supset E$, $|O|<\delta$. 設 A 大於 f 的上界, B 小於 f 的下界. 作如下的連續函數 $h(x)$ 和 $g(x)$:

$$h(x)=g(x)=f(x)\ (x\bar{\in}O),$$

$$h(x)=B,\ g(x)=A,\ (a_\nu+\varepsilon_\nu<x<b_\nu-\varepsilon_\nu).$$

取 ε_ν 很小,可使 $h(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$. 置

$$\psi(x)=\int_a^x g(t)dt,\quad \varphi(x)=\int_a^x h(t)dt,$$

那末, $\psi'(x)\geqslant f(x)$, $\varphi'(x)\leqslant f(x)$. 由是 $\psi\in U^*$. $\varphi\in L^*$, 由於

$$\psi(x)-\varphi(x)=\int_a^x[g(t)-h(t)]dt\leqslant|O|(A-B)<$$
$$<\delta(A-B),$$

並且 δ 可以很小,所以狹義的彼隆積分

$$(P^*)\int_a^b f(x)dx$$

存在. 定理證畢.

第八章　第二部分的習題

1. 證明：當黎曼積分 $\int_a^b f(x)dx$ 存在時，

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b |f(x+h)-f(x)|dx=0.$$

但設 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 的外部等於 0.

2. 設 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 中不連續點的全體成一零集，則當正整數 $n\to\infty$ 時，

$$\frac{\pi}{2}\int_0^{2\pi} f(x)\,|\sin nx|\,dx \text{ 和 } \frac{\pi}{2}\int_0^{2\pi} f(x)\,|\cos nx|\,dx$$

都收斂於

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx.$$

3. 設 $f(x)\in L(a, b)$，證明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_a^b [nf(x)]dx=\int_a^b f(x)dx,$$

但 $[X]$ 表示最近於 X 的整數.

4. 設 $f(x)$ 是在 $[a, b]$ 上依照黎曼的方法可以積分，$\alpha(x)$ 是一絕對連續函數，證明

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x)=\int_a^b f(x)\alpha'(x)dx.$$

5. 設在區間 $[a, b]$ 上，$f(x)$ 和 $\alpha(x)$ 都是有界變差，則當此兩函數沒有共通的不連續點時，斯帝捷積分 $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$ 存在.

6. 在區間 $[a, b]$ 上，$f(x)$ 是一連續函數，$\alpha(x)$ 是一常增函數，證明

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x)=\int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} f(\beta(y))dy,$$

但

$$\beta(y)=\max_{\alpha(x)\leqslant y} x.$$

第 九 章

直交函數級數

1. 三角級數是一直交函數級數 設 $[a, b]$ 是一有限區間；$\phi_1(x), \phi_2(x), \cdots$ 是一如下的函數列：

$$\int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x)dx = 0 \ (n \neq m)$$

稱這樣的函數列爲 $[a,b]$ 上之一直交函數列,或是直交函數系*.例如

$$\frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \cdots \tag{1}$$

是 $[0, 2\pi]$ 上的一個直交函數系. 假如直交函數列 $\{\phi_n(x)\}$ 滿足方程

$$\int_a^b [\phi_n(x)]^2 dx = 1,\ n = 1, 2, \cdots,$$

那末稱 $\{\phi_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上是一就範直交函數系. 當 $c_1, c_2, \cdots$ 是一實數數列時,稱 $\Sigma c_n\phi_n(x)$ 是一直交函數級數. 因此,三角級數

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

——a_n 和 b_n 都是常數——在 $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ 上是一直交函數級數.

設 $f(x)$ 是這樣的一個可測函數:它與就範的直交函數系 $\{\phi_n\}$ 中任一函數 $\phi_n(x)$ 的乘積都屬於 $L(a, b)$,就是說勒貝格積分

$$c_n = \int_a^b f(x)\phi_n(x)dx,\ n = 1, 2, \cdots$$

都存在,那末稱 $\Sigma c_n\phi_n(x)$ 是 $f(x)$ 關於 $\{\phi_n(x)\}$ 的富理埃(Fourier)級數, c_n 是 $f(x)$ 的富理埃系數,簡記此事爲

$$f(x) \sim c_2\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + \cdots.$$

特別當 $f(x) \in L(0, 2\pi)$ 時,寫

* 廣義的直交函數系,見第十章 §1.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

的話

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{2}$$

事實上，以 $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ 乘(1)的一切函數之後，(1)就成爲就範的函數列.

假如 $\phi_1(x), \phi_2(x), \cdots$ 是$[a, b]$上之一直交函數系，我們能否添入一個函數 $\psi(x)$，使 $\psi(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots$ 成一個更完備的直交系統呢? 但$\int_a^b |\psi(x)|\,dx > 0$. 假如不存在這樣 $\psi(x)$，那末我們就說$\{\phi_n(x)\}$是一個完備的直交函數系. 一般地說：設$[f(x)]$是$[a, b]$上所定義之一函數族，假如除全等於 0 的函數而外，沒有可積函數 $\psi(x)$使等式

$$\int_a^b \psi(x)f(x)dx = 0$$

對於 $(f(x))$ 中任一 $f(x)$ 成立，那末說 $(f(x))$ 是完備的*. 當 $f(x) \sim \Sigma c_n\varphi_n(x)$時，假如等式

$$\int_a^b f(x)^2 dx = \sum_1^{\infty} c_n^2 \tag{3}$$

成立，那末說 $\{\varphi_n\}$ 對於 $f(x)$ 是完備的.

定理 1. 設 $(f(x))$ 在 $[a, b]$ 中是一具有完備性的函數族，$\{\varphi_n\}$ 是一 $[a, b]$ 中之一就範的直交函數系，假如$\{\varphi_n\}$對於$(f(x))$中任一 $f(x)$ 是完備的，那末，$\{\varphi_n\}$自身具有完備性.

證明 假如$\{\varphi_n\}$還沒有完備，那末必有如下的 $\psi(x)$：

$$\int_a^b \psi(x)^2 dx = 1,\quad \int_a^b \psi(x)\varphi_n(x)dx = 0\ (n = 1, 2, \cdots).$$

設 $f(x) \in (f(x))$，則得

$$0 \leqslant \int_a^b [f(x) - c\psi(x) - c_1\varphi_1(x) - \cdots - c_n\varphi_n(x)]^2 dx =$$

---

* 參閱陳建功著：直交函數級的和(1954)21—30.

$$= \int_a^b f(x)^2 dx - c^2 - \sum_1^n c_\nu^2,$$

但

$$c = \int_a^b f(x)\psi(x)dx.$$

令 $n \to \infty$，則由(3)，知 $c = 0$. 由 $(f(x))$ 的完備性，這種 $\psi(x)$ 是不存在的. 定理證畢.

我們要證(1)在 $[0, 2\pi]$ 中成一完備系統，為此首先建立(2)的分項積分的定理.

定理 2. 富理埃三角級數(2)可以施行分項積分而得一勻斂的(關於 a 和 b)級數:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}a_0(b-a) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b (a_n \cos nx + b_n \sin \sin nx)dx.$$

證明 設 $f(x + 2\pi) = f(x)$ 對於任何 x 成立，置

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt - \frac{1}{2}a_0 x,$$

則 $F(x + 2\pi) \equiv F(x)$. 事實上

$$F(x + 2\pi) = \int_0^{x+2\pi} f(t)dt - \frac{1}{2}a_0(x + 2\pi)$$

$$= F(x) + \int_x^{x+2\pi} f(t)dt - \pi a_0 = F(x).$$

由是 $F(x)$ 是一具有週期 2π 的全連續函數，這種函數的富理埃(三角)級數勻斂於此函數(證明見下一節). 由是

$$F(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos nx + B_n \sin nx).$$

其中

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\Big[F(x)\frac{\sin nx}{n} -$$

$$- \frac{1}{n}\int_0^x \Big[f(t) - \frac{1}{2}a_0\Big]\sin nx\, dt\Big]_0^{2\pi} = -\frac{b_n}{n},$$

$$B_n = \frac{a_n}{n}.$$

所以從

$$\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{2}a_0x + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (a_n \cos nt + b_n \sin nt)dt.$$

得到定理中的等式，定理證畢．

系　假如 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的富理埃級數相同，那末 $f(x) \doteq g(x)$.

證明　等式

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$$

對於任何 a 和 b 成立．設 $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$,

$$A = (f(x) \geqslant g(x)),\ B = (f(x) < g(x)).$$

設 O 是包含 A 的一個開集，則

$$\int_O [f(x) - g(x)]dx = 0,$$

由於 $\int_O = \int_A + \int_{O-A}$；當 $|O - A| \to 0$ 時，$\int_{O-A} \to 0$．所以

$$\int_A [f(x) - g(x)]dx = 0.$$

因此，$f(x) \doteq g(x)$ 在 A 上成立．同樣 $f(x) \doteq g(x)$ 在 B 上成立．證明完畢．

定理 3.　三角函數系(1)在 $[0, 2\pi]$ 上是完備的．

證明　假如 $\psi(x)$ 的(三角)富理埃係數都是 0，那末它的富理埃級數就是 $f(x) \equiv 0$ 的富理埃級數，從定理 2，$\psi(x) \doteq 0$．證明完畢．

下述定理，通稱爲黎斯 (F. Riesz) 和菲蕭 (E. Fisher) 的定理．

定理 4.　設 $\phi_1(x), \phi_2(x), \cdots$ 在 $[a, b]$ 上是一就範的直交函數系，假如 Σc_n^2 收斂，那末必有函數 $g(x)$ 如下：

$$g(x) \sim c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + \cdots,\ \int_a^b g(x)^2dx = \sum_1^{\infty} c_n^2.$$

證明 對於正整數 n，必有如下的 m_n：

$$\sum_{\nu=m_n}^{\infty} c_\nu^2 = \int_a^b [c_{m_n}\phi_{m_n}(x)+c_{m_n+1}\phi_{m_n+1}(x)+\cdots]^2 dx < \frac{1}{n^4}.$$

置 $S_n(x) = c_1\phi_1(x) + \cdots + c_n\phi_n(x)$，則當 $a \leqslant x \leqslant b$ 時，由薛瓦茲不等式，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x |S_{m_{n+1}}(t) - S_{m_n}(t)|\,dt < \sum_1^{\infty}\sqrt{(b-a)n^{-4}} < \infty.$$

由富弼尼的定理 $\Sigma|S_{m_{n+1}}(x)-S_{m_n}(x)|$ 概收斂．因此，$\{S_{m_n}(x)\}$ 概收斂於一函數 $g(x)$．由法都的引理，

$$\int_a^b [g(x) - S_k(x)]^2 dx \leqslant \lim_{n\to\infty}\int_a^b [S_k(x) - S_{m_n}(x)]^2 dx.$$

右邊等於 $\sum_{k+1}^{\infty} c_\nu^2$．由是

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b [g(x) - S_k(x)]^2 dx = 0.$$

上式左方的積分等於

$$\sum_1^k (c_\nu - \gamma_\nu)^2 + \int_a^b [g(x) - \sum_1^k \gamma_\nu\varphi_\nu(x)]^2 dx,$$

但 $\gamma_\nu = \int_a^b \varphi_\nu(x)g(x)dx$．從

$$0 \leqslant \int_a^b g(x)^2 dx - \sum_1^n \gamma_\nu^2 \leqslant \int_a^b g(x)^2 dx +$$

$$+\sum_1^n c_\nu^2 - 2\sum_1^n c_\nu\gamma_\nu \to 0$$

得到

$$\sum_1^{\infty}\gamma_\nu^2 \leqslant \int_a^b g(x)^2 dx \leqslant \int_a^b g(x)^2 dx +$$

$$+\sum_1^{\infty}(c_\nu - \gamma_\nu)^2 \leqslant \sum_1^{\infty}\gamma_\nu^2.$$

所以 $c_\nu = \gamma_\nu$，並且

$$\int_a^b g(x)^2 dx = \sum_1^\infty c_n^2.$$

定理證畢.

從定理 4, 我們可以導出派色伐耳(Parseval)公式:

定理 5. 若 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上是一就範的完備直交函數系,則當

$$f(x) \sim \sum_1^\infty c_n \varphi_n(x), \quad f(x)^2 \in L(a, b)$$

時,

$$\int_a^b f(x)^2 dx = \sum_1^\infty c_n^2.$$

證明 由於

$$\sum_1^n c_n^2 \leqslant \int_a^b f(x)^2 dx,$$

所以 Σc_n^2 收斂. 由黎斯和菲蕭的定理,有 $g(x) \sim \Sigma c_n \varphi_n(x)$ 並且

$$\int_a^b [g(x)]^2 = \sum_1^\infty c_n^2.$$

由於 $\{\varphi_n\}$ 的完備性,從

$$\int_a^b [f(x) - g(x)] \varphi_n(x) dx = 0, \quad n = 1, 2, \cdots$$

得到 $f(x) \doteq g(x)$. 定理證畢.

從定理 3 與定理 5 得到下面的

定理 6. 設 $f(x)$ 和 $f(x)^2$ 都屬於 $L(0, 2\pi)$, 則當

$$f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

時,派色伐耳等式

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx = \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^\infty (a_n^2 + b_n^2)$$

成立*.

系 設 $f_j(x)\sim\frac{1}{2}a_0^{(j)}+\sum_1^{\infty}(a_n^{(j)}\cos nx+b_n^{(j)}\sin nx)$ 則當

$f_j^2\in L(0,2\pi)\quad(j=1,2)$ 時,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f_1(x)f_2(x)dx=\frac{1}{2}a_0^{(1)}a_0^{(2)}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^{(1)}a_n^{(2)}+b_n^{(1)}b_n^{(2)}).$$

證明 我們不妨就一般的具有完備性的就範直交系 $\{\varphi_n\}$ 來證明.

若 $f_j(x)\sim\sum c_n^{(j)}\varphi_n(x)$, $f_j^2\in L(a,b)$, 則置

$$S_n(x)=\sum_1^n c_\nu^{(1)}\varphi_\nu(x)$$

的話,從

$$\left[\int_a^b f_2(x)(f_1(x)-S_n(x))dx\right]^2\leqslant$$
$$\leqslant\int_a^b f_2(x)^2dx\int_a^b(f_1(x)-S_n(x))^2dx$$

和

$$\int_a^b f_1(x)^2dx=\sum_1^{\infty}[c_n^{(1)}]^2,$$

就得到

$$\int_a^b f_2(x)f_1(x)dx=\sum_1^{\infty}c_n^{(1)}c_n^{(2)}.$$

對於直交系統(1)而言,就獲得系中的公式. 證明完畢.

現在建立幾個簡單的完備性判別法於下.

定理 7. 假如直交函數系 $\{\varphi_n(x)\}(a\leqslant x\leqslant b)$ 對於 $\cos\alpha x$ 和 $\cos\beta x$——α 和 β 是任意的實數——是完備的那末它自身是一個完備系統.

證明 由於(1)在$[0,2\pi]$成一完備系統.經過變換 $t=\frac{x-a}{b-a}2\pi$

---

* 派色伐耳原來的證明在 1806 年,自然不免有許多理論上的限制. 當 $f(x)$是一黎曼可積函數時,公式的建立是由於虎爾維茲 (A. Hurwitz) 代賴布三 (de la Vallée-Poussin)以及利亞布諾夫. 最初建立定理 6 的是法都 (P. Fatou),時在 1906 年.

$[a, b]$變成$[0, 2\pi]$，而 $\sin nt$ 和 $\cos nt$ 取得如下的形式：

$$\cos(Ax + B) \text{ 或 } \sin(Cx + D)$$

由是定理 7 的證明，通過下述引理和定理 1，就能完成．

引理　設就範的直交系統$\{\varphi_n(x)\}(a \leqslant x \leqslant b)$對於$f(x)$和$g(x)$都具有完備性，那末它對於$f(x) + g(x)$也是完備的．

證明　設 $f(x) \sim \Sigma c_n\varphi_n(x)$，$g(x) \sim \Sigma d_n\varphi_n(x)$，則

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx = \Sigma c_n^2, \quad \int_a^b |g(x)|^2 dx = \Sigma d_n^2.$$

因之

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \Sigma c_n d_n.$$

由是得到

$$\int_a^b (f(x) + g(x))^2 dx = \sum_1^\infty (c_n + d_n)^2.$$

引理證畢．從而定理 7 證畢．

從函數列(1)在$[0, 2\pi]$中的完備性，我們可以導出函數列

$$1, \cos t, \cos 2t, \cdots \tag{4}$$

在$[0, \pi]$的完備性．事實上，當 $f(t) \in L(0, \pi)$和$f(t)^2 \in L(0, \pi)$時，置

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos nt\, dt, \ n = 0, 1, \cdots,$$

的話

$$f(t) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_1^\infty a_n \cos nt.$$

我們假設 $f(-t) = f(t)$ $(-\pi \leqslant t < 0)$，那末

$$f(t) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_1^\infty (a_n \cos nt + 0 \sin nt).$$

因此

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_1^\infty a_n^2.$$

即

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)^2 dt = \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_1^{\infty} a_n^2.$$

這就是說，函數系 (4) 對於任一如上的 $f(t)$ 是完備的，所以它成一完備系統．從這件事實，我們就能導出函數列 $1, x, x^2, \cdots$ 在 $[-1, 1]$中的完備性．設 $\cos t = x$，則 x 的多項式

$$\cos nt = T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \cdots \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

的敍列在 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 中成一完備系統．因此

$$x^n = \gamma_0^{(n)}T_0(x) + \gamma_1^{(n)}T_1(x) + \cdots + \gamma_n^{(n)}T_n(x) \quad (\gamma_n \neq 0)$$

$(\gamma_0^{(n)}, \gamma_1^{(n)}, \cdots, \gamma_n^{(n)}$ 都是常數, $n = 0, 1, 2, \cdots)$

在$[-1, 1]$中成一完備系統．事實上，當

$$c_n = \int_{-1}^{1} \frac{\psi(x)T_\nu(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

時，從

$$\int_{-1}^{+1} \frac{x^n\psi(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

得到 $c_0 = c_1 = \cdots = 0$．因此 $\psi(x) \equiv 0$．

經過一次變換，$[-1, 1]$可變爲$[a, b]$．由是獲得

定理 8. 假如就範的直交函數系 $\{\varphi_n\}$ 對於 $x^n (n = 0, 1, \cdots)$ 具有完備性那末 $\{\varphi_n\}$ 是完備的．

系 1 假如 $\{\varphi_n(x)\}$對於 x 的一切多項式具有完備性，那末 $\{\varphi_n(x)\}$ 是一完備系統*．

系 2 設 $F(x) \in L(a, b)$，$F(x)^2 \in L(a, b)$，則當

$$\int_a^b F(x)x^n dx = 0,\ n = 0, 1, 2, \cdots$$

時，$F(x) \doteq 0$．†

2. 黎曼-勒貝格的定理及其應用

---

* 這是斯捷克洛夫(Стеклов)的定理．

† 這是樸西(Lerch)的定理．

定理 1. （黎曼-勒貝格的定理） 設 $f(x) \in L(a,b)$ 則當 $\lambda \to \infty$ 時

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{\alpha}{\beta}(\lambda) = \int_a^b f(x) \genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos} \lambda x \, dx \to 0.$$

證明 由

$$x = \frac{(b-a)t + \pi(b+a)}{2\pi},$$

區間 $a \leqslant x \leqslant b$ 變爲 $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$. 所以當證明時，不妨將 (a, b) 看成 $(-\pi, \pi)$，那末

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{\alpha}{\beta}(\lambda) = -\int_{-\pi-\frac{\pi}{\lambda}}^{\pi-\frac{\pi}{\lambda}} f\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} \lambda x \, dx.$$

我們不妨假設 $f(x+2\pi) \equiv f(x)$. 由勒貝格積分的性質，當 $\lambda \to \infty$ 時，

$$\int_{\pi-\frac{\pi}{\lambda}}^{\pi} \left| f\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) \right| dx = \int_{\pi}^{\pi+\frac{\pi}{\lambda}} |f(x)| \, dx \to 0,$$

$$\int_{-\pi-\frac{\pi}{\lambda}}^{-\pi} \left| f\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) \right| dx = \int_{-\pi}^{-\pi+\frac{\pi}{\lambda}} |f(x)| \, dx \to 0.$$

由是，$2\alpha(\lambda)$ 和 $2\beta(\lambda)$ 的絕對值不大於

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| f\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) - f(x) \right| dx + o(1).$$

此積分當 $f(x)$ 在 $(-2\pi, 2\pi)$ 中是連續時，顯然趨近於 0. 但是我們知道（第八章第二部 §6 定理 8）：對於 $\varepsilon > 0$ 有連續函數 $\varphi(x)$ 適合

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} |f(x) - \varphi(x)| \, dx < \varepsilon.$$

因此，當 $\lambda \to \infty$ 時，$\alpha(\lambda)$ 和 $\beta(\lambda)$ 之絕對值的上限都不大於 ε. 令 $\varepsilon \to 0$，即得所要的結果．定理證畢．

利用定理 1 我們就能證明前節用過的定理：全連續函數的富

理埃級數匀斂於此函數.

定理 2. 設 $f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_1^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, $f(x+2\pi) = f(x)$, 則當 $f(x)$ 在 $(-2\pi, 2\pi)$ 是全連續時, 此級數匀斂於 $f(x)$.

證明 級數的開始 $n+1$ 項之和是

$$S_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_1^n (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2} + \cos(t-x) + \cdots + \cos n(t-x)\right] f(t)dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{2\sin\frac{t-x}{2}} dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} dt,$$

這是因爲被積函數是 t 的週期函數之故. 當 $f(t) \equiv 1$ 時, 積分之值全等於 1. 由是

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+t) - f(x)] \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} dt.$$

置

$$B(t) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}, g_x(t) = f(x+t) - f(x),$$

$$\lambda = n + \frac{1}{2}.$$

由定理 1 的證明

$$\left|\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_x(t)B(t)\sin\lambda t\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|g_x\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)B\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)-g_x(t)B(t)\right|dt+\rho_\lambda.$$

此地 ρ_λ，當 $\lambda\to\infty$ 時，匀斂於 0. 又當 $f(x)$ 在 $(-2\pi, 2\pi)$ 中具有連續性時，

$$g_x\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)B\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)-g_x(t)B(t)=$$

$$=\left[g_x\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)-g_x(t)\right]B\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)+$$

$$+\left[B\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)-B(t)\right]g_x(t)$$

也匀斂於 0. 因此

$$S_n(x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+t)-f(x)]\frac{\sin\lambda t}{t}dt+o(1)$$

均匀地成立. 寫 $\varphi(t)=\varphi_x(t)=f(x+t)+f(x-t)-2f(x)$，則得

$$S_n(x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi_x(t)\frac{\sin\lambda t}{t}dt+o(1).$$

假如 $f(x)$ 並不具有連續性，那末由於

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} g_x(t)B(t)\sin\lambda t\,dt=0,$$

上式仍然成立，但是不便說均匀地成立.

函數 $\varphi_x(t)$ 關於 t 是全連續的，那末必有單調增加的連續函數 $h_1(t)$ 和 $h_2(t)$ 適合於

$$\varphi_x(t)=h_1(t)-h_2(t),\ h_1(+o)=0,\ h_2(+o)=0.$$

對於正數 ε，存在着 δ，當 $0\leqslant t\leqslant\delta$ 時，$h_1(t)$ 和 $h_2(t)$ 都小於 ε. 由於我們可以選取 $h_1(t)+h_2(t)$ 使它等於 $\varphi_x(t)$ 的全變差函數. 這個函數，當 $t\to 0$ 時，匀斂於 0. 所以 δ 僅與 ε 有關係. 對於這

樣的 δ,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_\delta^\pi \frac{\varphi_x(t)}{t}\sin\lambda t\,dt = 0$$

均匀地成立. 而由第二平均值定理, 有如下的正數 δ_1 和 δ_2:

$$\left|\int_0^\delta \frac{\varphi_x(t)}{t}\sin\lambda t\right| \leqslant \left|\int_1^\delta h_1(\delta)\frac{\sin\lambda t}{t}dt + \right.$$

$$\left. + \int_{\delta_2}^\delta h_2(\delta)\frac{\sin\lambda t}{t}dt\right| < \varepsilon\cdot 2\max_{0<\alpha<\beta}\left|\int_\alpha^\beta \frac{\sin t}{t}dt\right| < \pi\varepsilon.$$

事實上, 當 $\alpha\geqslant\pi$ 時, 由第二平均值定理,

$$\left|2\int_\alpha^\beta \frac{\sin t}{t}dt\right| < \frac{2}{\pi}\left|\int_\alpha^\beta \sin t\,dt\right| < \pi$$

$0<\alpha<\pi$ 的話

$$2\int_\alpha^\beta \frac{\sin t}{t}dt < 2\int_0^\beta \frac{\sin t}{t}dt \leqslant 2\int_0^\pi \frac{\sin t}{t}dt < \pi^*.$$

由是, 當 $n > n_0 = n_0(\varepsilon)$時, 均匀地成立着

$$|S_n(x) - f(x)| < \varepsilon + o(1).$$

ε 是任意的, 所以 $\{S_n(x)\}$ 匀斂於 $f(x)$. 定理證畢.

從這個定理的證明, 我們可述下面的

系 1 設可積的週期函數 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 之環境中爲有界變差, 則

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x_0) = f(x_0).$$

這是若當(Jordan)的定理.

系 2 設 $f(x)\in L(0, 2\pi)$, 則當 $0<\varepsilon\leqslant\pi$ 時,

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\varepsilon \varphi_x(t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}dt + o(1).$$

---

* $\int_0^\pi \frac{\sin t}{t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin t}{t}dt + \int_0^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sin t}{\pi+t}dt < \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} < \frac{\pi}{2}.$

系 3 假如 $\varphi_x(t)t^{-1}\in L(0,\varepsilon)$ $(0<\varepsilon<\pi)$，那末

$$S_n(x)\to f(x).$$

這是定尼(Dini)的定理。

3. 三角級數的絕對收斂

下面是魯靜的定理.

定理 1. 設 E 是直線上之一點集；$|E|>0$ 當 $x\in E$ 時，三角級數(1)絕對收斂的話，級數

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)(-\infty<x<\infty) \qquad (1)$$

$$\Sigma(|a_n|+|b_n|)$$

必收斂．換句話說：在一正測度的點集上絕對收斂的三角級數，一定處處絕對收斂，處處絕對收斂和係數級數 $\Sigma(a_n+b_n)$ 的絕對收斂是同一件事.

證明 (1)的各項都是以 2π 爲週期的週期函數，所以點集

$$E_0=E[0,2\pi]$$

的測度大於 0．置

$$\rho_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2},\ a_n\cos nx+b_n\sin nx=\rho_n\cos(nx-\alpha_n).$$

不妨假設 $|E_0|<2\pi$．取如下的 θ：

$$\frac{2\pi-|E_0|}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}.$$

於積分 $\int_{E_0}|\cos(nx-\alpha_n)|\,dx=J_n$，置 $x=\frac{\alpha_n-\theta}{n}+t$，那末

$$J_n=\int_M|\cos(nt-\theta)|\,dt,\ |M|=|E_0|>0.$$

因 $\cos(nt-\theta)$ 是 t 的週期函數，週期等於 2π．所以不妨假設 M 落在 $[0,2\pi]$ 中．設 $\gamma=\left[2n-\frac{2\theta}{\pi}\right]$，那末

$$0<\frac{\pi}{n}<\frac{2\theta+\pi}{n}<\frac{2\pi}{n}<\frac{2\theta+2\pi}{n}<\frac{3\pi}{n}<\cdots<\frac{2\theta+\gamma\pi}{n}\leqq 2\pi.$$

假如 $\frac{\nu\pi}{n}<t<\frac{\nu\pi+2\theta}{n}$, 那末 $|nt-\nu\pi-\theta|<\theta$, 因之

$$|\cos(nt-\theta)|>\cos\theta.$$

在 $0<t<2\pi$ 中, 適合上式的 t, 其全體成一點集 S, S 的測度大於

$$\gamma\cdot\frac{2\theta}{n}=\left[2n-\frac{2\theta}{n}\right]\frac{2\theta}{n}>4\theta-\frac{4\theta}{n^2}-\frac{2\theta}{n}.$$

由是

$$J_n>\cos\theta\left\{|M|-\left(2\pi-4\theta+\frac{4\theta}{n^2}+\frac{2\theta}{n}\right)\right\}.$$

當 $n\geqslant N$ 時 $\{\ \}$ 中的數大於一個正數 p. 由於(1)在 E_0 上收斂,由愛戈洛夫的定理,不妨假設 $\Sigma\rho_n|\cos(nx-\alpha n)|$ 在 E_0 上均勻收斂. 因此

$$\sum_1^\infty\rho_n\int_{E_0}|\cos(nx-\alpha n)|\,dx=\sum_1^\infty\rho_nJ_n$$

是一收斂級數. 從

$$\sum_{n=N}^\infty\rho_nJ_n>p\cos\theta\Sigma\rho_n$$

知道 $\Sigma(a_n+b_n)$ 是一絕對收斂級數. 定理證畢.

設 $p>1$, 當 $f(x)$ 和 $[f(x)]^p$ 在 $[a,b]$ 上的勒貝克積分都存在的話,寫着

$$f(x)\in L^p(a,b).$$

設 $f_j(x)\in L^2(-\pi,\pi)$, $f_j(x+2\pi)=f_j(x)$ $(-\infty<x<\infty,\ j=1,2,\cdots)$ 那末

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_1(t)f_2(t+x)dt \tag{2}$$

是一連續函數. 事實上,

$$|f(x+h)-f(x)|^2=$$

$$=\left[\frac{1}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}f_1(t)[f_2(t+x+h)-f_2(t+x)]dt\right|\right]^2\leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}[f_1(t)]^2dt\cdot\int_{-\pi}^{\pi}[f_2(t+h)-f_2(t)]^2dt.$$

所以證明下述的定理好了：設 $\varphi(x)$ 是一週期函數，週期等於$b-a$，那末 $\varphi(x)\in L^p(a,b)$ $(p>1)$含有

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b|\varphi(x+h)-\varphi(x)|^p dx=0. \tag{3}$$

此事當 $\varphi(x)$ 是一連續函數時，不待詳細證明．假如 $\varphi(x)$ 是一有界函數：$|\varphi(x)|<K$，那末，對於 $\varepsilon>0$，有連續函數 $g(x)$適合

$$J(g)\equiv\int_a^b|\varphi(x)-g(x)|\,dx<\varepsilon,\quad |g|\leqslant 2K.$$

置 $C=(3K)^{p-1}$ 的話，

$$\int_a^b|\varphi(x)-g(x)|^p dx=\int_a^b|\varphi-g|^{p-1}\cdot|\varphi-g|\,dx<$$
$$<CJ(g)<C\varepsilon.$$

利用敏高夫斯基不等式，

$$\left[\int|\varphi(x+h)-\varphi(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}\leqslant 2\left[\int|\varphi(x)-g(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}+$$
$$+\left[\int|g(x+h)-g(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}.$$

末項當 $h\to 0$ 時，趨近於 0．由是

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\int_a^b|\varphi(x+h)-\varphi(x)|^p dx\leqslant 2^p C\varepsilon.$$

令 $\varepsilon\to 0$，就得到(3)．

當 $\varphi(x)$是一無界函數時，$\varphi(x)=\varphi_1(x)-\varphi_2(x)$；但

$$\varphi_1(x)=\max(\varphi(x),0)\quad \varphi_2(x)=\min(\varphi(x),0),$$

由是在假設 $\varphi(x)\geqslant 0$ 下，證明(3)好了．置 $\varphi_N(x)=\min(N,\varphi(x))$．那末，取 N 甚大可使

$$\int_a^b|\varphi(x)-\varphi_N(x)|^p dx<\varepsilon,$$

由敏高夫斯基的不等式，

$$\left[\int|\varphi(x+h)-\varphi(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}\leqslant\left[\int|\varphi_N(x+h)-\varphi_N(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}+$$

$$+ 2\left[\int |\varphi(x) - \varphi_N(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}$$

令 $h \to 0$, 得着 $\lim \int |\varphi(x+h) - \varphi(x)|^p dx \leqslant 2^p \varepsilon$. 再令 $\varepsilon \to 0$, 就得到(3).

當 $f_1 \in L^2$, $f_2 \in L^2$ 時,稱(2)中函數 $f(x)$ 是楊格的連續函數*.

定理 2. 三角級數(1)處處絕對收斂的充要條件是: (1)是楊格連續函數 $f(x)$ 的富理埃級數.†

證明 設

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(t) f_2(x+t) dt$$

是一楊格的連續函數, $f_1(t)$ 的富理埃係數是 $a'_0, a'_n, b'_n (n = 1, 2, \cdots)$. 固定 x. 設 $f_2(x+t)$ 的富理埃係數是 $a''_0(x), a''_n(x), b''_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 由 §1 定理 6 的系,

$$f(x) = \frac{1}{2} a'_0 a''_0(x) + \sum_1^\infty [a'_n a''_n(x) + b'_n b''_n(x)],$$

這是絕對收斂的級數. 事實上,

$$\{\Sigma |a'_n a''_n(x)|\}^2 \leqslant \Sigma a'^2_n \Sigma [a''_n(x)]^2 \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} f_1^2 dt \int_{-\pi}^{\pi} f_2^2 dt,$$

$$\{\Sigma |b'_n b''_n(x)|\}^2 \leqslant \Sigma b'^2_n \Sigma [b''_n(x)] \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} f_1^2 dt \int_{-\pi}^{\pi} f_2^2 dt.$$

設 $f(x)$ 的富理埃係數是 $a_0, a_1, \cdots b_1, b_2, \cdots$, 那末從

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(t) f_2(t+x) dt\, dx =$$

$= a'_0 a''_0(x)$, 知 $a_0(x)$ 是一常數. 又因

$$\begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} nt\, dt = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(u) f_2(ut) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} nt\, du\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(u) f_2(v) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} n(v-u) dv\, du,$$

所以

---

* 楊格(W. H. Young)於 1910 左右曾研究過這種函數.

† 參閱陳建功著:直交函數級數之和(1954),第三章. 原文見日本學士會紀事,1928.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(a'_n \cos nv + b'_n \sin nv)f_2(v)dv,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(-b'_n \cos nv + a'_n \sin nv)f_2(v)dv.$$

由是，$a_n \cos nx + b_n \sin nx$ 等於

$$a'_n \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_2(v) \cos n(v-x)dv +$$

$$+ b'_n \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_2(v) \sin n(v-x)dv$$

$$= a'_n \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_2(t+x) \cos nt\, dt +$$

$$+ b'_n \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_2(t+x) \sin nt\, dt$$

$$= a'_n a''_n(x) + b'_n b''_n(x).$$

所以 $\Sigma(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$處處絕對收斂.

次設 $\Sigma(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$處處絕對收斂，那末 $\Sigma(|a_n| + |b_n|)$收斂（§12 定理 1）．設$\sqrt{|a_n|}$ 和 $\sqrt{|b_n|}$ 兩數中之大者爲 m_n，作如下的兩數列：

$$a'_0, a'_1, a'_2, b'_1, b'_2, \cdots; a''_0, a''_1, b''_1, b''_2, \cdots$$

$$a'_0 a''_0 = a_0 \quad a'_n = b'_n = m_n \ (n > 0);$$

$$a''_n = b''_n = m_n \ (m_n = 0);$$

$$a''_n = \frac{a_n - b_n}{2m_n}, b''_n = \frac{a_n + b_n}{2m_n} \ (m_n > 0).$$

那末

$$a'^2_n + b'^2_n = 2m_n^2 \leqslant 2(|a_n| + |b_n|), \ a''^2_n + b''^2_n \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}(|a_n| + |b_n|).$$

由是 $\Sigma(a'^2_n + b'^2_n)$ 和 $\Sigma(a''^2_n + b''^2_n)$ 都是收斂級數. 因此，由黎斯和菲蕭的定理，L^2 中有函數 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$適合於

$$f_j(x) \sim \frac{1}{2} a^j_0 + \sum_1^{\infty}(a^j_n \cos nx + b^j_n \sin nx), \ (j = 1,2).$$

從 f_1, f_2 作楊格函數 $f(x)$ 如前．因 f_1 和 f_2 都是週期函數，所以 $f(x)$ 也是週期函數．置

$$S_n^{(j)}(x) = \frac{1}{2} a_0^j + \sum_{\nu=1}^{n}[a_\nu^j \cos \nu x + b_\nu^j \sin \nu x].$$

設 $\varphi(x)$ 是一連續函數，那末利用富砵尼的公式，從

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_n^{(1)}(t)S_m^{(2)}(x+t)\varphi(x)dt\,dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_n^{(1)}(t)S_m^{(2)}(x+t)\varphi(x)dx\,dt$$

得到

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(t)f_2(x+t)\varphi(x)dt\,dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(t)f_2(x+t)\varphi(x)dx\,dt.$$

現在證明

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + \cos \sin nx).$$

置 $\varphi(x) = \frac{\cos}{\sin} nx$ 於上面公式，得着

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{\cos}{\sin} nx\,dx = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(t)dt\int_{-\pi}^{\pi} f_2(t+x)\frac{\cos}{\sin} nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(t)dt\int_{-\pi+t}^{\pi+t} f_2(x)\frac{\cos}{\sin} n(x-t)dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(t)[a_n'' \frac{\cos}{-\sin} nt + b_n'' \frac{\sin}{\cos} nt]dt$$

$$= \left\{\begin{array}{c} a_n' a_n'' + b_n' b_n'' \\ -b_n' a_n'' + a_n' b_n'' \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} a_n \\ b_n \end{array}\right..$$

定理證畢．

4. **用算術平均法求級數的和**　設 $S_n = c_0 + c_1 + \cdots + c_n$，當算術平均

$$\frac{S_0 + S_1 + \cdots + S_n}{n+1} \quad (n = 0, 1, \cdots)$$

的敍列收斂於 S 時，我們稱級數 $c_0 + c_1 + \cdots$ 可用算術平均法求

和,和爲 S. 設 $S_n(x)$是富理埃級數

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

的部分和:

$$S_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)(n > 0).$$

置

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n}[S_0(x) + S_1(x) + \cdots + S_{n-1}(x)],$$

$$S_0(x) = \frac{1}{2}a_0,$$

$$\varphi(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2S,$$

那末從

$$S_n(x) - S = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}$$

$$\{f(x+t) + f(x-t) - 2S\}dt$$

得到

$$\sigma_n(x) - S =$$

$$= \frac{1}{2n\pi}\int_0^\pi \frac{\sin\frac{1}{2}t + \sin\frac{3}{2}t + \cdots + \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}\varphi(t)dt.$$

或是

$$\sigma_n(x) - S = \frac{1}{2n\pi}\int_0^\pi \frac{\sin^2\frac{1}{2}nt}{\sin^2\frac{1}{2}t}\varphi(t)dt,$$

我們稱這個積分爲飛耶(Fejér)的積分.

飛耶證明:當 $f(x \pm 0)$存在時,

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

所以假如 x 是 f 之一連續點，那末 $\sigma_n(x)\to f(x)$。假如 $f(x)$ 是一處處連續的函數，那末當 $n\to\infty$ 時 $\sigma_n(x)$ 勻斂於 $f(x)$。這些結果，叫做飛耶的定理．飛耶的定理包含在下述勒貝格的定理中．

定理 1. 設 $f(x)\sim\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$.

假如

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t|f(x+t)-f(x)|\,dt=0. \tag{1}$$

那末上記的富理埃級數可用算術平均法求和，和爲 $f(x)$．假如極限式(1)在 $[a,b]$ 上均勻地成立，且 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是有界，那末在 $[a,b]$ 中 $\sigma_n(x)$ 勻斂於 $f(x)$．

證明 積分 $\Phi(t)=\int_0^t|\varphi(u)|\,du$ 小於或等於

$$\int_0^t|f(x+u)-f(x)|\,du+\int_0^t|f(x-u)-f(x)|\,du.$$

故當 $t\to 0$ 時，$\Phi(t)t^{-1}\to 0$。對於 $\varepsilon>0$，取如下的 η 使當 $0<t\leqslant\eta$ 時 $\Phi(t)<\varepsilon t$．假如(1)在 $[a,b]$ 上均勻地成立，那末 η 可與 $[a,b]$ 中的 x 無關係．設 $n>\frac{1}{\eta}$，我們將飛耶積分寫成三個部分：

$$\sigma_n(x)-f(x)=\int_0^{\frac{1}{n}}+\int_{\frac{1}{\pi}}^{\eta}+\int_{\eta}^{\pi}\frac{\sin^2\frac{1}{2}nt}{2n\pi\sin^2\frac{1}{2}t}\varphi(t)dt=$$

$$=J_1+J_2+J_3.$$

當 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 時，$\sin\theta\geqslant\frac{2}{\pi}\theta$，所以在 J_1，

$$\frac{1}{2n\pi}\frac{\sin^2\frac{1}{2}nt}{\sin^2\frac{1}{2}t}\leqslant\frac{1}{2n\pi}\left(\frac{\frac{1}{2}nt}{\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}t}\right)^2=\frac{\pi}{8}n.$$

因此

$$|J_1| < \frac{\pi}{8} n \int_0^{\frac{1}{n}} |\varphi(t)|\, dt = \frac{\pi n}{8} \Phi\left(\frac{1}{n}\right) < \frac{\pi}{8} \varepsilon.$$

對於 J_2，施行分離積分法，

$$|J_2| \leqslant \frac{\pi^2}{2n\pi} \int_{\frac{1}{n}}^{\eta} \frac{|\varphi(t)|}{t^2}\, dt = \frac{\pi}{2n}\left[\frac{\Phi(\eta)}{\eta^2} - n^2\Phi\left(\frac{1}{n}\right) + \right.$$

$$\left. + 2\int_{\frac{1}{n}}^{\eta} \frac{\Phi(t)}{t^3}\, dt\right] < \frac{\pi}{2n}\left[\frac{\varepsilon}{\eta} + 2\int_{\frac{1}{n}}^{\eta} \frac{\varepsilon}{t^2}\, dt\right].$$

由是，$|J_2| \leqslant \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\eta^n} + 2\right)\varepsilon < 5\varepsilon$. 最後，

$$|J_3| < \frac{1}{2n\pi \sin^2\frac{\eta}{2}} \int_{\eta}^{\pi} |\varphi(t)|\, dt < \frac{\Phi(\pi)}{2n\pi \sin^2\frac{\eta}{2}} \leqslant \frac{K}{n}.$$

此地的 K 無關於 n，所以取 m 足够大，當 $n > m$ 時 $|J_3| < \varepsilon$. 總結起來：當 $n > m$ 時

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < |J_1| + |J_2| + |J_3| < \frac{\pi}{8}\varepsilon + 5\varepsilon + \varepsilon < 7\varepsilon.$$

所以

$$\sigma_n(x) \to f(x).$$

假如(1)對於$[a, b]$中一切 x 成立，那末

$$\frac{\max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} \Phi(\pi)}{2\pi \sin^2\frac{\eta}{2}} = K$$

的話，不等式 $|\sigma_n(x) - f(x)| < 7\varepsilon \ (n > m)$ 對於 $a \leqslant x \leqslant b$ 成立. 所以 $\sigma_n(x)$ 匀斂於 $f(x)$. 定理證畢.

系 閉區間 $[a, b]$ 上的連續函數 $f(x)$，必可用多項式爲項的匀斂級數來表達.

這是瓦耶施脫拉斯的定理，此定理等價於下述迫近定理：設 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是連續的，對於任一正數 ε，必有多項式 $P(x)$ 適合於

$$|f(x)-P(x)|<\varepsilon,\ (a\leqslant x\leqslant b).$$

事實上,當 $|f(x)-P_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2^n}$ $(n=1,2,\cdots)$時,級數

$$P_0(x)+[P_1(x)-P_0(x)]+[P_2(x)-P_1(x)]+\cdots$$

的最初 n 項的和 $P_n(x)$與 $f(x)$之差小於 $\frac{\varepsilon}{2^n}$. 要證明迫近定理,不妨假設 $0<a<b<2\pi$. 又不妨假設 $f(x)$是一以 2π 爲週期的連續的週期函數. 設 $\sigma_n(x)$ 是 $f(x)$ 的飛耶積分. 因 $f(x)$在 $[a,b]$ 是連續的,所以從飛耶的定理,對於 $\varepsilon>0$, 有如下的 $\sigma_n(x)$

$$|f(x)-\sigma_n(x)|<\varepsilon\ (a\leqslant x\leqslant b).$$

把 $\sigma_n(x)$展成冖級數 $\Sigma c_\nu x^\nu$, 取 N 甚大,可使

$$\left|\sigma_n(x)-\sum_0^N c_\nu x^\nu\right|<\varepsilon\quad(a\leqslant x\leqslant b).$$

那末

$$|f(x)-(c_0+c_1x+\cdots+c_Nx^N)|<2\varepsilon\quad(a\leqslant x\leqslant b).$$

證明完畢.

定理 2. 富理埃級數

$$f(x)\sim\frac{1}{2}a_0+\sum_1^\infty(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

幾乎處處可用算術平均法求得其和 $f(x)$.

證明 設 $f(x+2\pi)=f(x)$, 關係

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h|f(x+t)-f(x)|\,dt=0$$

成立之點 x 的全體爲 E. 稱 E 爲 $f(x)$的勒貝格點集.

由定理 1,證明通集$[0,2\pi]\cdot E$的測度等於 2π 好了. 其實我們能證:除一零集 N 中之點 x 而外,關係

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-\alpha|\,dt=|f(x)-\alpha|$$

對於任何 α, 任何 $x(x\,\bar{\in}\,N)$成立. 固定 α,此關係不成立之 x, 成一零集 $N(\alpha)$. 設 $r_1,r_2,\cdots$ 是有理數的全體. 和集 $\Sigma N(r_n)=N$ 是

一零集． 設 α 是一無理數，x 不屬於 N，那末當有理數 r 適合 $|r-\alpha|<\varepsilon$ 時，差

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-\alpha|\,dt-|f(x)-\alpha|=d(h,\alpha)$$

的絕對值小於

$$\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-\alpha|\,dt-\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-r|\,dt\right|+$$

$$+\left|d(h,r)\right|+\left|\,|f(x)-r|-|f(x)-\alpha|\,\right|.$$

第一第三兩項都不大於 $|\alpha-r|$. 因 $x\bar{\in}N$，所以第二項當 $h\to 0$ 時，趨近於 0． 因此

$$\lim_{h\to 0}|d(h,\alpha)|\leqslant 2\varepsilon.$$

令 $\varepsilon\to 0$ 得 $d(h,\alpha)\to 0$. 由是當 $x\bar{\in}N$ 時，關係

$$\lim\frac{1}{h}\int_0^x|f(x)-\alpha|\,dt=|f(x)-\alpha|$$

對於任何 α 成立．證明完畢．

當級數可用算術平均法求和時，在怎樣狀况下我們能斷言它是一個收斂級數？下面的定理 3，對於此問題給予一個回答．

定理 3. 設 $\sum_1^\infty u_n$ 可用算術平均法求和，和爲 s，那末當

$$nu_n>-K\,(n=1,2,\cdots;\ K\text{: 常數})$$

時，級數 Σu_n 收斂於 s．

證明 置 $u_0+u_1+\cdots+u_n=s_n$, $s_0+s_1+\cdots+s_n=n\sigma_n$. 由假設，$\sigma_n\to s$. 在所設條件下，要證明 s_n 收斂於 s. 我們不妨假定 s 等於 0. 因此，$\sigma_n\to 0$. 設 α 是小於 1 的正數，$[\alpha k]$ 是不大於 αk 的最大整數，簡寫它做 n'. 我們將 s_n 寫成

$$S_n=\frac{n\sigma_n-n'\sigma_n}{n-n'}+\frac{1}{n-n'}\sum_{k=n'+1}(S_n-S_k)$$

其中

$$S_n-S_k>-K\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n'+2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

$$= -K\log\frac{n}{n'} + O(1) \geqslant -K\log\frac{1}{\alpha} + O(1). \qquad (1)$$

因此

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} S_n \geqslant -\overline{\lim}\frac{1+\alpha}{1-\alpha}|\sigma_n| - K\log\frac{1}{\alpha} \geqslant -K\log\frac{1}{\alpha}.$$

令 $\alpha\to 1$，得 $\underline{\lim}\, S_n \geqslant 0$. 又設 $\beta > 1$，置 $[\beta n] = n''$. 那末從

$$S_n = \frac{n''\sigma_n - n\sigma_n}{n''-n} + \frac{1}{n''-n}\sum_{n=n+1}^{n'}(S_n - S_\nu)$$

得到

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, S_n \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\beta+1}{\beta-1}|\sigma_n| + K\log\beta \leqslant K\log\beta.$$

令 $\beta\to 1$，得 $\overline{\lim}\, S_n \leqslant 0$. 所以 $S_n \to 0$. 引理證畢.

系 當級數 ΣU_n 用算術平均法求得其和為 S 時，條件 $nU_n = o(1)$ 含有 $\Sigma U_n = S$.

這是哈戴(G. H. Hardy)的定理. 後來藍刀(E. Landau)把它改進為定理 3 的形式.

5. 三角級數的實質收斂 哈戴曾經證明：當級數

$$\Sigma(a_n^2 + b_n^2)(\log n)^2$$

收斂時，$f(x)$ 的富理埃級數

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

實質收斂於 $f(x)$. 1926 年，普賴斯涅爾*等改進它為如下的定理.

定理 1. 假如級數 $\Sigma(a_n^2 + b_n^2)\log n$ 收斂，那末 $f(x)$ 的富理埃級數

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

實質收斂於 $f(x)$.

證明 我們首先證明如下的引理：設 M 是一可測點集，

---

* A. 普賴斯涅爾(Plessner)回蘇聯後，稱 Плеснер.

$|M|<\infty$, $f_n(x)\in L(M)$. 寫

$$G_{mn}=\max\{|f_{m+1}-f_m|, |f_{m+2}-f_m|, \cdots, |f_n-f_m|\}$$
$$(n>m),$$
$$J_{mn}=\int_M G_{mn}\,dx\to J_m(n\to\infty).$$

假如 $J_m\to 0(m\to 0)$, 那末 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 在 M 上實質收斂.

事實上, 由於

$$0\leqslant G_{mn}=G_{mn+1},\ 0\leqslant J_{mn}\leqslant J_{m,\ n+1},$$

所以當 $n\to\infty$ 時, J_{mn} 單調地收斂於 J_m. 設 $\varepsilon>0$, $\varepsilon_k=\dfrac{\varepsilon}{2^k}$ 則必有如下的整數 ν_k: 當 $m\geqslant\nu_k$ 時, $J_m<\varepsilon_k^2$. 因之, 當 $m\geqslant\nu_k$ 時, $J_{mn}<\varepsilon_k^2$. 記點集 $(G_{\nu_k n}(x)\geqslant\varepsilon_k)$ 爲 $E_k(n)$, 那末 $|E_k(n)|<\varepsilon_k$. 由於 $E_k(n)$ 是 $E_k(n+1)$ 之一子集, 所以和集

$$E_k=E_k(\nu_k)+E_k(\nu_{k+1})+\cdots$$

的測度不大於 ε_k. 假如 x 不屬於 E_k, 那末 $G_{\nu_k n}(x)<\varepsilon_k$. 又如 x 不屬於和集 $E=\sum\limits_1^{\infty}E_k$ 的話, 那末不等式

$$G_{mn}(x)<\varepsilon_k$$

當 $n>m\geqslant\nu_k(k=1,2,\cdots)$ 時成立, 因之在 $M-E$ 上, 函數列 $f_n(x)$ 均勻收斂. 但是, E 的測度不大於 $\Sigma|E_k|<\Sigma\varepsilon_k=\varepsilon$, 而 ε 是任意的正數, 所以 $\{f_n(x)\}$ 在 M 上實質收斂.

現在證明我們的定理, 置

$$f_n(x)=\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x).$$

那末, 對於 x, 有如下的 $\lambda(x)$: $m<\lambda(x)\leqslant n$,

$$G_{mn}(x)=\varepsilon(x)\sum_{\nu=m+1}^{\lambda(x)}(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x).$$

此地 $\varepsilon(x)=\pm 1$. 又置

$$X_n(t)=\sum_{\nu=2}^{n}(a_\nu\cos\nu t+b_\nu\sin\nu t)\sqrt{\log\nu},$$

那末從

$$\begin{matrix} a_\nu \\ b_\nu \end{matrix} = \frac{1}{\pi\sqrt{\log\nu}} \int_{-\pi}^{\pi} X_n(t) \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} \nu t\, dt,$$

得到

$$J_{mn} = \int_{-\pi}^{\pi} G_{mn}(x)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon(x) \sum_{\nu=2}^{\lambda(x)} \frac{\cos\nu(x-t)}{\sqrt{\log\nu}} X_n(t)dt\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon(x) \sum_{\nu=2}^{\lambda(x)} \frac{\cos\nu(x-t)}{\sqrt{\log\nu}}\, dx\right\} X_n(t)dt.$$

利用薛瓦兹的不等式,得到

$$J_{mn}^2 \leqslant \sum_{\nu=m+1}^{n}(a_\nu^2+b_\nu^2)\log\nu \int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{\nu=2}^{\lambda(x)} \frac{\cos\nu(t-x)}{\sqrt{\log\nu}}\, dx\right]^2 dt.$$

記最後的積分爲 I_{mn}, 我們要證

$$I_{mn} = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{\nu=2}^{\lambda(x)} \frac{\cos\nu(x-t)}{\sqrt{\log\nu}} \sum_{\lambda=2}^{\lambda(y)} \frac{\cos\nu(y-t)}{\sqrt{\log\nu}}\, dt\right] dx\, dy$$

小於一個常數. I_{mn} 中關於 t 的積分等於

$$\sum_{\nu=2}^{\lambda} \frac{\cos\nu(x-y)}{\log\nu} = C_\lambda(x-y),$$

此地 $\lambda = \lambda(x,y)$ 表示 $\lambda(x)$ 與 $\lambda(y)$ 中之小者. 由是

$$I_{mn} = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} C_\lambda(x-y)dx\, dy.$$

簡寫

$$\rho_k = \frac{1}{2} + \cos(x-y) + \cdots + \cos k(x-y) (k>0),$$

$$\rho_0 = \frac{1}{2},\ \tau_k = \rho_0 + \cdots + \rho_k.$$

由於

$$C_\lambda(x-y)=\sum_{2}^{\lambda}\frac{\rho_k-\rho_{k-1}}{\log k},$$

所以 $C_\lambda(x-y)+\frac{\rho_1}{\log 2}$ 等於

$$\frac{\rho_\lambda}{\log\lambda}+\sum_{\nu=2}^{\lambda-1}\rho_\nu\Delta\frac{1}{\log\nu}=\sum_{\nu=2}^{\lambda-2}\tau_\nu\Delta^2\frac{1}{\log\nu}+$$

$$+\tau_{\lambda-1}\Delta\frac{1}{\log(\lambda-1)}-\tau_1\Delta\frac{1}{\log 2}+\frac{\rho_\lambda}{\log\lambda}.$$

利用中值定理,就知道 $\Delta^2\frac{1}{\log\nu}<\frac{2}{\nu^2\log^2\nu}\ (\nu>1)$. 由於 $\tau_\nu\geqslant 0$, 所以

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\tau_\nu dx\,dy=(\nu+1)2\pi^2,$$

$$I'=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{\nu=2}^{\lambda-2}\tau_\nu\Delta^2\frac{1}{\log\nu}dx\,dy<$$

$$<4\pi^2\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{\nu=2}^{\lambda-2}\frac{\tau_\nu}{\nu^2\log^2\nu}dx\,dy<C,$$

C 是一個常數. 現在估計積分

$$I''=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\rho_\lambda}{\log\lambda}dx\,dy.$$

它的絕對值小於

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|\rho_\lambda(x)|}{\log\lambda(x)}dx\,dy+\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|\rho_\lambda(y)|}{\log\lambda(y)}dx\,dy$$

$$=2\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dy}{\log\lambda(y)}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin\lambda_1(y)(x-y)}{2\sin\frac{x-y}{2}}\right|dx=$$

$$=2\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dy}{\log\lambda(y)}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin\lambda_1(y)t}{\sin\frac{1}{2}t}\right|dt,$$

但 $\lambda_1(y)=\lambda(y)+\frac{1}{2}$. 由於

$$\int_0^\pi \left| \frac{\sin \lambda_1(y)t}{\sin \frac{1}{2} t} \right| dt = \int_0^{\frac{1}{\lambda_1(y)}} + \int_{\frac{1}{\lambda_1(y)}}^\pi \left| \frac{\sin \lambda_1(y)t}{\sin \frac{1}{2} t} \right| dt$$

的絕對值小於

$$2 + \int_{\frac{1}{\lambda_1(y)}}^\pi \frac{dt}{\sin \frac{1}{2} t} < 2 + \pi \log(\lambda_1(y)),$$

所以

$$I'' < 4 \int_{-\pi}^\pi \frac{2 + \pi \log (\lambda_1(y))}{\log \lambda(y)} dy < C',$$

C' 是一個常數. 最後,

$$I''' = \int_{-\pi}^\pi \int_{-\pi}^\pi \tau_{\lambda-1} \Delta \frac{1}{\log(\lambda - 1)} dx\, dy <$$

$$< \int_{-\pi}^\pi \int_{-\pi}^\pi \frac{\tau_{\lambda(x)-1} dx\, dy}{(\lambda(x) - 1)\log^2(\lambda(x) - 1)} +$$

$$+ \int_{-\pi}^\pi \int_{-\pi}^\pi \frac{\tau_{\lambda(y)-1} dx\, dy}{(\lambda(y) - 1)\log^2(\lambda(y) - 1)} <$$

$$< \int_{-\pi}^\pi \frac{2\pi\lambda(x)}{\lambda(x) - 1} dx < 8\pi^2 = C''.$$

總結起來

$$|I_{mn}| \leqslant |I'| + |I''| + |I'''| + C''' < C + C' + C'' + C''' = K,$$

C''' 和 K 都是常數. 因此

$$J_{mn}^2 \leqslant K \sum_{\nu=m+1}^n (a_\nu^2 + b_\nu^2)\log \nu.$$

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} J_{mn}^2 = 0.$$

由引理,知 $f_n(x)(n = 1, 2, \cdots)$實質收斂. 這就是證明 $f(x)$的富理埃級數實質收斂於 $f(x)$. 定理證明完畢.

6. 直交函數級數的實質收斂 設就範的函數列 $\phi_n(x)(n=1, 2, \cdots)$是在$[a, b]$上直交的,數列 $a_1, a_2, \cdots$ 中的數都是實數常數. 淮伊耳(H. Weyl)於 1909 年證明:當 $p > 0$ 時,級數 $\Sigma a_n^2 n^p$ 的收

斂含有直交函數級數 $\Sigma a_n\phi_n(x)$ 的實質收斂，普蘭格勒耳 (Plancherel)於 1913 年把淮伊耳因子 n^p 改進爲 $\log^3 n$. 到了 1922 年，孟孝夫(Д. Е. Меньшов) 和拉兌馬吼 (T. H. Rademacher) 各自證明下面的

定理 1. 假如級數 $\Sigma a_n^2(\log n)^2$ 收斂，那末，直交函數級數 $\Sigma a_n\phi_n(x)$ 實質收斂.

證明 原來的兩證明頗長，此地的證明，比較短些*.

設 m, l, s, 是如下的整數:

$$0\leqslant l< m \quad 0\leqslant S< 2^{m-l}. \tag{1}$$

置 $S(x, n) = a_1\phi_1(x) + \cdots + a_n\phi_n(x)$, $\chi(l, s) = 2^m + s\cdot 2^l$,

$$D(x,l,s) = S(x,\chi(l,s+1)) - S(x,\chi(l,s)).$$

設 $\sum\limits_{l,s}$ 是關於適合(1)的一切 l, s 的和. 我們不妨假設直交區間是 $[0, 1]$. 設 $0< x< 1$, 置

$$U_m(x) = \int_0^x m\sum_{l,s}(D(t,l,s))^2dt,$$

那末

$$U_m(x)\leqslant\int_0^1 m\sum_{l,s}(D(x,l,s))^2dx = m\sum_{l,s}\sum_{\nu=\chi(l,s)+1}^{\chi(l,s+1)}a_\nu^2$$

$$= m\sum_{l}\sum_{2^m+1}^{2^{m+1}}a_\nu^2 = m^2\sum_{2^m+1}^{2^{m+1}}a_\nu^2.$$

此地的 ν 在 2^m 與 2^{m+1} 之間，所以取 2 爲對數的底的話，得到 $m\leqslant\log\nu$. 因此

$$U_m(x)\leqslant\sum_{2^m}^{2^{m+1}}a_\nu^2(\log\nu)^2,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} U_m(x)\leqslant\sum_{\nu=2}^{\infty}a_\nu^2(\log\nu)^2.$$

---

* 東北數學雜誌 29 (1928), 參見 1934 年的浙江大學理科報告; 以及陳建功著: 直交函數級數(1954)第一章第一節.

由富弼尼的定理，$\sum_{m=1}^{\infty} m \sum_{l,s} (D(x,l,s))^2$，在$(0,1)$中實質收斂.

用二進位法表示正整數 n：

$$n = \delta_0 + \delta_1 \cdot 2 + \delta_2 \cdot 2^2 + \cdots + \delta_l \cdot 2^l + \cdots + \delta_m 2^m,$$

中的 δ_i 或是 0 或是 1 而 $\delta_m = 1$. 因此 $S(x,n) - S(x,2^m) = = \delta_0 D(x,0,S_0) + \delta_1 D(x,1,S_1) + \cdots + \delta_{m-1} D(x,m-1,S_{m-1})$，但 $S_l 2^l + 2^m = \delta_l 2^l + \cdots + \delta_m 2^m = \chi(l,s_l)$，$(l = 0,1,\cdots,m-1)$. 由是

$$[S(x,n) - S(x,2^m)]^2 \leqslant (\delta_0^2 + \delta_1^2 + \cdots + \delta_{m-1}^2) \times$$
$$\times [(D(x_0,S_0))^2 + \cdots + (D(x,m-1,S_{m-1}))^2] \leqslant$$
$$\leqslant m \sum_{l,s} (D(x,l,s))^2.$$

右邊是實質收斂級數的第 m 項，所以 $[0,1]$ 中，除出一個零集 E_0 中的點而外

$$\lim_{m\to\infty} m \sum_{l,s} (D(x,l,s))^2 = 0,$$

因此，當 $x \bar{\in} E_0$ 時，

$$\lim_{n\to\infty} [S(x,n) - S(x,2^m)] = 0.$$

因 Σa_n^2 是一收斂級數，所以從黎斯和菲蕭的定理，有函數 $f(x)$ 適合

$$\int_0^1 (f(x))^2 dx = \sum_1^{\infty} a_n^2,\ \ f(x) \sim \sum_1^{\infty} a_n \phi_n(x).$$

當 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 時，

$$\int_0^x [f(x) - S(x,2^m)]^2 dx \leqslant \int_0^1 [f(x) - S(x,2^m)]^2 dx =$$
$$= \sum_{n=2^n+1}^{\infty} a_n^2.$$

由於

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\nu=2^m+1}^{\infty} a_\nu^2 = \sum_{m=1}^{\infty} m\,(a_{2^n+1}^2 + \cdots + a_{2^{m+1}}^2) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{2^m+1}^{2^{m+1}} a_\nu^2 \log \nu = \sum_{\nu=3}^{\infty} a_\nu^2 \log \nu$$

是一收斂級數,所以級數

$$\sum_{m=1}^{\infty} \int_0^x [f(x) - S(x, 2^m)]^2 \, dx$$

均勻收斂. 由富弼尼的定理, $\sum_{m=1}^{\infty} [f(x) - S(x, 2^m)]^2$ 在 $[0, 1]$ 除開一個零集 E_1 是收斂的. 假如 x 不屬於 E_1, 那末

$$\lim_{n\to\infty} [f(x) - S(x, 2^m)] = 0.$$

由是,假如 x 不屬於零集 $E = E_0 + E_1$, 那末當 $n \to \infty$ 時

$$f(x)-S(x, n) = [f(x)-S(x, 2^m)]+[S(x, 2^m)-S(x, n)]$$

收斂於 0. 定理證畢.

注意 孟孝夫證明了定理之後, 又證明了級數 $\Sigma a_n^2 \log^2 n$ 的因子 $\log^2 n$ 不可以用"較小"的因子 $\omega(n)$代替. 詳細的說:假如

$$\lim_{n\to\omega} \frac{\omega(n)}{\log^2 n} = 0$$

的話, 必有到處發散的直交函數級數 $\Sigma a_n\phi_n(x)(0 \leqslant x \leqslant 1)$ 使級數 $\Sigma a_n^2 \omega(n)$收斂.

現在從定理 1 導出下面的定理:

定理 2. 假如級數 $\Sigma a_n^2(\log \log n)^2$ 收斂, 那末函數列

$$S(x, 2^n) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

實質收斂. 其實, 此結果與定理 1 等價.

證明 要證定理 2 之前半,不妨假設

$$C_m = \sqrt{\sum_{2^m}^{2^{m+1}} a_\nu^2} > 0, \ (n = 1, 2, \cdots).$$

置

$$\psi_m(x) = \frac{1}{c_m}(a_{2^m}\phi_{2^m}(x) + \cdots + a_{2^{m+1}}\phi_{2^{m+1}}(x)),$$

得着新的就範直交函數列 $\psi_1(x), \psi_2(x), \cdots (0 \leqslant x \leqslant 1)$,現在

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m^2(\log m)^2 = \sum_{m=1}^{\infty} (\log m)^2(a_{2^m}^2 + \cdots + a_{2^{m+1}}^2) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\nu=3}^{\infty} a_\nu^2(\log\log\nu)^2 < \infty,$$

所以從定理 1，知道 $\Sigma C_m\psi_m(x)$ 是一實質收斂級數． 這就是說 $S(x,2), S(x,2^2), \cdots$ 是一實質收斂的函數列．

現在從定理 2 的前半導出定理 1．假如$\{\phi_n(x)\}$之外，還有無數個函數 $\psi_1(x), \psi_2(x), \cdots$；$\{\phi_n\}$和 $\{\psi_n\}$ 合成一個就範直交系統，那末置

$$\Phi_m(x) = \psi_m(x) \quad (m \text{ 不是 2 的某乘冪}),$$
$$\Phi_{2^n}(x) = \phi_n(x) \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

當 m 不是 2 的乘冪時，置 $a_m = 0$，又置 $a_{2^n} = a_n$． 考慮直交函數級數 $\Sigma a_n\Phi_n(x)$．由於

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} a_n^2 (\log\log n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2^n}^2 \log^2 n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \log^2 n < \infty,$$

所以函數列

$$\sum_{m=1}^{2^n} a_m\Phi_m(x) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

實質收斂．這就是說：函數級數 $\Sigma a_n\phi_n(x)$實質收斂．

假如沒有具上述性質的$\{\psi_n\}$，那末因級數 $\Sigma a_n^2 \log^2 n$ 收斂，所以兩級數

$$\Sigma a_{2n-1}^2 \log^2 n \text{ 和 } \Sigma a_{2n}^2 \log^2 n$$

都收斂．利用已證的部分，知兩級數

$$\Sigma a_{2n-1}\phi_{2n-1}(x) \text{ 和 } \Sigma a_{2n}\phi_{2n}(x)$$

都是實質收斂．因之，$\Sigma a_n\phi_n(x)$也是實質收斂．定理證畢．

7. 變更收斂級數之項的順序 現在考慮如下的問題：設 $\Sigma c_n\ \varphi_n(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ 是一直交函數級數，$\Sigma c_n^2 \log^2 n$ 是收斂的．要探求如下的增加函數 $w(n)$：當 $\Sigma c_n^2 \log^2 n \cdot w(n)$ 收斂時，將項的順序"大大地"搗亂後，級數

$$\sum c_{n_\nu}\varphi_{n_\nu}(x)$$

在$[a,b]$中仍能實質收斂.下面是拉特馬吼的

引理 設 $\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)$ 是$[a,b]$中 n 個就範的互相直交的函數,那末對於這 n 個函數和 n 個實數 $a_1,\cdots,a_n$, 必有如下的正值函數 $\delta(x)$ 和絕對常數 A:

$$\left|\sum_{h=i}^{j} a_k\varphi_k(x)\right| \leqslant \delta(x),\ \int_a^b \delta^2(x)dx \leqslant A\log^2 n\ \sum_1^n a_k^2.$$

此地 $1\leqslant i\leqslant j\leqslant n,\ a\leqslant x\leqslant b$.

證明 對於 n, 必有正整數 r 適合 $2^{r-1}<n\leqslant 2^r$. 由於有限個函數决不具有完備性,所以我們能補充

$$\varphi_{n+1}(x),\cdots,\varphi_{2^r}(x)$$

使 $\varphi_1(x),\cdots,\varphi_{2^r}(x)$ 在$[a,b]$成就範的直交函數組. 假如對於$\varphi_1(x),\cdots,\varphi_{2^r}(x)$有適合於引理的$\delta(x)$,那末對於 $\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)$ 也就是這個 $\delta(x)$滿足引理的兩個條件. 由是我們不妨假設 $n=2^r$ 來證明引理.

設 q 是 $0,1,\cdots,r$ 中的一個數,等分區間$[0,2^r]$爲 2^q 部分,則其任一部分的形式爲$[m_q, m_q+2^{r-q}]$. 置

$$S_q(x,m_q)=\sum_{\nu=m_q}^{m_q+2^{r-q}} a_\nu\varphi_\nu(x).$$

則當 $1\leqslant j\leqslant 2^r$ 時,和 $S_j(x)=a_1\varphi_1(x)+\cdots+a_j\varphi_j(x)$的形式如下:

$$S_j(x)=\varepsilon^0 S_0(x,m_0)+\varepsilon' S_1(x,m_1)+\cdots+\varepsilon'^r S_r(x,m_r),$$

此地的 $\varepsilon^0,\varepsilon',\cdots,\varepsilon^r$ 或爲 0 或爲 1. 從上式得到*

$$S_j^2(x)\leqslant r\sum_{q=2}^{r} S_q^2(x,m_q).$$

固定 q, 寫着 $A_q(x)=\sum_{m_q} S_q^2(x,m_q)$, 因此 $A_q(x)$ 與 j 無關

* $j=2^r$ 時, $\varepsilon^0=\cdots=\varepsilon^{(r-1)}=0$; $j<2^r$ 時, $\varepsilon^{(r)}=0$.

係．置

$$A_0(x)+\cdots+A_r(x)=\frac{1}{4r}\delta^2(x),$$

則 $\delta(x)\geqslant 0$，$S_j^2(x)\leqslant\frac{1}{4}\delta^2(x)$．從 $|S_j(x)|\leqslant\frac{1}{2}\delta(x)$，得到引理中的第一個不等式．由於

$$\int_a^b A_q(x)dx=\sum_{m_q}\int_a^b S_q^2(x,m_q)dx=\sum_{\nu=1}^{2^r}a_\nu^2,$$

所以

$$\int_a^b \delta^2(x)dx=4(r+1)r\sum_{\nu=1}^{2^r}a_\nu^2\leqslant A\log^2 n\sum_1^n a_\nu^2.$$

引理證畢．

設 $\Sigma u_n(x)$ 是 $[a,b]$ 上之一級數，假如不管 $\Sigma u_n(x)$ 的項的順序如何排列，級數實質上收斂於同一個函數，那末說，級數 $\Sigma u_n(x)$ 無條件地實質收斂．設 $W(n)$ 是 n 的增加函數，當級數 $\Sigma a_n^2 W(n)$ 收斂時，假如任何直交函數級數 $\Sigma a_n\varphi_n(x)$ 無條件地實質收斂，那末我們稱 $W(n)$ 是一個無條件收斂的因子．

定理 假如 $\{n_k\}$ 是一正整數的敍列，它對於正值增加函數 $w(n)$ 滿足條件

$$\sum_1^\infty\frac{1}{w(n_k)}<\infty,$$

並且 $1<\log n_k/\log n_{k-1}=O(1)$，那末 $\log^2 n\cdot w(n)$ 對於就範的直交函數級數是一個無條件收斂的因子．

證明 設 $g_1(k),g_2(k),\cdots,g_{n_k-n_{k-1}}(k)$ 是 $n_{k-1}+1,\cdots,n_k$ 的映像．就是說當 $n_{k-1}<n\leqslant n_k$ 時第 n 項 $a_n\varphi_n(x)$ 變爲新級數第 $g_\nu(k)$ 項，但 $1\leqslant\nu\leqslant n_k-n_{k-1}$．由引理，對於

$$S_k(x)=a_{g_1}\varphi_{g_1}(x)+\cdots+a_{g_{n_k-n_{k-1}}}\varphi_{g_{n_k-n_{k-1}}}(x),$$

存在着如下的 $\delta_k(x)$:

$$\left|\sum_{i=n}^m a_{g_i}\varphi_{g_i}(x)\right|\leqslant\delta_k(x)\quad(1\leqslant n\leqslant m\leqslant n_k-n_{k-1}),$$

$$\int_a^b \delta_k^2(x)dx \leqslant A(\log(n_k - n_{k-1})^2(a_{g_1}^2 + a_{g_2}^2 + \cdots + a_{g_{n_k - n_{k-1}}}^2) =$$
$$= A(\log(n_k - n_{k-1}))^2 \quad (a_{n_{k-1}-1}^2 + \cdots + a_{n_k}^2).$$

由於 $\log(n_k - n_{k-1}) \leqslant A_1 \log n_{k-1}$，所以從上式得到

$$\Sigma w(n_{k-1}) \int_a^b \delta_k^2(x)dx \leqslant AA_1 \Sigma a_n^2 \log^2 n \cdot \omega(n) < \infty.$$

從而級數 $\Sigma w(n_{k-1})\delta_k^2(x)$實質上收斂．設 x 是這個級數的一個收斂點，我們考慮新順序的級數 $\Sigma a_{\nu_n}\varphi_{\nu_n}(x)$，它的任一部分可以估計如下：對於 M 和 N，必有最大的 k_0 和最小的 k_1 使

$$\left|\sum_M^N a_{\nu_n}\varphi_{\nu_n}(x)\right| \leqslant \delta_{k_0}(x) + \delta_{k_0+1}(x) + \cdots + \delta_{k_1+1}(x) =$$

$$= \sum_{k=k_0}^{k_1} \delta_k(x) \sqrt{w(n_{k-1})} \frac{1}{\sqrt{w(n_{k-1})}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k_0}^{\infty} \delta_k^2(x) w(n_{k-1}) \sum_{k_0}^{\infty} \frac{1}{w(n_{k-1})}.$$

由是可知新順序的級數在 x 收斂．定理證畢．

例如當級數 $\Sigma a_n^2(\log\log n \cdot \log n)^2$ 收斂時，一切直交函數級數 $\Sigma a_n\varphi_n(x)$無條件收斂．事實上，取

$$n_k = [e^{e^k} + 1]$$

的話，

$$\frac{\log n_k}{\log n_{k+1}} < \frac{e^k + 1}{e^{k-1} - 1} < 2e,$$

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{(\log\log n_k)^2} < \sum_1^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty.$$

8. 從權產生的直交多項式系 設 $\tau(x)$是$[a, b]$中之一正值的可積函數，稱之爲權． 從權 $\tau(x)$ 可以產生完備的直交多項式系 $P_0(x), P_1(x), \cdots$，如下：

$$\int_a^b \tau(x)P_m(x)P_n(x)dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ 1 & (m = n), \end{cases}$$

$P_n(x)$的次數是 n. 事實上,

$$P_0(x) = \frac{1}{\sqrt{(b-a)\int_a^b \tau(x)dx}}$$

是一常數. 設 $P_1(x) = \alpha x + \beta$, 則從

$$\int_a^b P_0(x)P_1(x)\tau(x)dx = 0$$

可以決定 $\alpha:\beta$. 又從條件

$$\int_a^b P_1^2(x)\tau(x)dx = 1 \text{ 和 } \alpha > 0$$

$P_1(x)$ 完全決定. 假如 $P_0(x)$, $P_1(x)$, $\cdots$, $P_n(x)$ 都已決定,那末 $P_{n+1}(x)$中的 $n+1$ 個係數可以從

$$\int_a^b P_{n+1}(x)P_m(x)\tau(x)dx = \begin{cases} 0 & (m < n+1) \\ 1 & (m = n+1) \end{cases}$$

$n+1$ 個方程決定, 且可使得 $P_{n+1}(x)$中 x^{n+1} 的係數爲正. 這個系統 $P_n(x)(n = 0, 1, \cdots)$, 關於權 $\tau(x)$而言, 是完備的. 事實上,任何多項式 $P(x)$, 必可寫成如下的形式

$$P(x) = a_0P_0(x) + a_1P_1(x) + \cdots + a_mP_m(x).$$

因此當方程

$$\int_a^b P(x)P_n(x)\tau(x)dx = 0$$

對於任何 $P_n(x)$成立時, $P(x)$ 必全等於 0. 由 §1 的定理 8, 上面所說的完備性是眞確的.

定理 1. 設 $P_0(x)$, $P_1(x)$, $\cdots$ 是從權 $\tau(x)$決定的就範直交多項式系, $P_n(x)$ 的次數是 n. 則當級數

$$\Sigma c_n^2 \log^2 n$$

收斂時,直交函數級數 $\Sigma c_nP_n(x)$實質上收斂.

證明 設直交區間是(0, 1). 我們不妨假設 $\tau(x)$ 在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上的積分等於 1, 且設 $\tau(x)$一切零點成一零集,

$$y = \int_0^x \tau(t)dt,$$

則 x 與 y 之間成 1—1 連續對應，上式映照 $0\leqslant x\leqslant 1$ 於 $0\leqslant y\leqslant 1$．置

$$P_n(x)=\varphi_n(y),$$

則得

$$\int_0^1 \varphi_n(y)\varphi_m(y)dy=\begin{cases}0 & (n\neq m)\\ 1 & (n=m).\end{cases}$$

由於 x 軸的零集對於 y 軸上的零集，從孟孝夫-拉特馬呱的定理，$\Sigma c_n\varphi_n(y)$ 實質上收斂，所以 $\Sigma c_n P_n(x)$ 實質上收斂．

第一節中提及過的切勃肖夫多項式

$$T_n(x)=\cos n\theta \quad (\cos\theta=x),\ (n=0,1,\cdots)$$

的系統，從權 $\tau(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 而言，在 $[-1,1]$ 中是完備的．由於 $T_n(x)$ 的 n 個根是

$$x_\nu=\cos(2\nu-1)\frac{\pi}{2n} \quad (\nu=1,2,\cdots,n).$$

而 n 次多項式

$$U_n(x)=\frac{1}{n+1}T'_{n+1}(x)=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

的 n 個根是 $x'_\nu=\cos\dfrac{\nu\pi}{n+1}$ $(\nu=1,2,\cdots,n)$，所以 n 次多項式 $T_n(x)$ 與 $U_n(x)$ 的根都落在開區間 $(-1,1)$ 中而無重根．

從

$$\cos(n+1)\theta=\cos n\theta\cos\theta-\sin n\theta\sin\theta$$
$$\sin(n+1)\theta=\sin n\theta\cos\theta+\cos n\theta\sin\theta$$

得到恆等式

$$T_{n+1}(x)=xT_n(x)-(1-x^2)U_{n-1}(x),$$
$$U_n(x)=xU_{n-1}(x)+T_n(x).$$

又從

$$\frac{d^2\cos n\theta}{d\theta^2}=-n^2\cos n\theta,\ \frac{d^2\sin n\theta}{d^2\theta^2}=-n^2\sin n\theta$$

獲得 $T_n(x)$ 與 $U_n(x)$ 所滿足的微分方程

$$(1-x^2)T_n''(x)-xT_n'(x)+n^2T_n(x)=0,$$

$$(1-x^2)U_n''(x)-3xU_n'(x)+n(n+2)U_n(x)=0.$$

從 $\{\sin n\theta\}$ 以及 $\{\cos n\theta\}$ 在 $[0,\pi]$ 上的直交性，就知道

$$\int_{-1}^{+1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}T_m(x)T_n(x)dx=0\quad(m\neq n),$$

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,U_m(x)U_n(x)dx=0\quad(m\neq n).$$

因此在 $[-1,1]$ 上，$\{T_n(x)\}$ 與 $\{U_n(x)\}$ 分別關於權 $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ 和 $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ 具有直交性.

利用切勒肖夫多項式系，我們能證如下的

定理 2*. *設 $\{P_n(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上從權 $\tau(x)$ 得來的就範直交多項式系，$P_n(x)$ 的次數是 n. 設*

$$f(x)\sim\Sigma c_nP_n(x),$$

$$\sqrt{(x-a)(b-x)}\,\tau(x)\leqslant A,$$

則當 $f(x)$ 是有界變差時，級數 $\Sigma|c_n|^p$ 對於任何大於 1 的 p 都收斂.

證明 作變換 $t=\dfrac{2x-a-b}{b-a}$，則 $a\leqslant x\leqslant b$ 變爲 $-1\leqslant t\leqslant 1$，而關於權的條件變爲

$$\sqrt{1-t^2}\quad\tau_1(t)\leqslant A_1,$$

此地

$$\tau_1(t)=\tau\left(\frac{(b-a)t+(a+b)}{2}\right),A_1=\frac{2A}{b-a}.$$

由是不妨假設 $a=-1$，$b=1$. 並且我們可以假設 $p<2$.

設 $\lambda=\dfrac{2}{p}$，$\dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{1}{\mu}=1$，則 $\mu=\dfrac{2}{2-p}$；$\lambda>1$，$\mu>1$. 利

---

* П. Л. 烏里牙諾夫(Ульянов), М. сб. 40 (1956).

用赫耳竇不等式，得到

$$\sum_{k=1}^{m} |c_k|^p \cdot \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{k} 1 = \sum_{n=1}^{m} \sum_{k=n}^{m} \frac{|c_k|^p}{k} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{m} \left\{ \sum_{k=n}^{m} |c_k|^2 \right\}^{\frac{1}{\lambda}} \left\{ \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k^{\mu}} \right\}^{\frac{1}{\mu}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{1}{\mu-1} \frac{2}{n^{\mu-1}} \right)^{\frac{1}{\mu}} \left(\sum_{k=n}^{m} c_k^2 \right)^{\frac{1}{\lambda}}.$$

由是

$$\sum_{k=1}^{m} |c_k|^p \leqslant B \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=n}^{m} c_k^2 \right)^{\frac{p}{2}}, \tag{1}$$

此地 $B = \left(\frac{2}{\mu-1} \right)^{\frac{1}{\mu}} = \left(\frac{4-2p}{p} \right)^{\frac{2-p}{2}}$.

另一方面，從 $f(x) \sim \Sigma c_k P_k(x)$ 和 $f(x) \sim \Sigma a_k T_k(x)$，得到

$$\sum_{k=n}^{\infty} c_k^2 = \int_{-1}^{1} \tau(x) \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} c_k P_k(x) \right)^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-1}^{1} \tau(x) \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k T_k(x) \right)^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant A \int_{-1}^{1} \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k T_k(x) \right)^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{2}$$

因此 $\sum_{n}^{\infty} c_k^2 \leqslant A \sum_{n}^{\infty} a_k^2$. 置 $x = \cos\theta$，則得

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} f(x) T_k(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(\cos\theta) \cos k\theta \, d\theta.$$

由於 $f(x)$ 是一有界變差的函數，所以——經過分離積分就知道——$ka_k = O(1)$. 因此

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^p \leqslant B \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=n}^{\infty} O\left(\frac{1}{k^2} \right) \right)^{\frac{p}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant B_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty.$$

定理證畢.

現在研究這樣的問題. 設在$[a,b]$中$f(x)$滿足如下的條件: 對於$[a,b]$中任何兩點x, x', 成立着

$$|f(x') - f(x)| \leqslant M |x' - x|^{\alpha}, \ (\alpha > 0) \tag{3}$$

我們稱$f(x)$在$[a,b]$中滿足α級的李普西茲條件, 以記號$f(x) \in \in \mathrm{Lip}\,\alpha$表示此事. 當$\alpha > 1$時, 易知$f(x)$是一常數; 因此我們假設$\alpha \leqslant 1$. 當$f(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$時, 怎樣的$p$, 才能使級數$\Sigma |c_k|^p$收斂? 首先建立下面的

引理 設$f(\theta)$是一可積$(-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi)$的週期函數, 週期是$2\pi$. 假如$f(\theta) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $(\alpha < 1)$則$f(\theta)$的富理埃級數的算術平均$\sigma_n(\theta)$與$f(\theta)$之差為$O(n^{-\alpha})$. 詳細地說: (3)含有

$$\sigma_n(\theta) - f(\theta) \leqslant \frac{AM}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{n^{\alpha}},$$

A是一絕對常數.

證明 由於(§4)

$$\sigma_n(\theta) - f(\theta) = \frac{1}{2n\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{\sin^2 \frac{t}{2}} \{f(\theta+t) + f(\theta-t) - \tau f(\theta)\} dt$$

$$= I_1 + I_2.$$

$$|I_1| \leqslant \frac{1}{2n\pi} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{\sin^2 \frac{t}{2}} 2M \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha} dt \leqslant \frac{M}{n^{\alpha}},$$

$$|I_2| \leqslant \frac{1}{2n\pi} \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{\sin^2 \frac{t}{2}} 2Mt^{\alpha} dt \leqslant \frac{M\pi}{n} \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} t^{\alpha-2} dt,$$

所以 $|\sigma_n(\theta) - f(\theta)| \leqslant \frac{M}{n^{\alpha}}\left(1 + \frac{\pi}{1-\alpha}\right)$,引理證畢.

定理 3.* 設 $\sqrt{(x-a)(b-x)}\tau(x) \leqslant A\ (a \leqslant x \leqslant b)$, $\{P_n(x)\}$ 從 $\tau(x)$ 產生的直交多項式敘列, $P_n(x)$ 的次數是 n. 設 $f(x) \sim \Sigma c_n P_n(x)$, $f(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, 則級數

$$\Sigma |c_n|^p$$

當 $p > \frac{2}{2\alpha+1}$ 時收斂.

證明 設 $a = -1$, $b = 1$. 置 $x = \cos\theta$, 則由(2),

$$\sum_{k=n}^{\infty} c_k^2 \leqslant A \int_{-1}^{1} \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k T_k(x)\right)^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= A \int_0^{\pi} \{f(\cos\theta) - t_{n-1}^*(\theta)\}^2 d\theta.$$

此地 $t_{n-1}^*(\theta) = \sum_{k-1}^{n-1} a_k T_n(\cos\theta)$ 是一個 $n-1$ 次的三角多項式.
對於 $n-1$ 次多項式 $Q_{n-1}(x)$, 成立着

$$\int_{-1}^{1} \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k T_k(x)\right)^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \min_{Q_{n-1}} \int_{-1}^{1} (f(x) - Q_{n-1}(x))^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

因此對於 $n-1$ 次的 $\cos\theta$ 的多項式 $t_n(\theta)$ 成立着

$$\int_0^{\pi} \{f(\cos\theta) - t_{n-1}^*(\theta)\}^2 d\theta \leqslant \int_0^{\pi} \{f(\cos\theta - t_{n-1}(\theta))\}^2 d\theta.$$

$f(\cos\theta)$ 的富理埃級數是一餘弦級數,它的算術平均 $\sigma_n(\theta)$, 關於 $\cos\theta$ 是 $n-1$ 的多項式;由是

$$\sum_{k=n}^{\infty} |c_k^2| \leqslant A \int_0^{\pi} \{f(\cos\theta) - \sigma_n(\theta)\}^2 d\theta.$$

當 $f(\theta) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ 時, $\beta < \alpha$ 的話, $f(\theta)$ 也屬於 $\mathrm{Lip}\,\beta$, 因此我們不

---

* 科學記錄,新輯第一卷第二期(1957).

妨假設 $\alpha<1$. 從引理知道

$$\sum_{k=n}^{\infty}|c_k^2|\leqslant\left(\frac{A_\alpha M}{n^\alpha}\right)^2,$$

A_α 是與 α 有關的常數,又從(1)得到

$$\sum_{k=1}^{m}|c_k|^p\leqslant K\sum_{n=1}^{m}n^{-p(\frac{1}{2}+\alpha)},\quad (K:\text{常數}),$$

故當 $p\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)>1$ 時, $\Sigma|c_k|^p$ 收斂. 定理證畢.

系 1 設 $f(x)\in\mathrm{Lip}\,1$ 則 $\Sigma|c_k|^{1-\varepsilon}$ 當 $\varepsilon<\frac{1}{3}$ 時收斂.

系 2 設 $f(x)\in\mathrm{Lip}\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)(\varepsilon>0)$則級數 Σc_k 絕對收斂.

對於三角級數, 系 2 是 C. H. 別恩許纛因的定理. 系 2 中的正數 ε 是不許取消的,證明見齊革蒙特的"三角級數"(1935)§6.33.

9. 有界變差函數之富理埃級數的絕對收斂 首先建立

引理 若 $a_n\to 0$ 且 $\Sigma(n+1)|\Delta^2a_n|<\infty$ 則 $\Sigma a_n\cos n\theta$ 是一富理埃級數.

證明 置 $\frac{1}{2}+\cos n+\cdots+\cos nx=D_n(x)$, $D_0(x)+D_1(x)+$ $+\cdots+D_n(x)=K_n(x)$, 則

$$(n+1)K_n(x)=\frac{1}{2}\left(\sin(n+1)\times\frac{1}{2}x/\sin\frac{1}{2}x\right)^2.$$

由是

$$S_n(x)=\frac{1}{2}a_0+a_1\cos x+\cdots+a_n\cos nx=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{n}\Delta^2a_\nu(\nu+1)K_\nu(x)+K_n(x)(n+1)\Delta a_{n+1}+D_n(x)a_{n+1},$$

在 $0<x<2\pi$ 中,最後兩項當 $n\to\infty$ 時的極限等於 0. 由於級數

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}|\Delta^2a_\nu|(\nu+1)\int_0^{2\pi}K_\nu(x)dx=\pi\sum_{\nu=0}^{\infty}(\nu+1)|\Delta^2a_\nu|$$

收斂,並且 $K_\nu(x)\geqslant 0$,所以從富弼尼定理,級數 $\Sigma\Delta^2a_\nu(\nu+1)K_\nu(x)$

實質上收斂於一可積函數

$$f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

引理證畢.

有界變差的函數,其富理埃係數 a_n 和 b_n 都是 $O\left(\frac{1}{n}\right)$, 但是 $\Sigma(|a_n| + |b_n|)$ 未必收斂,例如

$$\frac{\pi - \theta}{2} = \sum_{1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n} \quad (0 < \theta \leq \pi).$$

甚至全連續函數,其富理埃也不一定到處絕對收斂,舉例於下:由於

$$a_n = \frac{1}{\log n} \quad (n = 2, 3, \cdots)$$

適合 $a_n = o(1)$ 與 $\Delta^2 a_n = O\left(\frac{1}{n^2 \log^2 n}\right)$,所以,由引理,

$$\sum_{2}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{\log n}$$

是一富理埃級數,因此 $\sum_{2}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n \log n}$ 是一全連續函數,但是 $\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ 並不收斂.

我們將建立如下的

定理 1. 設 $f(\theta) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$ 是有界變差函數 $f(\theta)$ 的富理埃級數. 假如 $f(\theta)$ 是處處連續,它的連續模 $\omega(t)$ 能使積分

$$\int_{0}^{c} \frac{\sqrt{\omega(t)}}{t} dt \quad (c > 0) \tag{1}$$

收斂,那末級數 $\Sigma(|a_n| + |b_n|)$ 收斂.

證明 由於 $\Sigma(a_n^2 + b_n^2)$ 是一收斂級數,所以當 $0 < p < 2$ 時,從 §8 的(1)得到

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)^{\frac{p}{2}} \leqslant B_p \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\right)^{\frac{p}{2}}. \qquad (1)$$

置 $2^\nu = N,\ \dfrac{\pi}{2N} = \eta,\ S_\nu = \displaystyle\sum_{k=\frac{1}{2}N+1}^{N}(a_k^2+b_k^2)$，注意到

$$f(\theta+\eta)-f(\theta-\eta)=\sum_1^{\infty} 2\sin n\eta(-a_n\sin n\theta+b_n\cos n\theta),$$

從派色伐耳等式得到

$$2\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\sin^2\eta k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f(\theta+\eta)-f(\theta-\eta))^2 d\theta.$$

左邊不小於

$$\sum_{k=\frac{1}{2}N+1}^{N}(a_k^2+b_k^2)2\sin^2 k\eta \geqslant S_\nu.$$

因此

$$S_\nu \leqslant \frac{1}{2N}\sum_{k=1}^{2N}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f(\theta+2k\eta)-f(\theta+2k\eta-2\eta))^2 d\theta$$

$$\leqslant \omega(2\eta)\frac{1}{4N\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=1}^{2N}|f(\theta+2k\eta)-f(\theta+2k\eta-2\eta)|\,d\theta.$$

設 $f(\theta)$ 在 $[0,\ 2\pi]$ 上的全變差是 V，則得

$$S_\nu \leqslant \frac{V}{2N}\omega(2\eta). \qquad (2)$$

當 $2^{\nu-1}\leqslant n<2^\nu$ 時，

$$\sum_{k=n}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\leqslant S_\nu+S_{\nu+1}+\cdots\leqslant V\left[\frac{\omega(2^{-\nu}\pi)}{2^{\nu+1}}+\cdots\right]$$

$$\leqslant V\frac{\omega\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}{n}\leqslant 4V\frac{\omega\left(\dfrac{1}{n}\right)}{n}.$$

由是(1)簡化成

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)^{\frac{p}{2}}\leqslant K_p\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{p}{2}}, \qquad (3)$$

$K_p = B_p(4V)^{\frac{p}{2}}$ 是一常數. 當 $p = 1$ 時,級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sqrt{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}$$

與積分 $\int_0^1 \sqrt{\omega(t)}/t\,dt$ 同時收斂或同時發散. 定理 1 證畢.

由於級數 $\Sigma\left(n^{-2}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{p}{2}}$ 當 p 大於

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log n}{\log n - \frac{1}{2}\log \omega\left(\frac{1}{n}\right)} \tag{4}$$

時就收斂,所以我們還有下述

定理 2. 在定理 1 的情況下, 級數

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^p + |b_k|^p) \tag{5}$$

當 p 大於(4)時收斂.

又因級數 $\Sigma\left(n^{-1}\sqrt{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}\right)^p$ 與積分

$$\int_0^1 (t\sqrt{\omega(t)})^p \frac{dt}{t^2} \tag{6}$$

同時收斂或同時發散,故又得下述

定理 2′. 在定理 1 的情況下當積分(6)收斂時,級數(5)收斂.

系 假如有界變差的函數 $f(\theta)$ 屬於 Lip α, 那末級數當 $p > \frac{2}{2+\alpha}$ 時收斂.

最初齊革蒙特光是證明:有界變差的函數屬於 Lip α 的話,它的富理埃級數一定絕對收斂,划拉斯基惟斯 (Waraczkiewicz) 馬上(1929)指出上述的系成立. 後來(1934)齊革蒙特證明此系中的指數 $\frac{2}{2+\alpha}$ 是不可以降低的. 現在將定理 2 轉成關於直交多項式的命題.

定理 3. 設乘積$\sqrt{(x-a)(b-x)}\tau(x)$在區間$[a,b]$上是有界，$\{P_n(x)\}$是從$\tau(x)$所決定的直交多項式系，

$$f(x)\sim\Sigma c_nP_n(x).$$

假如$f(x)$在$[a,b]$中是有界變差，並且是連續的，其連續模是$\omega(\delta)$，那末當

$$p>\limsup_{n\to\infty}\frac{\log n}{\log n-\frac{1}{2}\log\omega\left(\frac{1}{n}\right)}$$

時，或是當積分(6)收斂時，級數$\Sigma|c_n|^p$收斂；特別當$f(x)$屬於$\mathrm{Lip}\,\alpha$時，此級數當$p>\frac{2}{2+\alpha}$時收斂.

證明 從 §8 的(1)得到

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^p\leqslant B_p\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R_n}{n}\right)^{\frac{p}{2}},$$

但$0<p<2$，$R_n=c_n^2+c_{n+1}^2+\cdots$，$[a,b]=[-1,1]$. 又由 §8 的(2)得到

$$R_n\leqslant A\int_0^{\pi}\left(f(\cos\theta)-\sum_{k=0}^{n-1}a_k\cos k\theta\right)^2d\theta=A\sum_{n}^{\infty}a_\nu^2,$$

但$f(\cos\theta)\sim\Sigma a_k\cos k\theta$. 那末由定理 1 的證明，從

$$2\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\sin^2 n\eta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f(\cos(\theta+\eta))-f(\cos(\theta-\eta)))^2d\theta,$$

$\eta=2^{-1-\nu}\pi$，得到 $R_n\leqslant\frac{2AV}{n}\omega\left(\frac{1}{n},f\right)$，此地$V$表示$f(\cos\theta)$在$(0,2\pi)$中的全變差. 所以有常數$K_p$適合

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^p\leqslant K_p\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sqrt{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}\right)^p. \tag{7}$$

這個不等式證明了定理中所述一切結果. 定理證畢.

10. 連續函數的收斂指數 設

$$f(\theta)\sim\frac{1}{2}a_0+\sum_{1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta), \tag{1}$$

則當 $f(\theta)\in \mathrm{Lip}\,\alpha$，並且 $\alpha>\frac{1}{2}$ 時，(1) 絕對收斂；一般地說：當 $p>\frac{2}{2\alpha+1}$ 時，級數 $\Sigma(|a_n|^p+|b_n|^p)$ 收斂．假如 $f(\theta)$是有變差，那末此級數當 $p>\frac{2}{\alpha+2}$ 時就收斂，這些都是說過的定理．並且我們已經獲得比這些結果更深刻的定理．現在對於光是具有連續性的 $f(\theta)$，要研究能使級數 $\Sigma(|a_n|^p+|b_n|^p)$ 收斂的 p．

引理 設連續(週期)函數 $f(\theta)$ 的連續模是 $\omega(\delta)$，則對於任一正整數 n，必有"次數"不高於 n 的三角多項式

$$t_n(\theta)=\sum_{k=0}^{n}(\alpha_k\cos k\theta+\beta_k\sin k\theta)$$

適合 $|f(\theta)-t_n(\theta)|\leqslant A\omega(n^{-1})$，$A$ 是一絕對常數．

證明 由於 $2(n+1)K_n(\theta)=n+1+2\sum\limits_{k=1}^{n}(n+1-k)\times\cos k\theta$ 是 n 次的，所以它的平方是 $2n$ 次的，它的平方的積分是

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right)^4dt=(n+1)^2+4\sum_{1}^{n}k^2=$$

$$=(4n^4+\cdots+3)/3.$$

顯然地

$$t_{2n}(\theta)=\frac{3}{(4n^4+\cdots+3)\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left(\frac{\sin(n+1)\frac{t-\theta}{2}}{\sin\frac{t-\theta}{2}}\right)^4dt$$

也是一個 $2n$ 次的三角多項式，

$t_{2n}(\theta)-f(\theta)=$

$$=\frac{3}{(n+1)(4n^2+5n+3)\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(t)-f(\theta))\left(\frac{\sin(n+1)\frac{t-\theta}{2}}{\sin\frac{t-\theta}{2}}\right)^4dt=$$

$$= \frac{3}{(n+1)(4n^2+5n+3)\pi}\int_0^\pi \varphi_\theta(t)\left(\frac{\sin\frac{(n+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^4 dt,$$

此地 $\varphi_\theta(t) = f(\theta+t)+f(\theta-t)-2f(\theta)$, 它的絕對值不大於 $2\omega(t)$. 設 $[nt] = M$, 則從

$$f(\theta+t)-f(\theta) = f\left(\theta+nt\cdot\frac{1}{n}\right)-f(\theta) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{M-1}\left(f\left(\theta+\frac{\nu+1}{n}\right)-f\left(\theta+\frac{\nu}{n}\right)\right)+$$

$$+\left(f(\theta+t)-f\left(\theta+\frac{M}{n}\right)\right)$$

得到 $\omega(t)\leqslant(M+1)\omega\left(\frac{1}{n}\right)\leqslant(nt+1)\omega\left(\frac{1}{n}\right)$. 由是

$$|t_{2n}(\theta)-f(\theta)|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{6\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{(n+1)(4n^2+5n+3)\pi}\int_0^\pi(nt+1)\left(\frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^4 dt =$$

$$=2\omega\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{6\omega\left(\frac{1}{n}\right)n}{(n+1)(4n^2+5n+3)}\int_0^\pi t\left(\frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^4 dt.$$

最後的積分等於

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\left(\frac{\sin(n+1)t}{\sin t}\right)^4 dt = 2\left(\int_0^{\frac{1}{n+1}}+\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{\pi}{2}}\right)t\left(\frac{\sin(n+1)t}{\sin t}\right)^4 dt\leqslant$$

$$\leqslant 2(n+1)^4\int_0^{\frac{1}{n+1}} t\,dt+\left(\frac{\pi}{2}\right)^4\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{t^3}<A_1n^2,$$

$A_1, A_2, \cdots$ 都是絕對常數. 因此

$$|t_{2n}(\theta)-f(\theta)|\leqslant\left(2+\frac{6A_1n^3}{(n+1)(4n^2+5n+3)\pi}\right)\omega\left(\frac{1}{n}\right)\leqslant$$
$$\leqslant A\omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

引理證畢。

定理 1. 設連續函數 $f(\theta+2\pi)\equiv f(\theta)$ 的連續模是 $\omega(\delta)$，那末當 p 大於

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\log n}{\frac{1}{2}\log n-\log\omega\left(\frac{1}{n}\right)}$$

時級數 $\Sigma(|a_n|^p+|b_n|^p)$ 收斂. 事實上，當 $0<p\leqslant 2$ 時，

$$\Sigma(|a_n|^p+|b_n|^p)\leqslant K_p\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)^p.$$

右方的級數和積分 $\int_0^1(\sqrt{t}\,\omega(t))^p t^{-2}\,dt$ 同時收斂或同時發散.

當 $f\in\mathrm{Lip}\,\alpha$ 時，由此得到沙思(Szàsz)的定理，此時的指數條件 $p>\frac{2}{2\alpha+1}$ 是不可以改進的(見齊革蒙特的三角級數).

證明 由 §9 的(1)得到

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)^{\frac{p}{2}}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}R_n\right)^{\frac{p}{2}}\quad(0<p<2),\tag{1}$$

此地

$$R_n=\sum_{k=n}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(f(\theta)-S_{n-1}(\theta))^2d\theta,$$

但 $S_{n-1}(\theta)$是(1)的最初 n 項之和. 最後的積分等於

$$\min_{\alpha_0,\cdots,\alpha_{n-1};\,\beta_0,\cdots,\beta_{n-1}}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(f(\theta)-\sum_{\nu=0}^{n-1}(\alpha_\nu\cos\nu\theta+\beta_\nu\sin\nu\theta)\right)^2d\theta.$$

由引理，這是小於 $A_1\omega^2\left(\frac{1}{n}\right)$的. 由是得到

$$R_n \leqslant A\omega^2\left(\frac{1}{n}\right). \tag{2}$$

從(1)與(2),得到

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)^{\frac{p}{2}} \leqslant A\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)^p.$$

這裏 $A_1, A_2, \cdots$ 都是常數,由於 $a^p+b^p \leqslant 4(a^2+b^2)^{\frac{p}{2}}$. 所以

$$\Sigma(|a_n|^p+|b_n|^p) \leqslant A_p\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)^p.$$

又因

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)^p = n^{-\left(\frac{1}{2}-\frac{\log\,\omega\,\left(\frac{1}{n}\right)}{\log n}\right)p},$$

故定理中所述一切結果都成立. 定理證畢.

定理 2. 設在區間 (a, b) 中,乘積$\sqrt{(x-a)(b-x)}\,\tau(x)$是有界,$\{P_n(x)\}$ 是從 $\tau(x)$ 產生的直交多項式系,$P_n(x)$的次數是 n,那末當連續函數 $f(x)$ 的連續模是 $\omega(\delta)$時, 級數 $\Sigma|c_n|^p$ 對於

$$p > \limsup_{n\to\infty}\frac{\log n}{\frac{1}{2}\log n-\log\omega\left(\frac{1}{n}\right)}$$

收斂,但 $f(x)\sim\Sigma c_n P_n(x)$. 事實上,

$$\Sigma|c_n|^p \leqslant K_p\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)^p.$$

證明　從§8 的(1)得到

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^p \leqslant B_p\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}R_n\right)^{\frac{p}{2}}.$$

此地 $R_n = c_n^2+c_{n+1}^2+\cdots$. 由§8 的(2),

$$R_n \leqslant A\int_0^{\pi}\left(f(\cos\theta)-\sum_{k=0}^{n-1}a_k\cos k\theta\right)^2 d\theta.$$

但 $\Sigma a_n \cos n\theta$ 是 $f(\cos\theta)$ 的富理埃級數。因此

$$R_n \leqslant A \min_{a_0, \cdots, a_{n-1}} \int_0^\pi \left(f(\cos\theta) - \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu \cos \nu\theta\right)^2 d\theta.$$

由引理，此積分等於 $O\left(\omega^2\left(\frac{1}{n}\right)\right)$. 所以

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^p \leqslant K_p \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)^p.$$

定理證畢。

第九章 習題

1. 證明函數列 $\sin nx (n = 1, 2, \cdots)$ 在區間 $0 \leqslant x \leqslant \pi$ 中成一完備的直交函數列，但是下面函數列

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots$$

在 $0 \leqslant x \leqslant \pi$ 中並不成一直交函數列。

2. 設 $x_n^{(k)}(t)$ 在 $\left[\frac{2k-2}{2^{n+1}}, \frac{2k-1}{2^{n+1}}\right)$ 中等於 $\sqrt{2^n}$，在 $\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}, \frac{2k}{2^{n+1}}\right]$ 中等於 $-\sqrt{2^n}$，在 $[0, 1]$ 中其他的點等於 0，但

$$k = 1, 2, \cdots, 2^n; \ n = 0, 1, 2, \cdots$$

證明：當 $m > n$ 時

$$\int_0^1 x_m^{(k)}(t) x_n^{(j)}(t) dt = 0.$$

注意 $\{x_n^{(k)}(t)\}$ 是哈爾 (A. Haar) 的函數列，它在 $[0, 1]$ 中具有完備性。

3. 假如直交函數系 $\{\varphi_n(x)\}$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ 對於任一階梯函數是完備的，那末它是一個完備系統。

4. 設 $0 < x < \pi$，試用數學歸納法證明

$$S_n(x) = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \cdots + \frac{\sin x}{n} > 0 \ (n = 1, 2, \cdots),$$

事實上，當 $S_{n-1}(\xi)>0$，$S_n(\xi)=0$ 時，從

$$0=2\sin\frac{\xi}{2}S_n(\xi)=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi-\sin\frac{\xi}{2}$$

得到 $\sin n\xi=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi\cos\frac{1}{2}\xi-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi\sin\frac{1}{2}\xi\geqslant 0$.

因此 $S_n(\xi)>0$。利用這個方法，證明

$$S_n(x)-S_m(x)\quad(n>m)$$

在區間 $0<x<\frac{\pi}{m+1}$ 中是正的.

5. 證明

$$\rho_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi\left|\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\right|dt\to\infty\quad(n\to\infty)$$

利用此事實，證明：

連續函數的富理埃級數不一定到處收斂.

6. 求解積分方程組

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\sin(2n+1)xf(x)dx=\frac{1}{2n+1}\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

但 $f(-x)=-f(x)$，$f(x+2\pi)=f(x)$.

7. 設 $0<p<2$，$\Sigma|a_n|^p<\infty$。證明直交函數級數 $\Sigma a_n\varphi_n(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$經過任意變更項的順序，實質上收斂.

8. 設 $|f(\theta')-f(\theta)|\leqslant M|\theta'-\theta|$，則 $f(\theta)$的富理埃級數的算術平均 $\sigma_n(\theta)$適合

$$|\sigma_n(\theta)-f(\theta)|\leqslant MA\log n/n,$$

A 是一絕對常數.

第十章

綫性泛函數

1. 函數族 $L^2(e)$. 設 e 是歐幾里得空間中之一點集，其測度 $|e|$ 是有限或是無限(就是說，有測度可言的)．又設 $f(x)$ 是在 e 上定義的函數，其函數值可以爲複數．記複數 $z=x+iy$ 的共軛數 $x-iy$ 爲 $\bar{z}$．我們考慮下面兩個積分

$$\int_e f(x)\overline{f(x)}\,dx \text{ 和 } \int_e f(x)\,dx$$

都存在的 $f(x)$，這種函數 $f(x)$ 的全體成一函數族 $L^2(e)$．若 $f(x)$ 與 $g(x)$ 都屬於 $L^2(e)$，則 $f(x)\overline{g(x)}$ 屬於 $L(e)$．稱積分

$$(f,g)=\int_e f(x)\,\overline{g(x)}\,dx$$

爲 f 和 g 的數量乘積．顯然地，等式

$$(f,g)=\overline{(g,f)}$$

成立．因此 $(f,f)\geqq 0$．在 $L^2(e)$ 中我們稱

$$(f,f)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\int_e |f(x)|^2dx}=\|f\|$$

爲 f 的模．從敏高夫斯基的不等式，知道 $\|f+g\|\leqq\|f\|+\|g\|$．因此，

$$\|f_1-f_2\|\leqq\|f_1-f_3\|+\|f_2-f_3\|.$$

這樣一來，我們可以把函數族 $L^2(e)$ 看做空間，稱它爲泛函數空間 $L^2(e)$．上面的不等式，相當於三點不等式．$L^2(e)$ 中的函數 f，是這個空間的一個點，$\|f-g\|$ 是 f 和 g 的距離；當 $\|f-g\|=0$ 時，視 f 與 g 爲同一點．

設 $f_n\in L^2(e)$，$f\in L^2(e)$，當 $\|f_n-f\|\to 0$ 時，稱敍列 $\{f_n\}$ 平均收斂於 f，或稱 $\{f_n\}$ 强(性收)斂於 f_0．現在建立一般的黎斯和菲

蕭的定理.

定理 1. $\{f_n\}$ 在 $L^2(e)$ 中强斂的充要條件是當 $m, n\to\infty$ 時,

$$\|f_m - f_n\|\to 0.$$

證明 假如 $\|f_n - f\|\to 0$, 那末當 $m, n\to\infty$ 時,

$$\|f_m - f_n\|\leqslant\|f_m - f\| + \|f - f_n\|\to 0.$$

這是證明條件的必要性. 現在證明條件的充足性.

選取如下的正整數列 $m_k(k = 1, 2, \cdots)$: $m_1 < m_2 < \cdots$, 當 $n > m_k$ 時,

$$\|f_n - f_{m_k}\| < 2^{-k}.$$

由是, 當 e 的子集 e' 的測度爲有限時,

$$\int_{e'}|f_{m_{k+1}}(x) - f_{m_k}(x)|\,dx\leqslant|e'|^{\frac{1}{2}}2^{-k}.$$

由是可知級數 $\Sigma|f_{m_{k+1}}(x) - f_{m_k}(x)|$ 是概收斂的. 因此, 級數

$$f_{m_1}(x) + \Sigma(f_{m_{k+1}}(x) - f_{m_k}(x))$$

實質上收斂於一函數 $f(x)$. 就是說: $f_{m_k}(x)\to f(x)$. 由於

$$\|f_{m_k}\|\leqslant\|f_{m_k} - f_{m_1}\| + \|f_{m_1}\| < \frac{1}{2} + \|f_{m_1}\|,$$

從法都引理得到 $\|f\|\leqslant\frac{1}{2} + \|f_{m_1}\|$. 所以 $f(x)\in L^2(e)$.

設 $m_r\leqslant\min(n, m_k)$, 則

$$\|f_{m_k} - f_n\|\leqslant\|f_{m_k} - f_{m_r}\| + \|f_n - f_{m_r}\| < 2.2^{-r}.$$

再用法都引理, $\|f - f_n\|\leqslant 2^{1-r}$. 由是得到

$$\|f - f_n\|\to 0.$$

最後, 我們注意這樣的 f, 實質上只有一個. 事實上, 當 $\|f^* - f_n\|\to 0$, $\|f_n - f\|\to 0$ 時,

$$\|f^* - f\|\leqslant\|f^* - f_n\| + \|f - f_n\|\to 0.$$

定理證明完畢.

系 1 當 $\|f_n - f\|\to 0$ 時, 關係 $(f_n, g)\to(f, g)$ 對於 $L^2(e)$ 中任何函數 g 成立.

證明 $|(f_n, g)-(f, g)|=|(f_n-f, g)|\leqslant\|f_n-f\|\cdot\|g\|\to 0.$

此地我們要留意：當 $(f_n, g)\to(f, g)$ 對於 $L^2(e)$ 中任何 $g(x)$ 成立時，$\{f_n\}$ 未必强斂於 f. 事實上，關係

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\sin nx\, g(x)\, dx = 0$$

對於 $g(x)\in L^2(0,\pi)$ 成立，但是當 $n\neq m$ 時 $\|\sin nx-\sin mx\|= =\sqrt{\pi}$.

當 $(f_n, g)\to(f, g)$ 對於 $L^2(e)$ 中任何 g 成立時，我們稱 $\{f_n\}$ 弱斂於 f.

系 2 當 $\|f_n-f\|\to 0$ 時，$\|f_n\|\to\|f\|$. 假如 $\{f_n\}$ 光是弱斂於 f, 那末 $\|f_n\|$ 未必收斂於 $\|f\|$.

證明 從 $\|f_n\|\leqslant\|f_n-f\|+\|f\|$ 和 $\|f\|\leqslant\|f-f_n\|+ +\|f_n\|$ 得 $\|f_n\|\to\|f\|$. 但是，由上述，$\{\sin nx\}$ 在 $[0, \pi]$ 中弱斂於 0 而 $\|\sin nx\|=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. 證明完畢.

定理 2. 在 $L^2(e)$ 中，假如 $\{f_n\}$ 弱斂於 f, 並且 $\|f_n\|$ 收斂於 $\|f\|$, 那末 $\{f_n\}$ 强斂於 f.

證明 事實上，

$$\begin{aligned}\|f-f_n\|^2 &= (f-f_n, \bar{f}-\bar{f}_n)\\ &= \|f\|-(f, f_n)-(f_n, f)+\|f_n\| \qquad (1)\end{aligned}$$

的極限是 $\|f\|-(f, f)-(f, f)+\|f\|=0$.

綫性泛函數 對於空間 $L^2(e)$ 中的任一元素 g, 定義着一個數值 $A(g)=Ag$, 假如它具有

1° 加減性：$A(g_1+g_2)=Ag_1+Ag_2$,

2° 整齊性：當 c 是一常數時，$A(cg)=cA(g)$,

3° 有界性：$|A(g)|\leqslant M\|g\|$, 對於 $L^2(e)$ 中一切 g 成立

三個性質，稱 $A(g)$ 是 $L^2(e)$ 中的一個有界綫性泛函數，或是簡稱爲綫性泛函數. 此地的 M, 光是與 A 有關而與 $L^2(e)$ 中個別的元素無關係，稱這種最小的 M_1 爲 A 的模，記它做 $\|A\|$. 這樣，3°

可以改寫爲

$$|A(g)| \leqslant \|A\| \, \|g\|.$$

定理 3. 空間 $L^2(e)$ 中之綫性泛函數的一般形式是 $A(g) = (g, f)$，此地的 $f(x)$——$A(g)$ 的母函數——是由 A 唯一地決定，它的模 $\|f\|$ 等於泛函數的模 $\|A\|$.

證明 設 $u \in L^2(e)$, $v \in L^2(e)$ 則由(1)，得到

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2. \tag{2}$$

這是表明：平行四邊形的四邊平方和等於兩對角綫的平方和。

在"單位球面"$\|g\| = 1$ 上，我們考慮 $|Ag|$ 的上界：置

$$\max_{\|g\|=1} |A(g)| = M_A.$$

那末存在着如下的敍列 $\{g_n\}$：

$$\|g_n\| = 1, \quad |Ag_n| \to M_A.$$

由 $A(g)$ 的整齊性，我們可以假設 $A(g_n) \geqslant 0$，因此 $A(g_n) \to M_A$. 從(2)通過 3°，得到

$$\|g_m - g_n\|^2 = 4 - \|g_m + g_n\|^2 \leqslant 4 - \frac{1}{M_A^2}[Ag_m + Ag_n]^2 \to 0.$$

因此，從黎斯-菲蕭定理，敍列 $\{g_n\}$ 强斂於一個函數 g^*，$\|g^*\| = 1$. 又因

$$|Ag^* - Ag_n| = |A(g^* - g_n)| \leqslant M_A \|g^* - g_n\| \to 0,$$

所以 $Ag^* = M_A$. 就是說：在單位球面上，泛函數 Ag 達到它的上界 M_A，乃是被 g^* 所達到的.

簡寫 $f(x) = M_A g^*(x)$，我們要證 $Ag = (g, f)$. 此式當 $g = g^*$ 時，自然成立. 現在證明此式當 $Ag = 0$ 時也成立. 就是說，要從 $Ag = 0$ 導出 $(g, g^*) = 0$. 爲此不妨假設 $\|g(x)\| \neq 0$，置

$$\lambda = \frac{(g^*, g)}{(g, g)},$$

則從

$$M_A^2 = (Ag^*)^2 = [A(g^* - \lambda g)]^2 \leqslant M_A^2 \|g^* - \lambda g\|^2 =$$
$$= M_A^2[1 - \lambda(g, g^*) - \bar{\lambda}(g^*, g) + \lambda\bar{\lambda}(g, g)]$$

得 $0=\lambda(g,g^*)+\bar{\lambda}(g^*,g)-\lambda\bar{\lambda}(g,g)$，由是$(g,g^*)=0$。總而言之，當 $g=g^*$ 或 $Ag=0$ 時，成立着等式

$$A(g)=(g,f).$$

對於 $L^2(e)$ 中任一元素 g，作 $g_1=\frac{Ag}{Ag^*}g^*$，則從 $A(g_1-g)=0$ 得

$$A(g_1-g)=(g_1-g,f).$$

由是

$$A(g)=A(g_1),\ (g,f)=(g_1,f).$$

從 $A(g_1)=(g_1,f)$即得 $A(g)=(g,f)$.

由於 $Ag^*=M_A\|g^*\|$, $M_A=\|f\|$，所以 $\|A\|=\|f\|$. 定理證畢。

當$\{f_n\}$弱斂於 L^2 中某一元素 f 時，我們也可以說，泛函數列 $A_ng=(g,f_n)$ 收斂於 $Ag=(g,f)$. 現在證明下面的

定理 4. 設 $A_n(g)$ $(n=1,2,\cdots)$都是 $L^2(e)$ 中的綫性泛函數. 假如對於 $L^2(e)$中的任一元素 $g(x)$，$\{A_n(g)\}$ 成一有界數列，那末泛函數列$\{A_n(g)\}$ 在單位球面上爲均勻有界. 就是說，存在着如下的常數 C:

$$\max_{g\in L^2(e)}\frac{|A_n(g)|}{\|g\|}=M_{A_n}\leqslant C.$$

在證明這個定理之前，我們首先建立有關實變函數的一個

引理 (奧斯古德*的定理). 設$\{f_n(x)\}$是區間 $a<x<b$ 上的一列連續函數. 假如對於(a,b)中的任一 x，$\{f_n(x)\}$ 成一有界數列，那末(a,b)中必有子區間 $[a_1,b_1]$. 在$[a_1b_1]$上，$\{f_n(x)\}$爲均勻有界.

證明 假如不存在定理中的$[a_1,b_1]$，則(a,b)中必有一點 x_1，使$\{f_n(x)\}$中某一函數 $f_{n_1}(x)$在 $x=x_1$ 的絕對值大於 1. 由於 $f_{n_1}(x)$

* W. F. Osgood.

在 x_1 的連續性，存在着如下的區間 (α_1, β_1)：

$$\alpha_1 < x_1 < \beta_1, \quad |f_{n_1}(x)| > 1 \quad (\alpha_1 < x < \beta_1).$$

根據同樣的理由，有如下的 n_2 和 (α_2, β_2)：

$$n_2 > n_1, \ |f_{n_2}(x)| > 2 \quad (\alpha_1 < \alpha_2 < x < \beta_2 < \beta_1).$$

如是繼續進行，得一列的 $\{n_k\}$ 和一列的 $\{(\alpha_k, \beta_k)\}$ 如下：

$$n_1 < n_2 < \cdots; \ \alpha_k < \alpha_{k+1} < \beta_{k+1} < \beta_k, \ k = 1, 2, \cdots,$$

$$|f_{n_k}(x)| > k \quad (\alpha_{k+1} < x < \beta_{k+1}).$$

自然我們可以假設 $\beta_k - \alpha_k \to 0$. 因此 $\{(\alpha_k, \beta_k)\}$ 收斂於一點 x_0. 從 $|f_{n_k}(x_0)| > k$, 達到 $\{f_n(x_0)\}$ 是一無界數列的矛盾. 證明完畢.

現在我們證明定理 4. 定理 4 是巴拿赫和斯坦好斯發明的*.

對於 $A_n(g)$ 在單位球面 $\|g\| = 1$ 上的有界性，我們可以模仿引理(奧斯古德的定理)的證明來說清楚. 事實上，將 A_n 看成 f_n, 將 x 看成 $g \in L^2(e)$, 將區間 (a, b) 看成球，又將 (α_k, β_k) 看成以 g_{n_k} 爲中心，ρ_k, $\rho_k < \frac{1}{k}$, 爲半徑的球 S_k, 但 S_k 含有 S_{k+1}. 設當 $g \in S_k$ 時, $A_{n_k} g > k$ $(k = 1, 2, \cdots)$, 則

$$\|g_{n_l} - g_{n_k}\| < \frac{1}{k}, \ (l > k).$$

由黎斯和菲薾的定理，$\{g_{n_k}\}$ 强斂於一函數 g_0. 由於

$$g_0 \in \prod_1^\infty S_k,$$

所以 $|A_{n_k} g_0| > k \to \infty$, 這是與假設不相容的. 因此，存在一個球 S, 說是 g^* 爲中心，ρ 爲半徑的球，S 中任何元素

$$g^* + \rho g \quad (\|g\| \leqslant 1)$$

適合於 $|A_n(g^* + \rho g)| \leqslant C_1$, C_1 是一常數. 由是，當 $\|g\| = 1$ 時,

$$|A_n(g)| \leqslant [|A_n(g^* + \rho g)| + |A_n(g^*)|]/\rho <$$

$$< \frac{C_1}{\rho} + \frac{1}{\rho}|A_n(g^*)| < \frac{2C_1}{\rho}$$

* S. Banach 和 H. Steinhaus (1927).

證明完畢.

我們稱 $L^2(e)$ 中的敍列 $\{f_n\}$，當它的模敍列 $\{\|f_n\|\}$ 爲有界時，爲一有界敍列. 在 $L^2(e)$ 中，成立相當於瓦耶斯脫拉斯和波耳查諾的定理.

定理 5. 假如 $\{f_n\}$ 是空間 $L^2(e)$ 中之一有界敍列，那末其中必有子敍列弱斂於 $L^2(e)$ 的一個元素.

證明 我們首先證明 $L^2(e)$ 是一可析的空間. 這就是要證: $L^2(e)$ 中有 $\{g_n\}$，對於 $L^2(e)$ 的任一元素 f，可用 $\{g_n\}$ 中的元素來追近. 追近的意義是: 對於 $\varepsilon>0$，有 g_n 適合於

$$\|f-g_n\|<\varepsilon.$$

我們限於 $e=(-\infty,\infty)$ 時來建立 $L^2(e)$ 的可析性，所得結果，可以立刻推廣到更一般的 $L^2(e)$ 上去. 我們又不妨假設 $L^2(e)$ 中的元素都是實函數，否則的話，從 $\|f_j-g_{jn}\|<\varepsilon\,(j=1,2)$ 就得到

$$\|(f_1+if_2)-(g_{1n}+ig_{2n})\|<2\varepsilon.$$

在此時的證明中，我們又不妨假設 e 是一個有限區間 $[a,b]$. 其實，在一般的情況，對於 f，我們可以作如下的函數列 f_n，$n=1,2,\cdots$:

$$f_n(x)=f(x),\quad -n\leqslant x\leqslant n;$$

$$f_n(x)=0,\quad |x|>n.$$

那末從 $f(x)-f_n(x)\to 0$ 和 $(f-f_n)^2\leqslant f^2$，利用積分敍列的收斂定理，得着 $\|f-f_n\|\to 0$.

現在證明實元素空間 $L^2(a,b)$ 的可析性. 對於 $f\in L^2(a,b)$，必有如下的階梯函數列 φ_k:

$$\varphi_k(x)\to f(x),\quad \|\varphi_k(x)\|\leqslant C.$$

那末 $\|\varphi_k(x)-f(x)\|\to 0$. 設 $\{g_n(x)\}$ 是如下的階梯函數的全體 任一 $g_n(x)$ 的不連續點都是有理點，$g_n(x)$ 的值都是有理數. 任何 $\varphi_k(x)$ 都可用 $g_n(x)$ 來追近；因此，f 可用 $g_n(x)$ 來追近. 所以 L^2 是可析的.

利用 $L^2(e)$ 的可析性，我們就能證明有界敍列 $\{f_n\}$ 必含有弱斂

的子敍列．設$\{g_n\}$在$L^2(e)$中是稠密的，從$\|f_n\|\leqslant C$得

$$|(g, f_n)|\leqslant C\|g\|.$$

現在應用瓦耶斯脫拉斯和波耳查諾的定理，從$|(g_1, f_n)|\leqslant C\|g_1\|$，得收斂數列$(g_1, f_{n'_\nu})$ $(\nu=1, 2, \cdots)$．又從

$$|(g_2, f_{n'_\nu})|\leqslant C\|g_2\|,$$

得收斂數列$(g_2, f_{n''_\nu})$ $(\nu=1, 2, \cdots)$，但$\{n''_\nu\}\subset\{n'_\nu\}$．這樣，利用對角綫的方法，獲得如下的子列$f_{\nu_1}, f_{\nu_2}, \cdots$：極限

$$\lim_{k\to\infty}(g_n, f_{\nu_k})\quad(n=1, 2, \cdots)$$

都存在．我們考慮泛函數的敍列

$$A_k(g)=(g, f_{\nu_k}),\ g\in L^2(e),\ k=1, 2\cdots.$$

A_k的模$M_{A_k}\leqslant C$．簡寫$\{g_n\}$的任函數爲l，那末當$g\in L^2(e)$時，

$$|A_ng-A_mg|\leqslant|A_ng-A_nl|+|A_nl-A_ml|+$$
$$+|A_ml-A_mg|\leqslant 2C\|g-l\|+|A_nl-A_ml|.$$

對於$\varepsilon>0$，取適當的l，可使$2c\|g-l\|$小於$\frac{\varepsilon}{2}$．固定着l，存在N，當n和m都大於N時，$|A_mg-A_ng|$小於$\frac{\varepsilon}{2}$．由是

$$|A_ng-A_mg|<\varepsilon,\ n>N,\ m>N.$$

所以$\lim A_ng$存在．把它寫成$\lim A_ng=Ag$的話，Ag是一綫性泛函數．設f是Ag的母函數，則$\{f_{n_k}\}$弱斂於f．證明完畢．

空間$L^2(e)$中的直交函數系 設$\varphi_n(x)\in L^2(e)$, $n=1, 2, \cdots$．假如

$$(\varphi_m, \varphi_n)=0\ (m\neq n),\ (\varphi_n, \varphi_n)=\|\varphi_n\|^2=1$$
$$(n, m=1, 2, 3, \cdots)$$

那末在e上$\{\varphi_n(x)\}$成一就範的直交函數系．"就範"之意，就是$\|\varphi_n\|^2=1$．當$(\varphi, \psi)=0$時，稱φ和ψ在e上互相直交．

設$c_1, c_2, \cdots$都是常數；函數列$\varphi_1, \varphi_2, \cdots$在$L^2(e)$上成一就範的直交系．對於$L^2(e)$中的$f$，要求

$$J(c_1, \cdots, c_N)=\|f-(c_1\varphi_1+\cdots+c_N\varphi_N)\|$$

的最小值. 由於 $J(c_1,\cdots,c_N)$ 的平方等於

$$\left(f-\sum_1^N c_\nu\varphi_\nu,\ f-\sum_1^N c_\nu\varphi_\nu\right)=$$

$$=(f,f)+\sum_1^N c_\nu\bar{c}_\nu-\sum_1^N[\bar{c}_\nu(f,\varphi_\nu)+c_\nu(\varphi_\nu,f)]=$$

$$=\|f\|^2-\sum_1^N|(f,\varphi_\nu)|^2+\sum_1^N|(f,\varphi_\nu)-c_\nu|^2.$$

所以當 $c_\nu=(f,\varphi_\nu)$ 時, $\|f-c_1\varphi_1-\cdots-c_N\varphi_N\|$ 取最小值, 並且

$$\left\|f-\sum_1^N(f,\varphi_\nu)\varphi_\nu\right\|^2=\|f\|-\sum_1^N|(f,\varphi_\nu)|^2.$$

由是得到勃色耳(Bessel)的不等式

$$\sum_{\nu=1}^N|(f,\varphi_\nu)|^2\leqslant\|f\|.$$

$L^2(e)$ 的一個子集 Φ 具有下述性質時, 稱它在 $L^2(e)$ 中具有完備性: 當 $f\in L^2(e)$ 時, 對於任一正數 ε, Φ 中有 $\varphi_1,\cdots,\varphi_N$ 能使

$$|f-c_1\varphi_1-\cdots-c_N\varphi_N|<\varepsilon.$$

$L^2(e)$ 中任何有限個函數 $\varphi_1,\cdots,\varphi_N$ 必不能有完備性: 假如 φ_1 $\cdots,\varphi_N$ 具有完備性, 那末 $1,x,x^2,\cdots,x^N$ 都可寫成 $c_1\varphi_1+\cdots+c_N\varphi_N$ 的形式, 事實上, 從

$$\lim_{n\to\infty}\|f-(c_1^{(n)}\varphi_1+\cdots+c_N^{(n)}\varphi_N)\|=0,$$

得 $f=c_1\varphi_1+\cdots+\varphi_N\varphi_N$, 但 $c_\nu^{(n)}\to c_\nu(\nu=1,\cdots,N)$. 這樣一來, 就會有常數 $\gamma_0,\cdots,\gamma_N$ 適合於

$$\gamma_0+\gamma_1x+\cdots+\gamma_Nx^N\equiv0\ (|\gamma_0|+\cdots+|\gamma_N|>0).$$

顯然不會有這種事的.

定理 6. 可析空間 $L^2(e)$ 中存在着一列具有完備性的就範直交函數系.

證明 由於空間 $L^2(e)$ 是可析的, 所以在此空間中, 必有稠密的函數列 $f_1,f_2,f_3,\cdots$; 其中任何有限個 f_ν 不是綫性相倚的. 由是

$\{f_n\}$ 是一具有完備性而不"相倚"的函數列. 從$\{f_n\}$我們可以作成完備的就範直交函數系$\{\varphi_n\}$. 首先取

$$\varphi_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|},$$

置

$$\varphi_n = c_{n1}f_1 + \cdots + c_{nn}f_n,\ f_n = \gamma_{n1}\varphi_1 + \cdots + \gamma_{nn}\varphi_n, \qquad (1)$$

則

$$\|f_1\| = \gamma_{11} = \frac{1}{c_{11}}.$$

其次利用f_2, 作函數 $h_2 = f_2 - \gamma\varphi_1$, 取常數$\gamma$使$h_2$與$\varphi_1$相直交:

$$(h_2, \varphi_1) = (f_2, \varphi_1) - \gamma(\varphi_1, \varphi_1) = 0.$$

因此,必須$\gamma = (f_2, \varphi_1)$. 由於$f_1$和$f_2$不相倚,所以$h_2 \neq 0$. 置

$$\varphi_2 = \frac{h_2}{\|h_2\|},$$

則φ_2是f_1和f_2的綫性結合, f_2是φ_1和φ_2的綫性結合.

假如(1)當$n = 1, 2, \cdots, k-1$時成立,並且$\varphi_1, \cdots, \varphi_{k-1}$滿足條件$\|\varphi_\nu\| = 1$而互相直交,那末我們作函數

$$h_k = f_k - \lambda_1\varphi_1 - \lambda_2\varphi_2 - \cdots - \lambda_{k-1}\varphi_{k-1}$$

使與$\varphi_1, \cdots, \varphi_{k-1}$相直交,就得到

$$\lambda_\nu = (f_k, \varphi_\nu),\ \nu = 1, 2, \cdots, k-1.$$

由於f_k與$f_1, \cdots, f_{k-1}$是綫性不相倚的,所以$h_k \neq 0$. 置

$$\varphi_k = \frac{h_k}{\|h_k\|},$$

則$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_k$相互直交,並且$\|\varphi_\nu\| = 1$ $(\nu = 1, \cdots, k)$. 因此(1)當$n = k$時也成立. 利用數學歸納法,(1)對於一切n都成立.

設$f \in L^2$, 對於$\varepsilon > 0$,有$f_1, f_2, \cdots$的綫性結合$k_1f_1 + \cdots + k_Nf_N$適合

$$\|f - k_1f_1 \cdots k_Nf_N\| < \varepsilon.$$

因此,有$\varphi_1, \cdots, \varphi_N$的綫性結合$c_1\varphi_1 + \cdots + c_N\varphi_N$適合

$$\|f - c_1\varphi_1 - \cdots - c_N\varphi_N\| < \varepsilon.$$

所以$\{\varphi_n\}$是一具有完備性的直交系統．定理證畢．

總結起來，在 $L^2(e)$ 中有限個函數不能成爲完備系統，而存在着完備的函數列，因此必有具有完備性的就範直交函數列．然則有不可列的完備的就範直交系沒有？這種函數系統是不存在的．事實上，設 E 是 $L^2(e)$中就範直交函數之一集，當其勢大於 $\aleph_0$ 時，E 不可能具有完備性．假如 E 具有完備性，那末對於 f_n，E 中有如下的函數列 $\varphi_{n1}, \varphi_{n2}, \cdots, \varphi_{nn_k}$：

$$\|f_n - c_{n1}\varphi_{n1} - c_{n2}\varphi_{n2} - \cdots - c_{nn_k}\varphi_{nn_k}\| <$$

$$< \frac{1}{k}\ (k = 1, 2, \cdots).$$

從$\{f_n\}$在 $L^2(e)$的稠密性，知道 $\varphi_{n,\nu}\ (n,\nu = 1, 2, \cdots)$在 $L^2(e)$ 中也是到處稠密的．但 E 中除 $\varphi_{n,\nu}$ 等函數而外，還有許多函數．設 $\varphi(x)$是其中的一個，則必

$$\lim_{N\to\infty}\left\|\varphi(x) - \sum_{n,\nu=1}^{N}(\varphi, \varphi_{n\nu})\varphi_{n\nu}(x)\right\| = 0,$$

這是不可能的，因爲$(\varphi, \varphi_{n\nu}) = 0$ 而 $\|\varphi(x)\| = 1$ 的緣故．

現在建立派色伐耳的公式．

定理 7. 設$\{\varphi_n\}$是 $L^2(e)$ 中一個完備的就範直交函數系，則對於 $L^2(e)$ 中任何 $f(x)$，成立着等式(派色伐耳公式)

$$\|f(x)\| = \sum_{n=1}^{\infty}|(f, \varphi_n)|^2.$$

證明　從勃色耳的不等式，我們得到

$$\|f(x)\| \geqslant \sum_{n=1}^{\infty}|(f, \varphi_n)|^2.$$

因此 $\left\|\sum_{m}^{n}(f, \varphi_\nu)\varphi_\nu\right\|^2$ 當 $n > m \to \infty$ 時，收斂於 0．由黎斯和非蕭的定理，級數 $\Sigma(f, \varphi_\nu)\varphi_\nu$ 强斂於 $L^2(e)$ 中一個函數 $g(x)$．强斂含有弱斂，所以

$$(g,\varphi_k)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_1^n(f,\varphi_\nu)\varphi_\nu,\varphi_k\right)=(f,\varphi_k).$$

因此$(g-f,\varphi_k)=0$ $(k=1,2,\cdots)$. 但是$\{\varphi_k\}$具有稠密性，必然地

$$\lim_{n\to\infty}\left(f-g,\sum_1^n(f-g,\varphi_\nu)\varphi_\nu\right)=0.$$

因此$\|f-g\|=0$, $f=g$. 由是從

$$\lim_{n\to\infty}\left\|f(x)-\sum_{\nu=1}^n(f,\varphi_\nu)\varphi_\nu(x)\right\|=0$$

得到f的派色伐耳的公式. 證明完畢.

此定理之逆,也成定理. 就是說: 設有$L^2(e)$中之一就範直交系$\{\varphi_n\}$. 假如對於$L^2(e)$中的任一函數f,等式

$$\|f\|^2=\sum_{n=1}^\infty|(f,\varphi_n)|^2$$

成立,那末$\{\varphi_n\}$是完備的,這是因爲此等式可以寫成

$$\lim_{n\to\infty}\left\|f-\sum_{\nu=1}^n(f,\varphi_\nu)\varphi_\nu\right\|=0$$

之故. 例如在空間$L^2(0,1)$中,函數列$\exp(2\pi inx)$, $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$是一完備的正規直交函數系. 事實上,當$f\in L^2(0,1)$時,置

$$c_n=\int_0^1 f(t)e^{-2in\pi t}\,dt$$

則因

$$c_{-n}e^{in\pi x}+c_ne^{-in\pi x}=2\int_0^1 f(t)\cos 2n\pi(t-x)dt,$$

從富理埃級數的派色伐耳公式,轉得

$$\|f\|^2=\sum_{n=-\infty}^\infty|c_n|^2.$$

所以函數系統$\exp(2\pi inx)(n=0,\pm,\cdots)$在$L^2(0,1)$中具有完備

性.

設 E 是 $L^2(e)$ 中具有下述兩個性質的子集:

(一) E 中有限個元素的綫性結合必屬於 E——綫性聚集.

(二) E 中的函數列强斂於 f 時, f 屬於 E——關於强斂具有封閉性.

稱這種 E 爲 $L^2(e)$ 之一子空間,就是說,關於强斂具有封閉性的綫性聚集是一部分空間. 基本上只含有一個元素的集是一個子空間. 固定 n, $L^2(e)$ 中 n 個定元素 $f_1, \cdots, f_n$ 的綫性聚集成一個子空間. 要證明此事實,不妨假設 $f_1, \cdots, f_n$ 是一就範的直交函數系,那末當

$$\lim_{\nu\to\infty} \| f - c_1^{(\nu)} f_1 - \cdots - c_n^{(\nu)} f_n \| = 0$$

時, $c_k^{(\nu)} \to (f, f_k)(k = 1, \cdots, n)$, $f = \sum_1^n (f, f_k) f_k$.

空間 $L^2(e)$ 對於它的任一子空間成立着下述分解定理.

定理 8. 設 E 是 $L^2(e)$ 的一個子空間, 則 $L^2(e)$ 中任一元素是 E 中的一個元素與直交於 E (即與 E 的任一元素直交)的一個元素之和,這樣的分解是唯一的.

證明 首先建立分解的唯一性. 設 $h = f + g$, $h = f' + g'$, f 和 f' 屬於 E 而 g 和 g' 直交於 E, 則 $g - g' = f' - f \in E$. 因此 $f' - f (= g - g')$ 直交於 E 中的任一元素,它也直交於自身:

$$(f' - f, f' - f) = \| f' - f \|^2 = 0.$$

所以 $f' = f$, 從而 $g = g'$.

要證分解的可能, 我們從 E 取出在 E 中具有完備性的正規直交系 $\{\varphi_n\}$ (可能只含有有限個函數). 設 $h \in L^2(e)$, 函數列 $\sum_1^n (h, \varphi_\nu)\varphi_\nu$ 强斂於 E 中之一函數 f. 置 $g = h - f$, 則 g 直交於 E. 事實上, 當 $\varphi \in E$ 時,

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \varphi - \sum_1^n (\varphi, \varphi_\nu)\varphi_\nu \right\| = 0.$$

設 $\Phi_n = \sum_{1}^{N} (\varphi, \varphi_\nu)\varphi_\nu$, 則因

$$(g, \varphi) = (g, \Phi_n) + (g, \varphi - \Phi_n) = (g, \varphi - \Phi_n)$$

的絕對值等於或小於 $\|g\| \cdot \|\Phi_n - \varphi\| \to 0$. 所以 $(g, \varphi) = 0$. 證明完畢.

設 $L^2(e)$中之一集 E 在 $L^2(e)$中並不稠密(E可能是一綫性聚集，甚至成一個子空間)，則直交於 E 的一切元素成一個子空間 $S(E)$. $S(E)$直交於 E, E 也直交於 $S(E)$. 我們將 E 開拓成一(最小的)子空間 (E), 就是說將 E 中有限個元素的綫性結合添入於 E,並且使它具有封閉性,從定理 8 得到

定理 9. 設 $E \subset L^2(e)$, 從 E 作成子空間 $S(E)$和 (E). 則 $L^2(e)$ 中任一元素 f 可以唯一地分解爲 $f = g + h$ 使 $g \in (E)$, $h \in S(E)$.

從分解定理,我們容易導出定理 5. 設 $\|f_n\| \leqslant C$,則利用對角綫法,存在着子函數列$\{f_{n_k}\}$使極限

$$\lim_{k\to\infty}(f_m, f_{n_k})$$

對於任一 f_m 都存在,由是可以證明極限 $\lim(f, f_{n_k})$對於 $L^2(e)$中任何 f 都存在. 事實上，對於一切 f_n 所成之集 E, 作互相直交的子空間(E)和 $S(E)$, 那末從分解

$$f = g + h,\ g \in (E),\ h \in S(E),$$

得到$(f, f_{n_k}) = (g, f_{n_k}) + (h, f_{n_k}) = (g, f_{n_k})$. 由是

$$\lim_{k\to\infty}(f, f_{n_k}) = \lim_{k\to\infty}(g, f_{n_k}).$$

所以$\{f_{n_k}\}$是一弱收斂的函數列.

從分解定理,我們還能够建立綫性泛函數的延拓定理.

定理 10. 設 $E \subset L^2(e)$, A 是在 E 上所定義的一個綫性泛函數. 假如對於 E 中任意的有限個函數 $f_1, \cdots, f_n$ 的綫性結合 $c_1f_1 + \cdots + c_nf_n$ 存在着常數 M 適合於

$$\left|\sum_1^N c_\nu A(f_\nu)\right| \leqslant M \left\|\sum_1^n c_\nu f_\nu\right\|,$$

那末 A 可以延拓 $L^2(e)$ 上且使其模 $\|A\| \leqslant M$.

證明 首先定義 E 中的綫性結合上的 A:

$$A(c_1f_1 + \cdots + c_nf_n) = \sum_1^n c_\nu A f_\nu.$$

當 $\|f_n - f\| \to 0$ 時, 定義 $A(f)$ 爲 $\lim A(f_n)$ (强斂含有弱斂). 最後,利用分解定理,當 $f = g + h, g \in (E), h \in S(E)$時,定義

$$A(f) = A(g) + A(h) = A(g).$$

定理證畢.

2. 函數族 $L^p(e), p \geqslant 1$. 設點集 e 上的可測函數 f, 它的 $|f|^p \in L(e)$, 這種 f 成一函數族 $L^p(e)$, 我們以

$$\|f\| = \left[\int_e |f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}$$

爲 f 的模,由敏高夫斯基的不等式,成立着三點不等式

$$\|f - g\| \leqslant \|f - h\| + \|h - g\|,$$

但 f, g, h 都屬於 $L^p(e)$. 當 $p = \infty$ 時, $L^\infty(e)$中函數的模 $\|f\|$ 是 $|f(x)|$ 的"實質"上界: 除開一個零集,不等式 $|f(x)| \leqslant \|f(x)\|$ 成立. 記 f 在 L^p 中的模爲 $\|f\|_p$ 則易知

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty = |f(x)| \text{ 的實質上界}.$$

設 f_n 和 f 都屬於 $L^p(e)$, 則當 $\|f_n - f\| \to 0$ 時, 我們稱$\{f_n\}$關於指數 p, 强斂於 f. 或是說: $\{f_n\}$平均收斂於 f, 簡寫爲

$$f_n \xrightarrow{p} f.$$

當 $p \geqslant 1$ 時* 跟 $p = 2$ 時同樣,我們能證"$f_n \xrightarrow{p} f$ 的充要條件爲 $\|f_m - f_n\| \to 0$ $(n > m \to \infty)$"的定理. 當 $p = \infty$ 時,這個定理,相當於柯西的匀斂判定法;因此,我們簡稱此定理($1 \leqslant p \leqslant \infty$)

* 當 $0 < p < 1$ 時, 在空間 $L^p(e)$ 中不存在綫性泛函數 (除非全等於 0), 參見 Day, Bull. Amer. Math. Soc. 46 (1940).

爲柯西判別法. 設

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

則稱 $L^q(e)$ 爲 $L^p(e)$ 的共軛空間. 設 $\{f_n\}\subset L^p$. 則當

$$(f_n, g)=\int_e f_n(x)g(x)dx\to(f,g)$$

對於 $L^q(e)$ 中任一函數 g 成立時, 稱 $\{f_n\}$ 關於指數 p 弱斂於 f, 記它爲

$$f_n \xrightarrow{p} f(x).$$

定理 1. 設 $1<p<\infty$ 函數 $F(x)(a\leqslant x<b)$ 成爲 $L^p(a,b)$ 中某一函數 $f(x)$ 的積分函數之充要條件是對於分點

$$a\leqslant x_0<x_1<\cdots<x_m\leqslant b$$

所作成的和

$$\sum_1^m \frac{|F(x_k)-F(x_{k-1})|^p}{(x_k-x_{k-1})^{p-1}}=F(x_0, \cdots, x_m;p)$$

具有有限的上界,這個上界就是 $\int_a^b |f(x)|^p dx$.

證明 若 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, $f(x)\in L^p(a, b)$,則利用赫耳竇的不等式

$$|F(x_k)-F(x_{k-1})|^p=\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} 1\cdot f(x)dx\right|^p\leqslant$$

$$\leqslant\left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} dx\right)^{p-1}\left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{p}{p}}\leqslant$$

$$\leqslant(x_k-x_{k-1})^{p-1}\int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x)|^p dx.$$

因此

$$F(x_0, \cdots, x_m; p)\leqslant\int_a^b |f(x)|^p dx. \tag{1}$$

其次,我們從 $F(x_0, \cdots, x_m; p)$ 的有界性導出 $f(x)$ 是一絕對連續函數. 設 (α_k, β_k) 是 $[a, b]$ 中不相重疊的幾個區間, 則當 $F(x_0,$

$\cdots, x_m; p) \leqslant B^p$ 時，由赫耳竇不等式

$$\Sigma |F(\beta_k) - F(\alpha_k)| \leqslant \left[\Sigma \frac{|F(\beta_k) - F(\alpha_k)|^p}{(\beta_k - \alpha_k)^{p-1}}\right]^{\frac{1}{p}} \times$$

$$\times [(\beta_k - \alpha_k)]^{\frac{p-1}{p}} \leqslant B[\Sigma(\beta_k - \alpha_k)]^{\frac{p-1}{p}}.$$

由是可知 $F(x)$ 是一絕對連續函數，$F(x)$ 是 $F'(x)$ 的積分函數。

最後證明 $F(x_0, \cdots, x_m; p)$ 的上界等於 $|f(x)|^p$ 的積分．函數 $F'(x)$ 是階梯函數列 $\{f_n(x)\}$ 的極限函數：例如，將 $[a, b]$ 等分為 2^n 個區間，在其中一個區間 (α, β) 上，$f_n(x)$ 等於常數

$$\frac{F(\beta) - F(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

的話，$f_n(x)$ 概歛於 $F'(x)$．假如 $x_k = \frac{(b-a)k}{2^n} + a,\ k = 0, 1, \cdots, 2^n$，那末

$$F(x_0, \cdots, x_{2^n}; p) = \int_a^b |f_n(x)|^p dx.$$

由法都的引理，

$$\int_a^b |f(x)|^p dx \leqslant \varliminf \int_a^b |f_n(x)|^p dx \tag{2}$$

$$(1 \leqslant p < \infty)$$

不等式(1)和(2)完成着定理的證明。

我們要求出空間 $L^p(e)$ 中綫性泛函數的一般形式。

定理 2. 設 $1 \leqslant p < \infty$，e 是一綫性可測點集，Af 是定義在 $L^p(e)$ 上的一個綫性泛函數，則必有函數 $g(x) \in L^q(e)$，$q = \frac{p}{p-1}$ 為 Af 的母函數，使 Af 表達為

$$Af = (f, g),\ f \in L^p(e).$$

此時 A 的模 $M_A = \|A\| = \left[\int_e |g(x)|^q dx\right]^{\frac{1}{q}}$．當 $p = 1$ 時，$\|A\|$ 是 $|g(x)|$ 的實質上界。

證明 我們不妨假設 e 是一區間(a,b)（有限或無限）. 事實上，當 $e\subset(a,b)$時，在 $L^p(a,b)$中我們可以考慮如下的綫性泛函數 $A(f)$，它具有加減性，整齊性和有界性外，並且其值光是靠着 $f(x)$ 在 e 上的函數而定：設 g 是 $A(f)$的母函數，

$$A(f)=\int_a^b f(x)g(x)dx.$$

當 $f(x)$ 在 e 上等於 0 時，$A(f)$ 等於 0；因此在 $[a,b]-e$ 上，$g(x)=0$。

設 $a<\xi<b$，作$[a,\xi]$上的特徵函數 $g_\xi(x)$。 置

$$G(\xi)=A(g_\xi(x)).$$

當 $1<p<\infty$ 時，我們能證 $G\left(x_0,\cdots,x_m;\frac{p}{p-1}\right)$ 關於分點 $x_0,\cdots,x_m$ 是有界．事實上，假如

$$\varphi(x)=\left[\frac{|G(x_k)-G(x_{k-1})|}{x_k-x_{k-1}}\right]^{\frac{1}{p-1}}\operatorname{sgn}(G(x_k)-G(x_{k-1}))$$

$$(x_{k-1}<x<x_k,\ k=1,2,\cdots,m),$$

那末

$$A(\varphi(x))=\sum_{k=1}^m A[\varphi(x)(g_{x_k}(x)-g_{x_{k-1}}(x))]$$

$$=\sum_{k=1}^m\left[\frac{|G(x_k)-G(x_{k-1})|}{x_k-x_{k-1}}\right]^{\frac{1}{p-1}}[|G(x_k)-G(x_{k-1})|]$$

$$=G\left(x_0,x_1,\cdots,x_m;\frac{p}{p-1}\right).$$

另一方面，

$$A(\varphi)\leqslant M_A\|\varphi\|=M_A\left[\int_a^b|\varphi(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}=$$

$$=M_A\left[\sum_{k=1}^m\frac{|G(x_k)-G(x_{k-1})|^q}{(x_k-x_{k-1})^{q-1}}\right]^{\frac{1}{p}},\ \left(q=\frac{p}{p-1}\right).$$

由是得到 $G\left(x_0,\cdots,x_m;\frac{p}{p-1}\right)\leqslant M_A^{\frac{p}{p-1}}$．從定理1 $G(x)$是

$L^{\frac{p}{p-1}}(a,b)$中某一函數$g(x)$的積分函數，並且

$$\int_a^b |g(x)|^{\frac{p}{p-1}}dx \leqslant M_A^{\frac{p}{p-1}}. \tag{1}$$

另一方面，從$G(x)$的定義，當$f(x)$是一階梯函數時，得到

$$A(f) = \int_a^b f(x)G'(x)dx = (f, g).$$

但是階梯函數在$L^p(a,b)$中是到處稠密的，所以上式當$f\in L^p(a,b)$時成立。利用赫耳竇不等式

$$|A(f)| = \left|\int_a^b g(x)f(x)dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left[\int_a^b |f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_a^b |g(x)|^q dx\right]^{\frac{1}{q}},$$

得到

$$M_A \leqslant \left[\int_a^b |g(x)|^q dx\right]^{\frac{1}{q}} \tag{2}$$

從(1)和(2)，知(2)中等號成立。

最後，我們還要研究$p=1$的情況。設ξ和ξ'是(a,b)中的兩點，則

$$|G(\xi)-G(\xi')| = |A(g_\xi - g_{\xi'})| \leqslant$$
$$\leqslant M_A\int_a^b |g_\xi(x) - g_{\xi'}(x)|\,dx = M_A|\xi-\xi'|.$$

所以$G(x)$是某一函數$g(x)$的積分函數，並且$|g(x)|\leqslant M_A$。與上面同樣，我們得到

$$A(f) = \int_a^b f(x)g(x)dx = (f, g).$$

設K是$|g(x)|$的實質上界，則

$$|A(f)| \leqslant K\int_a^b |f(x)|\,dx.$$

因此$M_A = K$。定理證畢。

最後，我還要對於弱斂的函數列，添加條件使它具有强斂性。

定理 3.* 設$1<p<\infty$，$f_n(x)\in L^p(e)$，$n=1,2,\cdots$，關於

* F. Riesz, Mathematische Annalen, 69.

指數 p, 假如 $f_n(x)$ 弱斂於 $f(x)$ 並且 $\|f_n\|$ 收斂於 $\|f\|$, 則必 $f_n(x)$ 强斂於 $f(x)$.

證明 當 $p>2$ 時,我們考慮實數 y 的式子

$$\varphi(y)=\frac{|1+y|^p-1-py}{|y|^p},$$

此式子不取負值;事實上, $|y|^p\varphi(y)$ 當 $y=0$ 時其值為 0,而

$$[|y|^p\varphi(y)]'_{y=0}=0,\ [|y|^p\varphi(y)]''=p(p-1)|1+y|^{p-2}$$

所以當 $y>0$ 時 $\varphi(y)>0$. 但是當 $y<0$ 時 $[|y|^p\varphi(y)]'<0$, 所以 $\varphi(y)$ 也是正的. 由於

$$\lim_{y\to 0}\varphi(y)=+\infty,\ \lim_{|y|\to\infty}\varphi(y)=1,$$

所以 $\varphi(y)$ 的下界是一正數 $\frac{1}{c}$. 由是得到不等式

$$c(|1+y|^p-1-py)\geqslant|y|^p.$$

設 $y=\frac{f_n-f}{f}$, $g=\bar{f}|f|^{p-2}$. 從上式得到

$$|f_n-f|^p\leqslant c(|f_n|^p-|f|^p)-cp(f_n-f)g.$$

由假設,

$$\int_e|f_n|^p dx\to\int_e|f|^p dx,\ \int_e f_n g\,dx\to\int_e fg\,dx,$$

所以從上式得到

$$\int_e|f_n-f|^p dx\to 0. \tag{1}$$

即 $f_n\overset{p}{\Longrightarrow}f$.

當 $1<p<2$ 時,我們考慮如下的函數

$$\psi(y)=\frac{|1+y|^p-1-py}{|y|^2},\ |y|\leqslant 1;$$

$$\psi(y)=\varphi(y),\ |y|\geqslant 1.$$

那末從 $\psi(y)>0\,(y\neq 0)$, $\psi(0)=\frac{p(p-1)}{2}$, $\psi(\infty)=1$, 知道

$$\psi(y)\geqslant\frac{1}{k}>0.$$

置 $y = f_n(x)/f(x) - 1$, $|y| \geqslant 1$ 的 x 的全體為 e_n. 通過上面的方法,得到

$$\int_{e_n} |f_n - f|^p\,dx + \int_{e-e_n} |f_n - f|^2\,|f|^{p-2}\,dx \to 0. \qquad (2)$$

又從(2)和 $|f(x) - f_n(x)| < |f(x)|\,(x \in e_n)$ 得到

$$\int_{e-e_n} |f_n - f|^p\,dx \leqslant \int_{e-e_n} |f|^{p-1}|f_n - f|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\int_e |f|^p\,dx \cdot \int_{e-e_n} |f|^{p-2}|f_n - f|^2\,dx} \to 0. \qquad (3)$$

從(2)和(3),得到(1). 定理證畢.

定理 4*. 若$\{f_n\}$以指數 2 弱斂於 f,則必有如下的子列$\{f_{n_k}\}$:

$$\frac{f_{n_1} + \cdots + f_{n_k}}{k} \xrightarrow{2} f.$$

證明 當證明時,我們可以假設 $f = 0$ 而選出如下的添數列$\{n_k\}$: $1 = n_1 < n_2 < \cdots$. 由於$(f_1, f_n) \to 0$,所以存在着最小的整數 n_2 適合

$$|(f_1, f_{n_2})| \leqslant 1.$$

又由於$(f_{n_1}, f_n) \to 0$, $(f_{n_2}, f_n) \to 0$, $\cdots$, $(f_{n_k}, f_n) \to 0$, 所以有如下的 n_{k+1}:

$$(f_{n_i}, f_{n_{k+1}}) < \frac{1}{k}, \quad i = 1, 2, \cdots, k.$$

數列$\{\|f_n\|\}$是有界的, $\|f_n\| < B$ 的話,從許瓦茲不等式得到

$$\left\|\frac{f_{n_1} + \cdots + f_{n_k}}{k}\right\|^2 =$$

$$= \frac{\sum_1^k \|f_{n_\nu}\|^2 + 2\sum_2^k (f_{n_\nu}, f_{n_{\nu-1}} + \cdots + f_{n_1})}{k^2} \leqslant$$

* 此定理可以拓廣為"$f_n \xrightarrow{p} f$ 含有 $\frac{f_{n_1}+\cdots+f_{n_k}}{k} \xrightarrow{p} f$". 見巴拿赫和沙克思(Banach-Saks)在"數學研究"(Studia Math.)第二卷(1930)中的論文.

$$\leqslant \frac{kB^2 + 2\sum_{2}^{k} \frac{\nu-1}{\nu-1}}{k^2} < \frac{B^2+2}{k} \to 0.$$

系 空間 L^p 中的凸性集 E 對於弱斂具有封閉性時，對於強斂也具有封閉性.

證明 當 f_1 和 f_2 屬於 E 時，$\lambda f_1+(1-\lambda)f_2$ 也屬於 E $(0\leqslant\lambda\leqslant 1)$，這就是說 E 是一凸性集. 現在要證：假如對於 E 中任一元素 f_0E 中必有 $\{f_n\}$ 使 $f_n \xrightarrow{\rho} f$，則 E 中必有 $\{g_n\}$ 適合 $g \overset{p}{\rightrightarrows} f$. 我們取定理中的 $f_{n_1}, f_{n_2}, \cdots$，置

$$g_k = \frac{f_{n_1} + \cdots + f_{n_k}}{k},$$

則 $g_k \in E$, $g_k \overset{p}{\rightrightarrows} f$. 證明完畢.

3. 連續函數族上的綫性泛函數 設 $C(a, b)$ 是區間 $[a, b]$ 上的連續函數 $f(x)$ 的全體，就是 $[a,b]$ 上的連續函數族. 對於 $C(a,b)$ 的任一元素 $f(x)$，有一個如下的實數 $A(f)$：

(一) $A(f)$ 具有加減性：即當 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 都屬於 $C(a, b)$ 時，

$$A(f_1+f_2) = A(f_1) + A(f_2).$$

(二) 整齊性：若 c 是一常數，則當 $f \in C(a, b)$ 時，

$$A(cf) = cA(f).$$

(三) 有界性：有常數 M 適合 $|A(f)| \leqslant M \max|f(x)|$.

具有此三個性質的 $A(f)$，稱它做 $C(a, b)$ 上的綫性泛函數. 簡寫

$$\|f\| = \max|f(x)|,$$

叫它做 f 的模. 稱條件(三)中 M 的下界爲 $A(f)$ 的模，記它做 $\|A\|$，由是

$$|A(f)| \leqslant \|A\| \cdot \|f\|.$$

當 $p\to\infty$ 時，$\left(\int_a^b |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \to \|f\|$. 因此函數族 $C(a, b)$

是 $L^{\infty}(a, b)$. 我們已經證明過，$L^p(a, b)$中的綫性泛函數 $A(f)$ 是以 $L^q(a, b)\left(q = \dfrac{p}{p-1}\right)$中某一函數 g 爲母函數的積分(f, g). 但是在函數族 $C(a, b)$中來求 $A(f)$，其解不復爲(f, g)的形式. 例如 ξ 是(a, b)中的一點，$A(f) = f(\xi)$的話，它只能寫成斯帝捷積分

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x),\ \alpha(x) = \begin{cases} 0 & (x < \xi) \\ 1 & (x > \xi) \end{cases}$$

的形式. 事實上，我們有 F. 黎斯的定理：

定理 1. 若 $\alpha(x)$ 在區間 $[a, b]$ 中是有界變差，則當 $f(x) \in C(a, b)$時，積分

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x)$$

成一綫性泛函數. 倒轉來說，$C(a, b)$上的任一綫性泛函數都可以寫成黎曼斯帝捷積分.

證明 設 V 是 $\alpha(x)$的全變差，則因

$$\left|\int_a^b f(x) d\alpha(x)\right| \leqslant V \max|f(x)|,$$

積分 $\int f d\alpha$ 具有有界性. 顯然地，$\int f d\alpha$ 具有整齊性和加減性，它是一個 $C(a, b)$上的綫性泛函數.

現在證明 $C(a, b)$ 上的綫性泛函數是一黎曼斯帝捷積分. 設 $f_1(x), f_2(x), \cdots$ 是一均勻有界的增加的連續函數列，它的極限函數 $f(x)$是有界. 我們能證極限 $\lim A(f_n)$一定存在，事實上正項級數

$$[f_2(x) - f_1(x)] + [f_3(x) - f_2(x)] + \cdots$$

收斂於 $f(x) - f_1(x)$. 另一方面，寫 $|Af_n - Af_{n-1}| = \varepsilon_n(Af_n - f_{n-1})$, $\varepsilon_n = \pm 1$. 從 $\varepsilon_2(Af_2 - Af_1) + \cdots + \varepsilon_n(Af_n - Af_{n-1}) \leqslant M_A \|\varepsilon_2(f_2 - f_1) + \cdots + \varepsilon_n(f_n - f_{n-1})\| \leqslant \|f_n - f_1\| \leqslant \|f - f_1\|$，知道

$$Af_1 + (Af_2 - Af_1) + (Af_3 - Af_2) + \cdots$$

是一絕對收斂的級數，所以 $\lim A(f_n)$ 是一有限數．此極限值可記為 $A(f)$：事實上，當另一這樣的函數列 $g_n(x)$ 收斂於同一函數 $f(x)$ 時，我們能證

$$\lim_{n\to\infty} A(f_n) = \lim_{n\to\infty} A(g_n).$$

我們不妨假設 $\{f_n\}$ 和 $\{g_n\}$ 都是常增的函數列，否則的話，我們可以考慮 $\left\{f_n - \frac{1}{n}\right\}, \left\{g_n - \frac{1}{n}\right\}$. 對於一定的 f_m，必有 g_n 適合 $f_m < g_n$. 這是因為閉集 $(f_m(x) \geqslant g_n(x))$ 都不是空的，並且

$$(f_m(x) \geqslant g_1(x)) \supset (f_m(x) \geqslant g_2(x)) \supset \cdots$$

所以 $\prod_{n=1}^{\infty} (f_m(x) \geqslant g_n(x))$ 至少含有一點 ξ，但是 $f_m(\xi) \geqslant \lim g_n(\xi)$ 與 $f_m(\xi) < f(\xi)$ 相衝突的．因此存在着如下的 $\{m_\nu\}$：

$$f_{m_1} < g_{m_2} < f_{m_3} < g_{m_4} < \cdots;\ m_1 < m_2 < \cdots.$$

由是可知 $\lim A(f_n) = \lim A(g_n)$. 這樣一來，當有界函數 $f(x)$ 是增加的連續函數列 $\{f_n\}$ 的極限時，$A(f)$ 具有一定的數值，就是 $\lim A(f_n)$. 假如 $g(x)$ 也是和 $f(x)$ 同樣的一個函數，那末關係

$$A(f+g) = A(f) + A(g)$$

必須成立．現在我們定義 $A(f-g)$ 為 $A(f) - A(g)$. 這個定義的合理性是由於：當 $f - g = f_1 - g_1$ 時，從

$$f + g_1 = f_1 + g$$

得到 $A(f) + A(g_1) = A(f_1) + A(g)$，因此 $A(f) - A(g) = A(f_1) - A(g_2)$. 這樣延展出來的泛函數顯然地具有整齊性和加減性．現在還要建立它的有界性．就是說，我們還要證明

$$|A(f-g)| \leqslant M_A\mu,\ \mu = \max|f(x) - g(x)|.$$

但 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分別是增加的連續函數列 $\{f_n\}$ 和 $\{g_n\}$ 的極限．我們作成如下的補助函數列 $\{h_n(x)\}$：

當 $|f_n(x) - g_n(x)| \leqslant \mu$ 時，取 $h_n(x) = f_n(x)$；

當 $f_n(x) - g_n(x) > \mu$ 時，取 $h_n(x) = g_n(x) + \mu$；

當 $f_n(x)-g_n(x)<-\mu$ 時，取 $h_n(x)=g_n(x)-\mu$.
容易明白：$h_n(x)$ 是一連續函數；當 $n\to\infty$ 時，$h_n(x)$ 收斂於 $f(x)$. 從

$$|h_n(x)-g_n(x)|\leqslant\mu,$$

得到

$$|A(f-g)|=|\lim(Ak_n-Ag_n)|\leqslant M_A\mu.$$

寫閉區間 $c\leqslant x\leqslant d$ 上的特徵函數為 $f_{c,d}(x)$. 假如

$$f_n(x)=f_{c,d}(x),\ c<x<d;$$

$$f_n(x)=0,\ x\leqslant c-\frac{1}{n},\ x\geqslant d+\frac{1}{n};$$

$$f_n(x)=\text{一次函數}\left(c-\frac{1}{n}\leqslant x\leqslant c,\ d\leqslant x\leqslant d+\frac{1}{n}\right)$$

那末增加的連續函數列 $\{-f_n(x)\}$ 收斂於 $-f_{c,d}(x)$，所以一切具有形式

$$f_{c,d}(x)\quad(a\leqslant c<d\leqslant b)$$

的函數都在綫性泛函數可以延展的範圍中. 現在證明：函數

$$\alpha(x)=A(f_{a,x}),\ \alpha(a)=0$$

是有界變差，它的全變差不大於 M_A. 設

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

$$F(x)=\varepsilon_1 f_{a,x_1}(x)+\sum_{2}^{n}\varepsilon_k[f_{a,x_k}(x)-f_{a,x_{k-1}}(x)],$$

$$\varepsilon_k[\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})]\geqslant 0,\ |\varepsilon_k|=1,$$

則

$$S\equiv\sum_{1}^{n}|\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})|=A(F(x)).$$

函數 $F(x)$ 是在延展的範圍中的，由於 $|F(x)|\leqslant 1$，所以 $S=AF\leqslant$ $\leqslant M_A$.

對於 $C(a,b)$ 中的一個函數 $f(x)$，作如下的 $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = f(\xi_1)f_{a,x_1}(x) + \sum_2^n f(\xi_k)[f_{a,x_k}(x) - f_{a,x_{k-1}}(x)],$$

此地

$$\xi_k \in I_k = (x_{k-1}, x_k), \quad k = 1, 2, \cdots, n.$$

函數 $\varphi(x)$ 在 I_k 中，其值是 $f(\xi_k)$，$\varphi(x_k) = f(\xi_k)$，$\varphi(a) = f(\xi_1)$。由是

$$A(\varphi) = f(\xi_1)\alpha(x_1) + \sum_2^n f(\xi_k)[\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})]$$

$$= \sum_1^n f(\xi_k)[\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})].$$

設 ω_k 是 $f(x)$ 在 I_k 中的振幅，則得

$$|A(f) - A(\varphi)| = |A(f - \varphi)| \leqslant M_A \max \omega_k.$$

由於，當 $\max(x_k - x_{k-1}) \to 0$ 時，

$$\lim \omega_k = 0, \quad \lim A(\varphi) = \int_a^b f(x)d\alpha(x),$$

所以

$$A(f) = \int_a^b f(x)d\alpha(x), \quad \int_a^b |d\alpha(x)| = M_A.$$

定理證畢.

那末，適合定理 1 的 $\alpha(x)$ 究竟有幾個呢？ 換句話問：對於 $C(a, b)$ 中的任一 $f(x)$，使等式

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = 0$$

成立的有界變差函數 $\alpha(x)$ 的一般形式是怎樣的？下述定理就是回答這個問題.

定理 2. 函數族 $C(a, b)$ 中任一 $f(x)$ 對於有界變差函數 $\alpha(x)$ 的斯帝捷分化為 0 的充要條件是 $\alpha(x)$ 在 $[a, b]$ 的一個子集 E 上等於一個常數，E 含有 a 和 b，並且在 (a, b) 中到處稠密.

證明 設 $\xi \in (a, b)$ 是 $\alpha(x)$ 的一個連續點，作連續函數 $f(x)$ 如下：

$$f(x) = f_{a,\xi}(x) \quad (a \leqslant x \leqslant \xi),$$
$$f(x) = 0 \qquad \left(\xi + \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant b\right),$$
$$f(x) = \text{一次函數}\left(\xi \leqslant x \leqslant \xi + \frac{1}{n}\right),$$

那末

$$0 = \int_a^b f(x)d\alpha(x) = \int_a^\xi f(x)d\alpha(x) +$$
$$+ \int_\xi^{\xi+\frac{1}{n}} f(x)d\alpha(x) + \int_{\xi+\frac{1}{n}}^b f(x)d\alpha(x) =$$
$$= \alpha(\xi) - \alpha(a) + o\left(\int_\xi^{\xi+\frac{1}{n}} |d\alpha(x)|\right).$$

因此 $\alpha(\xi)=\alpha(a)$. 所以在$[a,b]$中的 $\alpha(x)$的任何連續點 $x, \alpha(x) = = \alpha(a)$. 又從

$$\int_a^b d\alpha(x) = 0,$$

知 $\alpha(b) = \alpha(a)$——利用分離積分法. 反過來說, 假如$\alpha(x)$在它的連續點等於 $\alpha(a)$,那末由於 $\alpha(x)$ 的連續點在$[a, b]$中是到處稠密;所以取分點 x_k 爲 $\alpha(x)$的連續點時,從

$$\sum_1^n f(\xi_k)(\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})) = 0,$$

得$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = 0$. 定理證畢.

下面的定理,指出綫性泛函數的定義區之延展條件.

定理 3. 設E是$C(a, b)$ 的一個子族. 假如E上有綫性泛函數A,其模是 M, 那末A必可延展到 $C(a, b)$且其模等於M.

其實,我們能證更深刻的定理如下:

定理 4. 設 $E \subset C(a, b)$. 假如有一個規律 A (不一定是綫性泛函數),當 $f(x) \in E$ 時, Af 是一個數,那末這個規律A可以延展成 $C(a, b)$ 上之綫性泛函數,且其模 $\|A\|$ 不大於 M 的充要條

件是不等式

$$|C_1Af_1 + \cdots + C_nAf_n| \leqslant M \| c_1f_1 + \cdots + c_nf_n \|$$

對於E中的任何 $f_1, \cdots, f_n$ 和任何常數 $c_1, \cdots, c_n$ 成立。

證明 定理 3 顯然地含在定理 4 之中．現在證明定理 4．所要證明的是條件的充足性．設 $g = c_1f_1 + \cdots + c_nf_n$, $f_\nu \in E (\nu = 1, \cdots, n)$，則置 $A(g) = \sum_1^n c_kA(f_n)$．此定義是合理的:事實上,當

$$c_1f_1 + \cdots + c_nf_n = c_1'f_1 + \cdots + c_n'f_n$$

時,從所設的條件,得到

$$|(c_1 - c_1')Af_1 + \cdots + (c_n - c_n')Af_n| \leqslant M \| 0 \| = 0.$$

因此 $\Sigma c_kAf_k = \Sigma c_k'Af_k$. 由是添加 E 中元素的一切綫性結合 g於E, 獲得 E'. 在 E' 上的 A,具有加減性整齊性和有界性,且當 $g \in E'$ 時, $|Ag| \leqslant M \| g \|$.

設 g_1 和 g_2 都屬於 E', f 屬於 $C(a, b)$而不屬於 E'. 從

$$A(g_1) - A(g_2) = A(g_1 - g_2) \leqslant M \| g_1 - g_2 \| \leqslant$$
$$\leqslant M \| g_1 - f \| + M \| f - g_2 \|,$$

得到 $A(g_1) - M \| g_1 - f \| \leqslant A(g_2) + M \| f - g_2 \|$. 因當 $g, g_2 \in E'$ 時,一切數 $A(g_1) - M \| g_1 - f \|$ 都在任一數 $A(g_2) + M \| f - g_2 \|$的左方．此兩集之間,至少存在着一數,我們任意選取這樣的一個數作為 $A(f)$．因此,當 $g \in E'$ 時,

$$A(g) - M \| f - g \| \leqslant Af \leqslant A(g) + M \| f - g \|.$$

易 g 為 $-g$, 則得 $-A(g) - M \| f + g \| \leqslant Af \leqslant -A(g) + M \| f + g \|$, 所以

$$|A(f) + A(g)| \leqslant M \| f + g \|. \tag{1}$$

對於 $f \in C(a, b)$ 和 $g \in E'$ 的綫性結合, 我們規定 $A(cf + g) = CA(f) + A(g)$. 對於這個規定,可以驗證

$$|A(cf + g)| \leqslant M \| cf + g \|.$$

當 $c = 0$ 時,這就是所設的條件．假如 $c \neq 0$, 那末從(1),

$$|A(cf+g)|=\left|cA(f)+cA\left(\frac{g}{c}\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant M|c|\left\|f+\frac{g}{c}\right\|=M\|cf+g\|.$$

由是條件 $|\Sigma c_k A(f_k)|\leqslant M\|\Sigma cf_k\|$ 對於 E'' 中的一次結合也成立. E'' 是 f 與 E' 中的 g 之綫性結合的集. 並且,這樣在 E'' 上所延展的綫性泛函數,顯然地具有加減性,整齊性和有界性. 並且其模不大於 M.

我們逐一地採取 $1, x, x^2, \cdots$ 爲 f, 這些函數的一次結合在 $C(a, b)$中是到處稠密的(由於瓦耶斯脫拉斯定理). 因此 A 在 $C(a,b)$的這樣的子集上定義着,並且具有有界性(其模 $\leqslant M$). 經過極限過程, A 在 $C(a, b)$上完全地定義. 定理證畢.

設 $f_1(x)\in C(a,b), f_2(x)\in C(a,b)$,記 $f(x)=f_1(x)+if_2(x)$ 的全體爲 $K(a, b)$. $E\subset K(a, b)$, E'是 E 中有限個函數的綫性結合,係數不一定是實數。我們證明下面的

系 E 上的"泛函數"A 可以延展爲 $K(a, b)$ 上的綫性泛函數且其模不大於M之充要條件是

$$|C_1A(f_1)+C_2A(f_2)+\cdots+C_nA(f_n)|\leqslant$$

$$\leqslant M\left\|\sum_1^n C_kA(f_k)\right\|$$

對於 E 中任何 $f_1, \cdots, f_n$ 成立, $c_1, \cdots, c_n$ 都是複數.

證明 從 E 延展到 E', 其情況和不用複數時相同. 在 E' 上 A 具有整齊性,所以等式

$$A(ig)=iA(g)$$

對於 E' 中任何函數 g 成立. 設 $A_1(g)$是 $A(g)$ 的實部, 則因 $|\Sigma cA(f)|\leqslant M\|\Sigma cf\|$,含有 $|\Sigma cA_1(f)|\leqslant M\|\Sigma cf\|$, 由定理的證明,我們知道 A_1 可以延拓到 $K(a, b)$,而具有加減,整齊,有界三個性質. 現在證明

$$B(f)=A_1(f)-iA_1(if)$$

就是所求的泛函數．這包含着證明下列兩事：第一，$B(f)$ 具有加減性，整齊性和有界性——$|B(f)| \leqslant M\|f\|$；第二，在 E' 上$B(f)$ 和 $A(f)$一致．

從 A_1 的加減性立刻知道 B 有加減性． 其次證明 B 有整齊性：設 $c = a + ib$，則

$$\begin{aligned} B(cf) &= A_1(af + bif) - iA_1(aif - bf) \\ &= aA_1(f) + bA_1(if) - iaA_1(if) + ibA_1(f) \\ &= c(A_1 f) - iA_1(if) = cB(f). \end{aligned}$$

爲着要建立 B 的有界性，置 $B(f) = re^{i\theta}(r \geqslant 0)$．那末

$$|B(f)| = r = e^{-i\theta}B(f) = B(e^{-i\theta}f).$$

這是一個實數，$A_1(ie^{-i\theta}f)$必須等於 0．因此

$$|B(f)| = A_1(e^{-i\theta}f) \leqslant M\|e^{-i\theta}f\| = M\|f\|.$$

最後證明 $B(g) = A(g)$在 E' 上成立：由於

$$-A_1(ig) = -R[A(ig)] = -R[iA(g)] = I(A(g)),$$

所以當 $g \in E'$ 時，

$$A(g) = A_1(g) - iA_1(ig) = B(g).$$

證明完畢．

利用定理 3，我們可以解決下面的問題：設 $E_0 \subset C(a, b)$，$C(a, b)$ 中任一函數可用 E_0 中函數的綫性結合來勻追的充要條件是怎樣？

定理 4. 設 $E_0 \subset C(a,b)$，$C(a,b)$中任一函數 $f(x)$ 可用 E_0 中有限個函數之綫性結合來勻追的充要條件是除 $A(f)=0$ 而外，沒有綫性泛函數在 E_0 上爲 0．就是說，有界變差的函數 $\alpha(x)$ 能使

$$Ag = \int_a^b g(x)d\alpha(x) = 0$$

對於 E_0 中任一元素 $g(x)$ 成立，則必 $Af \equiv 0$．

證明 添入 $C(a, b)$中不屬於 E_0 的一個函數 $f(x)$於 E_0 而成 E．設綫性泛函數 A 在 E_0 爲 0，當 $f_1, \cdots, f_n$ 屬於 E 時，

$$|c_1Af_1 + \cdots + c_nAf_n| \leqslant M \| c_1f_1 + \cdots + c_nf_n \|.$$

由定理 4 的證明，這種 M 的下界就是 $\| A \| = M_A$. 設 g 是 E_0 中任何有限個函數的一個綫結合，記

$$d = \min_g \| f(x) - g(x) \|,$$

d 是 f 與 E 的“綫性距離”. 若 $Af = 1$, 則從 $|A(f-g)| \leqslant M_A d$, 得到 $M_A \geqslant \frac{1}{d}$. 所以 d 决不能任意地小，除非 $Af=0$. 這是證明條件的必要性.

現在證明條件的充足性. 設 $d > 0$, 我們取

$$M_A = \frac{1}{d}, \ Af = 1, \ Ag = 0,$$

g 是 E_0 中任一綫性結合. 那末不等式

$$|cA(f) - Ag| \leqslant M_A \| cf - g \|$$

常成立. 由定理 4, A 可以延展到 $C(a,b)$ 上，這種綫性泛函數 A 的存在是與所設條件不相容的. 故必 $d = 0$. 定理證畢.

利用定理 4, 我們還可以回答下面的問題：設 $f_n(x) \in C(a,b)$, $\{\mu_n\}$ 是一數列，在怎樣情况下，存在有界變差的函數 $\alpha(x)$ 適合

$$\mu_n = \int_a^b f_n(x) d\alpha(x), \ n = 0, 1, 2, \cdots.$$

我們稱這個問題為能率問題. 在 $f_n(x) = x^n$ 的特殊情况，是物理學中的問題(質量分佈的能率問題，電荷分佈的能率問題等等).

能率問題是一個探求綫泛函數 $A(f)$ 的問題，一方面，要

$$A(f_n) = \mu_n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

另一方面，要 $A(f)$ 在 $C(a, b)$ 有意義. 問題是可解的話，那末有有界變差的函數 $\alpha(x)$ 適合於

$$\int_a^b f_n(x) d\alpha(x) = \mu_n (n = 0, 1, \cdots),$$

$$\int_a^b | d\alpha(x) | = \| A \|.$$

從定理 3 我們得到

定理 5. 設 $f_n(x) \in K(a, b)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ (可能都是實函

數)，$\{\mu_n\}$是一數列．使$f_n(x)$的能率爲$\mu_n(n=0,1,\cdots)$的能率問題具有解$\alpha(x)$，並且$\alpha(x)$的全變差不大於M的充要條件是

$$|c_0\mu_0+\cdots+c_n\mu_n|\leqslant M\cdot\max|c_0f_0(x)+\cdots+c_nf_n(x)|.$$

對於任何$c_0,c_1,\cdots,c_n,n$成立(但是當μ_k和$f_k(x)$都是實數時，c_k也只限於實數)．

在實數(μ_k和$f_k(x)$都是實數)的情況，並且$f_0(x)=1$時，條件$|\Sigma c_k\mu_k|\leqslant M\,\|\Sigma c_kf_k(x)\|$的確成立：事實上，置$h(x)=\Sigma c_kf_k(x)$，則從

$$\|h(x)\|f_0(x)\pm h(x)\geqslant 0,$$

得$\|h\|\mu_0\pm\Sigma c_k\mu_k\geqslant 0$，所以$|\Sigma c_k\mu_k|\leqslant\mu_0\|h\|$．我們可證此時$\alpha(x)$是一增加函數：因爲一方面

$$\mu_0=\int_a^b f_0(x)d\alpha(x)=\int_a^b d\alpha(x),$$

另一方面，$\alpha(x)$的全變差

$$\int_a^b|d\alpha(x)|\leqslant\mu_0.$$

現在研討泛函數敍列$\{A_n\}$的收斂條件．詳細地說：設$\alpha_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$都在$[a,b]$爲有界變差，$\alpha_n(a)=0$，要探求$A_n(f)\to A(f)$對於$C(a,b)$中任一f成立的條件．

仿照$L^2(e)$中相當問題的研討，M_{A_n} $(n=1,2,\cdots)$成一有界數列對於$A_n(f)\to A(f)$是必要的．另一方面，假如M_{A_n}是有界，那末當$A_n(f)\to A(f)$對於一個完備集$\mathscr{E}$上成立時，$A_nf\to Af$到處成立．就是說，當$g\in\mathscr{E}$時$A_n(g)\to A(g)$成立的話，那末$A_n(f)\to A(f)$對於$\mathscr{E}$中函數的綫性結合來勻迫的函數f也成立；這種f的全體就是$C(a,b)$．事實上，假如

$$\|f-g\|<\varepsilon,\ g=\Sigma c_kf_k,\ f_k\in\mathscr{E},$$

那末$A_n(g)=\Sigma C_kA_n(f_k)\to\Sigma C_kA(f_k)=A(g)$．當$n$足够大時，

$$|A_n(g)-A(g)|<\varepsilon.$$

設 $\|A_n\| \leqslant B$，則從

$$|A(f) - A_n(f)| \leqslant |A(f-g)| + |A(g) - A_n(g)| + \\ + |A_n(g-f)| \leqslant M_A\varepsilon + \varepsilon + B\varepsilon,$$

得 $A_n(f) \to A(f)$. 利用此事實，我們可以證明

定理 6. 設 A_n 和 A 是以 $\alpha_n(x)$ 和 $\alpha(x)$ 爲母函數的綫性泛函數，

$$a \leqslant x \leqslant b,\ \alpha_n(a) = 0,\ \alpha(a) = 0$$

關係 $A_n(f) \to A(f)$ 在 $C(a, b)$ 上成立的充要條件是

$$\int_a^\xi \alpha_n(x)dx \to \int_a^\xi \alpha(x)dx \quad (a \leqslant \xi \leqslant b),$$

$$\alpha_n(b) \to \alpha(b),$$

$$\|A_n\| = O(1).$$

證明 我們選取如下的函數集爲 $\mathscr{E}$：$\mathscr{E}$ 中含有 $f(x) = 1$ 並且含有

$$f(x) = f_\xi(x) = \max(\xi - x, 0) \quad (a \leqslant \xi \leqslant b),$$

而不含有其他的函數. 顯然地，$\mathscr{E}$ 是 $C(a, b)$ 之一子族；像是折綫的函數 $p(x)\ (a \leqslant x \leqslant b)$ 必可用 $\mathscr{E}$ 中有限個函數的綫性結合來表示：事實上，設折綫的頂點是 $a = \xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_n = b$，則取適當的係數 $c_0, c_1, \cdots, c_n$，我們可得

$$p(x) = c_1 f_{\xi_1}(x) + c_2 f_{\xi_2}(x) + \cdots + c_n f_{\xi_n}(x) + p(b).$$

此式當 $x = b$ 時顯然成立. 又以 $x = \xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_{n-1}$ 代入此式，則得 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 之間的 n 個方程，由是可以决定 $c_1, \cdots, c_n$. 另一方面，$C(a, b)$ 中任一函數可用折綫函數 $p(x)$ 來勻迫.

利用上面所引進的事實，在 $\|A_n\| = O(1)$ 的條件下，由於

$$\int_a^b d\alpha_n(x) \to \int_a^b d\alpha(x),$$

$$\int_a^\xi (\xi - x)d\alpha_n(x) \to \int_a^\xi (\xi - x)d\alpha(x).$$

所以，$A_n(f) \to A(f)$ 在 $C(a, b)$ 中成立. 定理證畢.

系 假如定理 6 中的 A_n 之母函數 $\alpha_n(x)$ 都是單調增加時，那末 $A_n(f) \to A(f)$ 在 $C(a,b)$ 上成立的充要條件是函數列 $\alpha_n(x)$ 實質收斂於 $\alpha(x)$, $\alpha_n(b) \to \alpha(b)$.

證明 設在 $[a, b]$ 中有一個零集 S, 當 $x \bar{\in} S$ 時, $\alpha_n(x) \to \alpha(x)$. 設 $\xi \bar{\in} S$ 是 $\alpha(x)$ 一個連續點，則當 $x < \xi < x'$, $x \bar{\in} S$, $x' \in S$ 時，由於 $\alpha_n(x)$ 的單調性，

$$\alpha(x) = \lim_{n\to\infty} \alpha_n(x) \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} \alpha_n(\xi) \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} \alpha_n(\xi) \leqslant \lim \alpha_n(x') = \alpha(x').$$

令 $x \to \xi$, $x' \to \xi$, 則得 $\alpha_n(\xi) \to \alpha(\xi)$. 另一方面，由於

$$\alpha_n(x) \leqslant \alpha_n(b) \to \alpha(b),$$

所以當 $a \leqslant \xi \leqslant b$ 時，

$$\lim \int_a^\xi \alpha_n(x)dx = \int_a^\xi \alpha(x)dx.$$

倒轉來說，從這個等式與 $\alpha_n(x)$ 的單調性，我們看到

$$\frac{1}{h}\int_{\xi-h}^{\xi} \alpha_n(x)dx \leqslant \alpha_n(\xi) \leqslant \frac{1}{k}\int_{\xi}^{\xi+k} \alpha_n(x)dx$$

當 $h > 0$, $k > 0$ 時成立。由是

$$\frac{1}{h}\int_{\xi-h}^{\xi} \alpha(x)dx \leqslant \underline{\lim}\, \alpha_n(\xi) \leqslant \overline{\lim}\, \alpha_n(\xi) \leqslant \frac{1}{k}\int_{\xi}^{\xi+k} \alpha(x)dx.$$

因此在 $\alpha(x)$ 的連續點，成立着 $\alpha_n(\xi) \to \alpha(\xi)$. 證明完畢.

4. 完備空間的收縮映照 設 R 是一完備的有度空間, φ 是如下的一種映照，它把 R 映照於 R——$\varphi(R) \subseteq R$. 並且存在着小於 1 一個正數 δ, 當 $x \in R$, $y \in R$ 時, $\varphi(x)$ 與 $\varphi(y)$ 之間的距離小於或等於 $\delta r(x, y)$. 我們稱這種映照為收縮映照

定理 1. 有度完備空間的收縮映照具有連續性，並且這種映照具有唯一的不動點.

證明 設完備空間 R 經過收縮映照 φ, 其像在 R 之中，則當 R 中的點列 $\{x_n\}$ 收斂於 x_0 時，從

$$r(\varphi(x_n), \varphi(x_0)) \leqslant \delta r(x_n, x_0) (0 < \delta < 1)$$

得到 $\varphi(x_n) \to \varphi(x_0)$. 所以 φ 是一連續映照.

要證方程 $\varphi(x)=x$ 具有唯一的解 x，首先於 R 取一點 x_0. 置 $x_n=\varphi(x_{n-1})(n=1,2,\cdots)$. 簡寫 $x_n=\varphi^n(x_0)$, 那末當 $m>n$ 時

$$r(x_n, x_m)=r(\varphi^n(x_0)\cdot\varphi^m(x_0))\leqslant\delta^n r(x_0,x_{m-n}).$$

利用三點不等式得到

$$r(x_n, x_m)\leqslant\delta^n\{r(x_0, x_1)+\cdots+r(x_{m-n-1}, x_{m-n})\}.$$

括弧中的和小於或等於$(1+\delta+\delta^2+\cdots+\delta^{m-n-1})r(x_0, x_1)$，所以

$$r(x_n, x_m)\leqslant\frac{\delta^n}{1-\delta}r(x_0, x_1), (m>n).$$

由是，從 R 的完備性知道 $\{x_n\}$ 收斂於 R 中的一點 x. 又從映照 φ 的連續性，

$$\varphi(x)=\varphi(\lim x_n)=\lim\varphi(x_n)=\lim x_{n+1}=x.$$

這是證明 x 是一不動點. 不動點是只有一個的：假如

$$\varphi(x)=x, \varphi(y)=y,$$

那末從 $r(x,y)=r(\varphi(x),\varphi(y))\leqslant\delta r(x,y)$, 得着 $r(x,y)=0$. 所以 $x=y$. 證明完畢。

例 設由映照 φ:

$$y_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j(i=1,2,\cdots,n)$$

將 n 維歐幾利得空間映照於自身. 則當

$$\sum_{j=1}^{n}(a_{i1}^2+\cdots+a_{in}^2)<\delta^2<1$$

時，有唯一的點$(x,\cdots,x_n)$適合於

$$x_i=a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n(i=1,2,\cdots,n).$$

事實上，歐幾利得空間中兩點 $x=(x_1,\cdots,x_n)$與 $y=(y_1,\cdots,y_n)$ 之距離是由下式定義

$$r(x,y)=(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2.$$

故

$$\{r(\varphi(x), \varphi(y))\}^2 = \sum_{i=1}^{n}\{a_{i1}(x_1 - y_1) + \cdots + a_{in}(x_n - y_n)\}^2$$

$$\leqslant [r(x, y)]^2\sum_{i=1}^{n}(a_{i1}^2 + \cdots + a_{in}^2) < \delta^2[r(x, y)]^2.$$

所以 φ 是一收縮映照，因此空間中存在着唯一的不動點。

現在應用定理 1 來證明微分方程論中的匹加爾（Picard）定理：

定理 2. 設函數 $f(x, y)$ 在點 (x_0, y_0) 之一環境中是連續的，就 y 而言滿足李普惜茲條件

$$|f(x_1, y_1) - f(x_1, y_2)| \leqslant M|y_1 - y_2|,$$

那末存在着區間 $x_0 - d < x < x_0 + d$，在此區間中，微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

有唯一的解 $y = \phi(x)$ 適合 $y_0 = \phi(x_0)$.

證明 要證明的事，顯然地等價於積分方程

$$\phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi(t))dt$$

之解（在 $x = x_0$ 的附近）的唯一性. 由假設存在如下的閉域 G, G 含有 (x_0, y_0)，在 G 中 $f(x, y)$ 為有界：

$$|f(x, y)| \leqslant K.$$

取正數 d 相當小，使 $\delta = Md < 1$ 且使矩形 $|x - x_0| < d$, $|y - y_0| \leqslant Kd$ 屬於 G. 適合

$$|\varphi(x) - y_0| \leqslant Kd \quad (|x - x_0| \leqslant d)$$

的一切連續函數 $\varphi(x)(x_0 - d \leqslant x \leqslant x_0 + d)$ 成一空間 C^*. 以

$$r(\varphi_1, \varphi_2) = \max|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|$$

為距離的定義，則 C^* 成一完備空間. 由關係式

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))dt \quad (|x - x_0| \leqslant d)$$

將 C^* 中的 φ 映照於 C^* 中的 ψ：事實上，

$$|\psi(x)-y_0|=\left|\int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))dt\right|< dK.$$

另一方面，從

$$\int_{x_0}^{x}|f(t,\varphi_1(t))-f(t,\varphi_2(t))|dt\leqslant Md\cdot\max|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)|$$

得 $r(\psi_1,\psi_2)\leqslant\delta\cdot r(\varphi_1,\varphi_2)$. 所以 φ 是一收縮映照. 從定理 1 知道方程 $\psi(\varphi)=\varphi$ 具有唯一之解. 證明完畢.

匹加爾的定理可以推廣到方程組.

定理 3. 設有微分方程組

$$\frac{dy_\nu}{dx}=f_\nu(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)\ (\nu=1,\cdots,n)$$

以 $y_\nu(x_0)=y_{0\nu}(\nu=1,2,\cdots,n)$ 爲開始條件. 假如在 $n+1$ 維空間 R^{n+1} 中的一點 $(x_0,y_{01},y_{02},\cdots,y_{0n})$ 的環境中一切函數 f_ν 是連續的，並且成立着李普惜兹條件

$$|f_\nu(t,y_1',\cdots,y_n')-f_\nu(x,y_1'',\cdots,y_n'')|\leqslant M\max_{j=1,\cdots,n}|y_j'-y_j''|,$$

那末必有一組並且只有一組函數 $y_\nu=\phi_\nu(x)$ $(\nu=1,2,\cdots,n)$ 在 x_0 的一個環境 $|x-x_0|\leqslant d$ 中適合 $y'_\nu=f_\nu(x,y_1,\cdots,y_n)(\nu=1,\cdots,n)$.

證明 我們要探求積分方程組

$$\phi_\nu(x)=y_{0\nu}+\int_{x_0}^{x}f_\nu(t,\phi_1(t),\cdots,\phi_n(t))dt\quad(\nu=1,\cdots,n)$$

之解的存在和它的唯一性. 由 f_ν 的連續性，存在含有點 $(x_0,y_{01},\cdots,y_{0n})$ 的閉域 G，在 G 上成立着

$$|f_\nu|\leqslant K\ (\nu=1,\cdots,n),$$

K 是一常數. 取正點 d 相當小於使 $\delta=Md<1$ 且使 $n+1$ 維的矩形

$$|x-x_0|\leqslant d,\ |y_1-y_{01}|\leqslant Kd,\cdots,|y_n-y_{0n}|\leqslant Kd$$

落入 G 中. 現在考慮這樣的空間 C_n^*: 它的元素是區間 $[x_0-d,x_0+d]$ 上連續函數組 $\phi=(\phi_1(x),\cdots,\phi_2(x))$，其中函數滿足條件

$$|\phi_\nu(x) - y_{0\nu}| < Kd \quad (\nu = 1, \cdots, n).$$

當 $\phi \in C_n^*, \psi \in C_n^*$ 時，定義

$$\max_{x,\nu} |\varphi_\nu(x) - \psi_\nu(x)| = r(\phi, \psi).$$

關係

$$\Psi_\nu(x) = y_\nu + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi_1(t), \cdots, \phi_n(t))dt \ (\nu = 1, \cdots, n)$$

定義一種映照 $\Psi = \varphi(\phi)$. 設 ϕ' 和 ϕ'' 是 C_n^* 中的兩點其像為 Ψ' 和 Ψ''，則從

$$\psi'_\nu(x) - \psi''_\nu(x) = \int_{x_0}^{x} \{f(t, \phi'_1(t), \cdots, \phi'_n(t) - \\ - f(t, \phi''_1(t), \cdots, \phi''_n(t))\}dt,$$

知道

$$r(\Psi', \Psi'') \leqslant Md \max |\phi'_\nu(x) - \phi''_\nu(x)| = \delta r(\phi', \phi'').$$

所以 φ 是一收縮映照，從定理 1，方程 $\phi = \varphi(\phi)$ 具有唯一的解．定理證畢．

設 $K(x, y)$ 和 $\phi(x)$, $g(x)$ 分別在正方形 $a \leqslant x \leqslant b, a \leqslant y \leqslant$ 和區間 $a \leqslant x \leqslant b$ 上所定義的連續函數，$f(x)$ 是未知函數，則稱

(I) $$\phi(x) = \int_a^b K(x, y)f(y)dy,$$

(II) $$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y)f(y)dy + \phi(x)$$

(III) $$\phi(x)f(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K(x, y)f(y)dy$$

分別為第一種，第二種以及第三種的弗賴特霍耳母(Fredholm)之綫性質積分方程，λ 是一參數．對於小參數的第二種方程，我們有如下的定理

定理 4. 假如 $K(x, y)$ 在正方形 $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant y \leqslant b$ 上的絕對值不大於 M，那末當

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$$

時，弗賴特霍耳母之第二種綫性方程(II)具有唯一的解．

證明 置(II)的右邊爲 $\varphi(f)$,變換 $\varphi(f)$ 映照完備空間 $C(a,b)$ 中之連續函數 $f(x)$ 於 $C(a, b)$ 中的函數 $\varphi(f)$. 當 f_1 和 f_2 都屬於 $C(a, b)$ 時

$$r(\varphi(f_1), \varphi(f_2)) \leqslant \lambda M(b-a) r(f_1, f_2).$$

由於 $\delta = \lambda M(b-a)$ 小於 1, 所以 φ 是一收縮映照. 從

$$f_n(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f_{n-1}(y) dy + \varphi(x) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

可得方程 $f(x) = \varphi(f)$ 之唯一的解 $f(x) = \lim f_n(x)$ (見定理 1 的證明). 定理證畢.

假如(I), (II), (III)中的核 $K(x, y)$ 當 $y > x$ 時, 其值爲 0, 那末得到伏耳得拉(Volterra)的第一種, 第二種, 第三種綫性積分方程

$$(\mathrm{Iv}) \qquad \phi(x) = \int_a^x K(x, y) f(y) dy,$$

$$(\mathrm{IIv}) \qquad f(x) = \lambda \int_a^x K(x, y) f(y) dy + \phi(x),$$

$$(\mathrm{IIIv}) \qquad \phi(x) f(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K(x, y) f(y) dy.$$

定理 5. 假如 $K(x, y)$ 在三角形 $a \leqslant y \leqslant x \leqslant b$ 中的絕對值不大於 M, 那末伏耳得拉第二種綫性方程(IIv)具有唯一的解 $f(x)$.

證明 考慮如下的映照 $\varphi(f) = g$, 但

$$\varphi(f) = \lambda \int_a^x K(x, y) f(y) dy + \phi(x).$$

設

$$m = \max |f_1(x) - f_2(x)|,$$

則從

$$|\varphi(f_1) - \varphi(f_2)| = \left| \lambda \int_a^x K(x, y)(f_1(y) - f_2(y)) dy \right| \leqslant$$
$$\leqslant \lambda M(x-a) m,$$

和

$$|\varphi^2(f_1) - \varphi^2(f_2)| \leqslant \left| \lambda \int_a^x K(x,y) \lambda M m (y-a) dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant (\lambda M)^2 m \frac{(x-a)^2}{2!}$$

知道

$$|\varphi^n(f_1)-\varphi^n(f_2)| \leqslant m \frac{(\lambda M(x-a))^n}{n!}$$

對於任何正整數 n 成立. 取 n 甚大,使

$$\frac{[\lambda M(b-a)]^n}{n!} = \delta < 1,$$

則得 $r(\varphi^n(f_1), \varphi^n(f_2)) \leqslant \delta r(f_1, f_2)$. 由是 $\varphi^n(f)$ 成一收縮映照,它映照 $[a, b]$ 上的連續函數於這種函數. 這種函數的全體自然成一完備空間,因此必有唯一的連續函數適合方程

$$\varphi^n(f(x)) = f(x).$$

置 $\varphi^n = \Phi$,則由定理 1 的證明,取任一 $[a, b]$ 上的連續函數 $g(x)$,成立着

$$\lim_{N\to\infty} \Phi^N(g(x)) = f(x).$$

或是

$$\varphi(\lim_{N\to\infty} \Phi^{N-1}(g(x))) = f(x).$$

所以 $\varphi(f) = f$. 唯一性是顯然的. 定理證畢.

從這個定理的證明,我們能述如下的一般性的定理.

定理 6. 設連續映照 φ 將完備的有度空間 R 映入於 R 中,並且對於一定的 n, φ^n 成一收縮映照,那末方程 $\varphi(x) = x$ 在 R 中具有唯一的解.

5. **連續函數族的緻密性** 要研討區間 $a \leqslant x \leqslant b$ 上的某一連續函數族 Φ 在 $C[a, b]$ 中的緻密性——就是說: Φ 中任一函數敍列是否必有一子列收斂於 $C[a, b]$ 中之一函數——首先建立下面的

引理 有度的完備空間 R 中的點集 M 具有緻密性的充要條件是對於任一正數 ε, M 中可作一 ε 網——就是說: M 中存在有限個點,以這些點為中心 ε 為半徑的一切球掩蓋着 M 中所有的點(簡稱這些有限個球心,是一個 ε 網).

證明 假如有 $\varepsilon>0$, M 中不能作 ε 網, 那末對於 $x_1 \in M$, M 中必有如下的 x_2:

$$r(x_1, x_2) \geq \varepsilon.$$

對於 x_3, M 中又有如下的 x_3:

$$r(x_1, x_3) \geq \varepsilon,\ r(x_2, x_3) \geq \varepsilon.$$

如是繼續進行, 獲得 M 中如下的點列 $\{x_n\}$:

$$r(x_m, x_n) \geq \varepsilon \quad (m \neq n).$$

因此 $\{x_n\}$ 不收斂, M 沒有緻密性. 這就是證明條件的必要性.

當條件成立時, 我們從 M 中任取一點列 $\{x_n\}$, 要證明 $\{x_n\}$ 含有一個收斂子列. 對於正數

$$\varepsilon_k = \frac{1}{k},$$

M 中有一個 ε_k 網:

$$(k) \quad a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \cdots, a_{N_k}^{(k)} (k = 1, 2, \cdots).$$

以 (1) 的 N_1 個點爲中心, 1 爲半徑的 N_1 個球, 叫它做網 (1). 網 (1) 蓋住 $\{x_n\}$ 中一切點, 其中必有一球——說是 S_1 含有 $\{x_n\}$ 的一個子列 $\{x_n^{(1)}\}$. 同樣, 網 (2) 中必有一球 S_2 含有 $\{x_n^{(k)}\}$ 之一子列 $\{x_n^{(k+1)}\}$. 點列 $x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \cdots$ 中的點, 除最初 $n-1$ 點而外都落入 S_n 中, S_n 的半徑是 $\frac{1}{n}$, 所以 $\lim x_n^{(n)}$ 存在, 此極限點屬於 R. 引理證畢.

系 有度的完備空間 R 中的點集 M 具有緻密性的充要條件是對於任一正數 ε, R 中存在如下的有限個點 $a_1, a_2, \cdots, a_{N_\varepsilon}$: 以這些點做中心 ε 爲半徑的 N_ε 個球掩蓋着 M.

證明 條件的必要性是從引理明白. 要證條件的充足性. 於以

$$a_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right),\ a_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right),\ \cdots,\ a_{N_{\frac{\varepsilon}{2}}}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

爲中心, $\frac{\varepsilon}{2}$ 爲半徑的球中, 各取 M 中的一點

$$x_1, x_2, \cdots, x_{N_{\frac{\varepsilon}{2}}},$$

以這些點爲中心，ε 爲半徑作球，這些球包含着前面的 $N_{\frac{\varepsilon}{2}}$ 個球，因此掩蓋着 M. 證明完畢.

定理 1. ——阿爾日拉 (Arzela) 的定理：$C(a, b)$ 的子族 M 在 $C(a, b)$ 中具有緻密性的充要條件是 M 中的一切函數是均勻有界並且是平等連續.

平等連續是對於任一正數 ε, 有僅與 ε 有關的 δ 存在，當 $[a, b]$ 中的兩點 x' 與 x'' 的距離小於 δ 時，不等式

$$|\phi(x'') - \phi(x')| < \varepsilon$$

對 M 中任何函數 $\phi(x)$ 成立.

證明 當 M 在 $C(a, b)$ 中具有緻密性時，對於 ε, M 中必有 $\frac{\varepsilon}{3}$ 網

$$\phi_1(x), \phi_2(x), \cdots, \phi_{N_{\frac{\varepsilon}{3}}}(x).$$

設 M_ν 是 $|\phi_\nu(x)|$ 的上界. 若 $\phi \in M$ 則必有 ϕ_ν 適合

$$r(\phi, \phi_\nu) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

因此

$$|\phi(x)| \leqslant |\phi_\nu(x)| + |\phi_\nu(x) - \phi(x)| \leqslant M_\nu + \frac{\varepsilon}{3}.$$

這是證明子族 M 的均勻有界性. 又從

$$|\phi(x) - \phi(x')| \leqslant$$

$$\leqslant |\phi(x) - \phi_\nu(x)| + |\phi_\nu(x) - \phi_\nu(x')| + |\phi_\nu(x') - \phi(x')|$$

$$< 2\frac{\varepsilon}{3} + |\phi_\nu(x) - \phi_\nu(x')|$$

和 $\phi_\nu(x) \in C(a, b)$, 知道有 $\delta = \delta(\varepsilon)$, 當 $|x' - x| < \delta$ 時，

$$|\phi_\nu(x) - \phi_\nu(x')| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

因此成立着

$$|\phi(x)-\phi(x')|<\varepsilon.$$

這時對於 M 中任何函數 ϕ 成立的，此地的 δ 與個別的 ϕ 無關係，所以 M 具有平等連續性.

假如 M 是 $C(a, b)$ 中具有均匀有界性和平等連續性的一個子族，那末任何 $\phi(x)\in M$ 的絕對值 $|\phi(x)|$ 都小於與 ϕ 無關的一個常數 K；又對於任一正數 ε，有 δ，當 $|x-x'|<\delta$ 時，不等式

$$|\phi(x)-\phi(x')|<\frac{1}{5}\varepsilon$$

對於 M 中任一函數 $\phi(x)$ 成立. 於 $[a, b]$ 和 $[-K, K]$ 中分別作如下的分點

$$-K=y_0<y_1<\cdots<y_n=K,\ y_\mu-y_{\mu-1}<\frac{\varepsilon}{5}(\mu=1,\cdots,m);$$

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,\ x_\nu-x_{\nu-1}<\delta(\nu=1,\cdots,n).$$

對於 M 中每一函數 $\phi(x)$，作一折綫函數 $\psi(x)$，使此折綫的頂點都是 (x_n, y_m) 的形式，且使具有如下的性質：對於 x_n，取適當的 $y_m=\psi(x_n)$ 使得

$$|\phi(x_n)-y_m|<\frac{\varepsilon}{5}(n=0,\cdots,n),$$

在區間 $x_m\leqslant x\leqslant x_{m+1}$ 中，$|\phi(x)-\psi(x')|$ 小於或等於

$$|\phi(x)-\phi(x_m)|+|\phi(x_m)+\psi(x_m)|+|\psi(x_m)-\psi(x)|$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{5}+\frac{\varepsilon}{5}+\quad+|\psi(x_m)-\psi(x_{m+1})|.$$

末項小於或等於

$$|\psi(x_m)-\phi(x_m)|+|\phi(x_m)-\phi(x_{m+1})|+|\phi(x_{m+1})-\psi(x_{m+1})|$$

$$<\frac{\varepsilon}{5}+\frac{\varepsilon}{5}+\frac{\varepsilon}{5}=\frac{3\varepsilon}{5}.$$

所以

$$|\phi(x)-\psi(x)|<\frac{2\varepsilon}{5}+\frac{3\varepsilon}{5}=\varepsilon.$$

這是對$[a,b]$中任何 x 成立的．以(x_n,y_m)做頂點的折綫函數 $\psi(x)$ 的個數是有限的，因此 $\psi(x)$的全體在 M 中成一 ϵ 網，M 具有緻密性．定理證畢．

利用阿爾日拉的定理，我們就能證明常微分方程論中的彼阿諾(Peano)的定理：

定理 2. 設 $f(x, y)$是區域 G 上之一連續函數，那末對於 G 中任意一點(x_0, y_0)，微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y)$$

至少有一條積分曲綫通過(x_0, y_0)．

證明 當證明時，不妨假設 G 是一閉域，那末，在 G 上 $f(x,y)$ 的絕對值小於一個常數 K_0 通過(x_0, y_0)作具有傾斜係數 K 和 K' 的兩直綫．又取 a 和 b 與 x_0 相當近，$a<x_0<b$．作兩直綫 $x=a$ 和 $x=b$，使此四根直綫所圍成的兩個三角形都落在 G 中．作歐樓(Euler)的折綫如下：通過(x_0,y_0)作一具有傾斜係數 $f(x_0,y_0)$的直綫，於此直綫上取一點(x_1, y_1)作一具有傾斜係數 $f(x_1, y_1)$的直綫，於此直綫上取一點(x_2, y_2)，…．設一串的歐樓折綫 $L_1, L_2, \cdots$ 都通過(x_0, y_0)，L_k 中的最長的綫段爲 l_k，$|l_k|\to 0$．設 L_k 的方程是 $y=\phi_k(x)$．均勻有界

$$y=\phi_k(x)$$

的函數列，$\{\phi_k(x)\}$ 在 $[a, b]$上是具有平等連續性的．從阿爾日拉的定理，有子函數列 $\phi_{n_1}(x), \phi_{n_2}(x), \cdots$ 在$[a, b]$上勻斂．設其極限爲 $\phi(x)$．顯然$\phi(x_0)=y_0$．我們要證 $\phi'(x)$ 等於 $f(x, \phi(x))$．換句話說，對於 $\varepsilon>0$，要證有 δ，當 $|x'-x|<\delta$ 時，

$$\left|\frac{\phi(x')-\phi(x)}{x'-x}-f(x, \phi(x))\right|<\varepsilon.$$

事實上，對於足够大的 k，來建立不等式

$$\left|\frac{\phi_{n_k}(x')-\phi_{n_k}(x)}{x'-x}-f(x, \phi_{n_k}(x))\right|<\varepsilon \quad (|x'-x|<\delta) \quad (1)$$

好了．由 $f(x, y)$ 在 G 中的連續性，存在如下的 η：當

$$|x'-x|<2\eta,\quad |y-y'|<4K\eta$$

時，$|f(x', y')-f(x, y)|<\varepsilon$．設當 $k>k_0$ 時，

$$|\phi(x)-\phi_{n_k}(x)|<K\eta$$

成立，並且此時，L_k 的任一綫段都小於 η．設 $x'<x''$，$x''-x'<\eta$，則 L_k 必有如下的一部分的頂點：

$$(a_0, b_0),\ (a_1, b_1),\ \cdots,\ (a_{n+1}, b_{n+1}),$$

$$a_0\leqslant x'<a_1<a_2<\cdots<a_n<x''\leqslant a_{n+1}.$$

因此，

$$\phi_{n_k}(a_1)-\phi_{n_k}(x')=(a_1-x')f(a_0, b_0).$$

$$\phi_{n_k}(a_{\nu+1})-\phi_{n_k}(a_\nu)=(a_{\nu+1}-a_\nu)f(a_\nu, b_\nu)$$

$$(\nu=1, 2, \cdots, n+1),$$

$$\phi_{n_k}(x'')-\phi_{n_k}(a_n)=(x''-a_n)f(a_n, b_n).$$

由是，成立着

$$(f(x', y')-\varepsilon)(a_1-x')<\phi_{n_k}(x')<(f(x', y')+\varepsilon)(a_1-x'),$$

$$(f(x', y')-\varepsilon)(a_{\nu+1}-a_\nu)<\phi_{n_k}(a_\nu)<$$

$$<(f(x', y')+\varepsilon)(a_{\nu+1}-a_\nu),\quad (\nu=1, 2\ \cdots, n-1)$$

$$(f(x', y')-\varepsilon)(x''-a_n)<\phi_{n_k}(x'')-\phi_{n_k}(a_n)<$$

$$<(f(x', y')+\varepsilon)(x''-a_n).$$

相加，就得到

$$(f(x', y')-\varepsilon)(x''-x')<\phi_{n_k}(x'')-\phi_{n_k}(x')<$$

$$<(f(x', y')+\varepsilon)(x''-x').$$

因此(1)當 $0<x''-x'<\eta$ 時成立．同樣可證(1)當 $0<x'-x''<\eta$ 時也成立．定理證畢．

一般地說，定理中通過 (x_0, y_0) 的積分曲綫不止一條．當解具有唯一性時，我們有如下的陳述：

定理 3. 設 $f(x, y)$ 是區域 G 上的連續函數，G 含有綫段

$$x=x_0,\ \alpha\leqslant y\leqslant\beta$$

上的一切點．通過點$(x_0, y)(\alpha < y < \beta)$，假如微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

只有一條積分曲綫，那末這些曲綫是$y_0(\alpha < y_0 < \beta)$的連續映像；就是說，這些曲綫

$$y = \phi(x),\ y_0 = \phi(x_0),$$

關於y_0是連續的．

證明 我們不妨假設G是一閉域，因此在G上，$|f(x, y)|$小於一個常數K．解的全體$P_1':y = \phi(x),\ y_0 = \phi(x_0)(\alpha \leqslant y_0 \leqslant \beta)$成一均勻有界的平等連續函數族．平等連續性是從

$$\Delta y = \left[\frac{dy}{dt}\right]_1 \Delta x = f(x_1, y_1)\Delta x$$

可以明白的．設P中函數列$\phi_n(x)(n = 1, 2, \cdots)$匀斂於$\phi(x)$，則從

$$\phi_n'(x) = f(x, \phi_n(x))$$

得到

$$\phi'(x) = f(x, \phi(x)).$$

等式

$$\lim \frac{d}{dx}\phi_n(\lambda) = \frac{d}{dx}\lim \phi_n(x)$$

之所以能成立，由於$\{\phi_n'(x)\}$也具有平等連續性．又因

$$\phi(x_0) = \lim \phi_n(x_0) \in [\alpha, \beta].$$

所以$\phi(x) \in P$．就是說P是閉的．區間$[\alpha, \beta]$中的y_0和P中的$\phi(x)$是成一對一的對應的．若$\phi(x)$與$\psi(x)$都屬於P，則從

$$|\phi(x_0) - \psi(x_0)| \leqslant \max|\phi(x) - \psi(x)|,$$

知道P映到$[\alpha,\beta]$是一連續映照．一对一地，將緻密閉集P施行連續映照時，其逆映照也具有連續性（第四章 §4 的定理 4）．由是完成了定理的證明．

現在我們把阿爾日拉關於連續函數族的定理抽象化起來．設

X 與 Y 都是緻密閉集，$\{X \to Y\}_c$ 是如下的連續映照

$$Y = \varphi(X)$$

的全體，$\{X \to Y\}_c$ 中兩個元素 φ_1 和 φ_2 的距離是

$$r(\varphi_1, \varphi_2) = \max_{x \in X} r(\varphi_1(x), \varphi_2(x)).$$

此地假設 X 和 Y 都是有度空間中的點集，但是 X 所在的空間不必與 Y 所在的空間相同.

定理 4. (拓廣的阿爾日拉定理). 設 X 和 Y 都是有度空間中的緻密閉集，$\{X \to Y\}_c$ 的一個子集 D 具有緻密性的充要條件是 D 中一切映照是平等連續的.

證明 設 $\{X \to Y\}$ 是一切映照 $Y = \varphi(X)$ 所成之集，則

$$\{X \to Y\}_c \subset \{X \to Y\}.$$

首先建立條件的必要性. 就是說，當 D 具有緻密性時，對於任何一正數 ε，要證有正數 δ 存在. 當

$$x' \in X,\ x'' \in Y,\ r(x'', x') < \delta$$

時，不等式

$$r(\varphi(x'),\ \varphi(x'')) < \varepsilon$$

對於 D 中任何 $\varphi(x)$ 成立. 這個證明可以從定理 1 的證明明白.

其次證明條件的充足性. 設 $\varepsilon > 0$，我們有上述的 $\delta > 0$. 於緻密閉集 X 上作成 $\frac{1}{2}\delta$ 網，網的"結點"爲 $a_1, a_2, \cdots, a_n$. 從球 $O(x_\nu, \delta)$ 除去和集

$$O(x_1, \delta) + \cdots + O(x_{\nu-1}, \delta)$$

中一切點，得點集 X_ν. 容易明白 $X_1 + \cdots + X_n$ 含有 X，而 $X_1, \cdots, X_n$ 兩兩不相交. 當 x 與 x' 都落在 X_ν 中時，$r(x, x')$ 小於 δ. 於緻密閉集 Y 上作 ε 網，網的結點爲 $y_1, y_2, \cdots, y_m$. 設 $\varphi_{\mu\nu}(x)$ 是如下的一個映照：

$$\varphi_{\mu\nu}(x) \in \{X \to Y\}_c,\ \varphi_{\mu\nu}(x_\nu) = y_\mu.$$

當 $f(x) \in D$ 時，對於 x_ν 我們可取 y_μ，使 $f(x_\nu)$ 與 y_μ 的距離小於

ε. 設 $x \in X$, 則

$$r(f(x), \varphi_{\mu\nu}(x)) \leqslant r(f(x), f(x_\nu)) +$$
$$+ r(f(x_\nu), \varphi_{\mu\nu}(x_\nu)) + r(\varphi_{\mu\nu}(x_\nu), \varphi_{\mu\nu}(x)).$$

右邊小於 3ε,因此 $\{\varphi_{\mu\nu}(x)\}$ 在 $\{X \to Y\}_c$ 中關於 D 作成 3ε 網. 所以 D 在 $\{X \to Y\}_c$ 中是緻密的. 定理證畢,

6. 有度空間中的實函數和曲綫 設 R 是一有度性空間, R_n 是 n 維的歐幾里得空間. 由映照 φ 將 R 映照於 R_1 中時, 得一 R 上所定義的實函數 $\varphi(x)$. 假如 R 的元素都是函數,那末通稱 $\varphi(x)$ $(x \in R)$ 爲 R 上所定義之一汎函數. 例如在 $R = C[a, b]$ 上, 可以定義種種的汎函數. 設 $f(x) \in C(a, b)$, 則

$$\max f(x),\ \min f(x),\ f(x)$$

等都是 $C(a, b)$ 上的汎函數. 在適當的條件下

$$\int_a^b \sqrt{1 + f^2(x)}dx,\ \int_a^b |f'(x)|\,dx,\ |f'(x_0)|,$$
$$\int_a^b F(x, f(x))dx$$

也都是 $f \in C(a, b)$ 上的汎函數, 但是這些不過在 $C(a, b)$ 的某一子集上定義着.

有度空間 R 上的汎函數,其連續性的意義是和 R 中距離的概念有關係的. 設 $a < x_0 < b$. 我們考慮泛函數 $f'(x_0)$. 假如定 $C(a, b)$ 中兩個函數 f 和 g 的距離爲

$$r(f, g) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - g(x)|$$

的話,那末取 $g(x)$ 使 $|g(x)| \leqslant \varepsilon$, $g'(x_0) = 1$ $(a < x_0 < b)$, 則

$$r(f, f + g) \leqslant \varepsilon.$$

由於 $(f'(x_0) + g'(x_0)) - f'(x_0) = 1$, 所以 $f'(x_0)$ 並不是一個連續汎函數. 但是,假如 $r(f, g)$ 的定義爲

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} \{|f(x) - g(x)| + |f'(x) - g'(x)|\}$$

那末當 $r(f, g) \to 0$ 時, $g'(x_0) \to f'(x_0)$. 此時 $f'(x_0)$ 成一連續汎

函數.

定理 1. 設 $C(K)$ 是緻密閉集 K 上的一切連續函數所成之集,以

$$r(f, g) = \max |f-g|$$

爲 $C(K)$ 中任何兩函數 f, g 的距離時, $C(K)$ 的子集 D 具有緻密性的充要條件是 D 成一均匀有界的平等連續函數族.

證明 條件之必要性的證明見阿爾日拉定理. 條件的充足性的證明,見拓廣的阿爾日拉定理.

很不嚴格的說,實函數之逆是"曲綫". 設由 $P=\varphi(t')$ 將閉區間 $a \leqslant t \leqslant b$ 連續地映照於某一有度空間中的點集 Γ, 則 Γ 是一曲綫, $P=\varphi(t)$ 是對應於參數 t 的點. 對於兩條曲綫

$$P=\varphi(t')(a' \leqslant t' \leqslant b'),\ P=\psi(t'')(a'' \leqslant t'' \leqslant b''),$$

假如有 t 的增加函數 $t'(t)$ 和 $t''(t)$ 使 $t'(a)=a'$, $t'(b)=b'$, $t''(a)=a''$, $t''(b)=b''$, 且使

$$\varphi(t'(t))=\psi(t''(t)),\ a \leqslant t \leqslant b,$$

那末我們將這二條曲綫,看做同一曲綫, 取適當的參數 t, 我們可把 $[a, b]$ 變成 $[0, 1]$.

從拓廣的阿爾日拉定理,我們可述

定理 2. 設 $L_n: P=f_n(t)(0 \leqslant t \leqslant 1)$, 都是緻密閉集 K 中的曲綫. 定 $r(L_n, L_m)=\max|f_n(t)-f_m(t)|$. 假如 $\{f_n(t)\}$ 是平等連續, 那末 $\{L_n\}$ 中存在收斂的子列.

曲綫 $L: P=f(t)(a \leqslant t \leqslant b)$ 的長 $|L|$, 我們用和

$$\sum_{\nu=1}^{n} r(f(t_{\nu-1}), f(t_\nu))$$

$$(a \leqslant t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b)$$

的上界來定義. 由這個定義所得的 $|L|$, 顯然地無關於參數 t 的選擇. 寫

$$|L| = V_a^b(f).$$

我們能證 $V_a^b(f)$ 是 f 的下半連續汎函數．事實上，取適當的分點 $t_0, t_1, \cdots, t_n$ 可使

$$\sum_{\nu=1}^{n} r(f(t_{\nu-1}), f(t_\nu)) > V_a^b(f) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $\delta = \frac{\varepsilon}{8n}$，則當曲綫 $P = g(t)(a \leqslant t \leqslant b)$ 適合 $r(f, g) < \delta$ 時，

$$\sum_{1}^{n} r(f(t_{\nu-1}), f(t_\nu)) - \sum_{1}^{n} r(g(t_{\nu-1}), g(t_\nu)) < \frac{\varepsilon}{2},$$

因此

$$V_a^b(g) \geqslant \sum_{1}^{n} r(g(t_{\nu-1}), g(t_\nu)) > V_a^b(f) - \varepsilon. \text{ 當 } V_a^b(f) = \infty$$

時，$V_a^b(g) = \infty$．由是可述如下的

定理 3. 假如緻密閉集 K 中的曲綫敍列 $\{L_n\}$ 收斂於 L，那末

$$|L| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} |L_n|.$$

寫 L 的長 $V_a^b(f)$ 為 $l(b)$，當 $a < t \leqslant b$ 時，寫 $l(t) = V_a^t(f) = S$。

假如 L 是一連續曲綫，那末當 t 從 a 逐漸增加到 b 時，S 從 0 連續地增到 $|L|$．把 S 看做參數，得 L 的表示式：

$$P = f(l^{-1}(S)) = g(S),\ 0 \leqslant S \leqslant |L|,$$

因弦長不大於弧長，所以

$$r(g(S_1), g(S_2)) \leqslant |S_2 - S_1|.$$

以 $\tau = \frac{S}{|L|}$ 做參數，則得 L 的表示式

$$P = F(\tau) = g(\tau|L|),\ (0 \leqslant \tau \leqslant 1).$$

此時 $r\{F(\tau_1), F(\tau_2)\} \leqslant |L| \cdot |\tau_1 - \tau_2|$．因此當一集的連續曲綫 $\{F(\tau)\}(0 \leqslant \tau \leqslant 1)$ 其長都不超過 M 時，這些 $F(\tau)$ 都滿足李普惜茲條件：

$$r(F(\tau_1), F(\tau_2)) \leqslant M|\tau_1 - \tau_2|$$

而具有平等連續性．利用這個事實，我們就能建立下面的重要定理。

定理 4. 設 A 和 B 是具有緻密性的有度空間中之兩點．假如存在有限長度的連續曲綫連結 A 和 B，那末這些曲綫之中必有最短的．

證明 設 L 是連結 A 和 B 之一連續曲綫．記 $|L|$ 之下界爲 γ．設 $L_1, L_2, \cdots$ 都是連結 A 和 B 的連續曲綫，$|L_n| \to \gamma$．由於

$$L_n:\ P = F_n(\tau)\ (0 \leqslant \tau \leqslant 1)$$

的平等連續性，$\{L_n\}$ 中有 $\{L_{n_\nu}\}$ 收斂的子列，$L_{n_\nu} \to L$ 的話，由定理 3,

$$\lim |L_{n_\nu}| \geqslant |L|.$$

所以 $|L| = \gamma$．定理證畢．

我們應該留意，在三維的歐幾里得的空間中之十分光滑（足够多的次數可以微分之意）的閉曲面上，從普通的微分幾何學不能馬上導出定理 4 中所說的結果．因爲在微分幾何學的書上，往往假定 A 與 B 是十分接近的兩點．

7. 一般的綫性泛函數 綫性空間 R 是它的元素 $x, y, z, \cdots$，滿足下列二個條件的空間．

I. 兩元素 x 與 y 之間必有和 $x+y$，和服從如下四個規律

$$x + y = y + x,\ x + (y + z) = (x + y) + z,$$

$$x + (-x) = 0,\ x + 0 = x.$$

II. 假如 α, β 都是數，那末

$$\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x,\ 1 \cdot x = x,$$

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x,\ \alpha(x + y) = \alpha x + \beta y.$$

下面——假如沒有特別關照——假定 $\alpha, \beta, \cdots$ 都是實數，因此，所考慮的是實的綫性空間．

假如 R 中任何元素都有一個數 $\|x\|$，這些數服從下面的規律：

III. $\|x\| > 0$ 除非 $x = 0$，$\|0\| = 0$，

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|,\ \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

稱 $\|x\|$ 爲 x 的模，當 R 具有條件 I, II, III 時，稱它爲一個有模的

綫性空間

將 $\|x-y\|$ 看做 $r(x, y)$，則易知有模空間是一有度的空間．具有完備性的有模綫性空間，稱爲巴拿赫 (Banach) 空間．$R_1, R_2, \cdots$，都是巴拿赫空間．假如對於 R_n，以

$$\|x\| = \left(\sum_{1}^{n} |x_\nu|^p\right)^{\frac{1}{p}} \ (p \geqslant 1)$$

爲 $x=(x_1, \cdots, x_n)$ 的模，則由敏高夫斯基的不等式，知 III 成立，此時 R_n 也成一巴拿赫空間．又設以

$$\|x\| = \max(|x_1|, \cdots, |x_n|)$$

爲 x 的模，則 R_n 也成一巴拿赫空間．

連續函數族 $C(a, b)$ 的函數 $f(t)$，以

$$\|f(t)\| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |f(t)|$$

爲其模時，則此族是一巴拿赫空間．在 $[a, b]$ 上，$f(t)$ 和 $f(t)^2$ 都可以積分的 $f(t)$，成一函數族 $L^2(a, b)$，此族中的 $f(t)$ 以

$$\|f(t)\| = \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt}$$

爲其模時，$L^2(a, b)$ 成一巴拿赫空間．滿足條件

$$\|x\| = (\Sigma |x_n|^2)^{1/2} < \infty$$

的一切 $x=(x_1, x_2, \cdots)$ 成一有模空間 l_2，當 $x \in l_2$, $y=(y_1, \cdots) \in l_2$ 時，定義

$$x+y=(x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots),$$

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots),$$

則 l_2 成一巴拿赫空間．

綫性空間 R 中的任何兩 x 與 y 決定 R 中的一根直綫段：$\overline{xy} = \overline{yx}$．當 $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\alpha+\beta=1$ 時．一切點 $\alpha x+\beta y$ 都屬於 $\overline{xy}$，$\overline{xy}$ 中不含有其他的點．假如 $M \subset R$，當 $x \in M$, $y \in M$ 時綫分 $\overline{xy}$ 常屬於 M 的話，稱 M 是一具有凸性的集(凸集)．R 中具有凸性集未必含有內點，例如三維空間中的圓，它具有凸性而不含有內

點. 普通的球是一凸集, 這是容易明白的. 現在考慮綫性有模空間中的球, 稱 $\|x\|\leq 1$ 是一單位球. 設 $x=(x_1, x_2)$, $\|x\|=(|x_1|^p+|x_2|^p)^{\frac{1}{p}}$. 則當 $p=2$ 時, $\|x\|\leq 1$ 是普通的單位圓. 當 $p=1$ 時, 單位球 $\|x\|\leq 1$ 是以 $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$ 爲頂點的正方形. 當 $p=\infty$ 時, 單位球是以 $(\pm 1, \pm 1)$ 爲頂點的正方形. 當 $0<p<1$ 時, 曲綫 $x_1^p+x_2^p=1(x_1>0, x_2>0)$ 是向原點凸的; 因此 $|x_1|^p+|x_2|^p=1$ 的境界上的四個弧點都是向外凹的. 此時 $|x_1|^p+|x_2|^p=1$ 並不成一凸性集. 事實上, 當 $p<1$ 時, 我們不能以 $(|x_1|^p+|x_2|^p)^{\frac{1}{p}}$ 爲模.

定理 1. 綫性有模空間中的球是具有內點的凸性點集.

證明 當證明時, 不妨假定球心是 $x=0$, 半徑是 1. 設 x_1, x_2, 是球中任意兩點, $\|x_1\|\leq 1$, $\|x_2\|\leq 1$, 則當 $\alpha\geq 0$, $\alpha+\beta=1$ 時,

$$\|\alpha x_1+\beta x_2\|\leq \alpha\|x_1\|+\beta\|x_2\|\leq \alpha+\beta=1.$$

單位球含有內點是顯然的, 事實上, 適合 $\|x\|<1$ 的 x 都是它的內點. 證明完畢.

例 設 M 是 l_2 中適合 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n^2x_n^2\leq 1$ 的一切 $x=(x_1, x_2, \cdots)$ 所成之集, 則 M 具有凸性, 但是並不含有內點.

事實上, 當 x 與 y 都屬於 M 時, 對於適合 $\alpha+\beta=1$ 的正數 α 和 β, 成立着

$$\begin{aligned}\sum n^2(\alpha x_n+\beta y_n)^2 &= \alpha^2S(x)+\beta^2S(y)+2\alpha\beta\sum x_ny_nn^2\\ &\leq [\alpha\sqrt{S(x)}+\beta\sqrt{S(y)}]^2\leq(\alpha+\beta)^2\leq 1.\end{aligned}$$

所以 $\alpha x+\beta y\in M$. M 關於一切坐標軸是對稱的, 就是說當 $(x_1, \cdots, \xi_n, x_{n+1}, \cdots)\in M$ 含有 $(x_1, \cdots, -\xi_n, x_{n+1}, \cdots)\in M$.

因此假如 M 含有一個球 $O(x, p)$, 則必含有 $O(-x, p)$. 因 M 的凸性, 由 $O(x, p)$ 與 $O(-x, p)$ 所連成的"圓柱"全屬於 M. 這個圓柱含有以原點爲中心之球, 當 ε 甚小時, 點

$$x = \left(\varepsilon, \frac{\varepsilon}{2}, \cdots, \frac{\varepsilon}{n}, \cdots \right)$$

應該屬於 M, 但是 $\Sigma n^2 \left(\frac{\varepsilon}{n} \right)^2 = \infty$. 由是可知 M 決無內點.

定理 2. 凸性點集的包具有凸性，許多凸性點集的通集也具有凸性.

證明 設 x 與 y 是凸性點集 M 的包 M^0 的任意兩點，那末 M 必有如下的兩點 a 和 b:

$$r(a, x) < \varepsilon, \ r(b, y) < \varepsilon,$$

ε 是任意的正數. 當 $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 1$ 時, $\alpha a + \beta b$ 屬於 M.

另一方面從

$$\| (\alpha x + \beta y) - (\alpha a + \beta b) \| \leqslant \alpha \| x - a \| + \beta \| y - b \| < \varepsilon,$$

知道 $r(\alpha x + \beta y, \alpha a + \beta b) < \varepsilon$. 故 $\alpha x + \beta y \in M^0$. M^0 是一凸性點集.

假如 x 和 y 是凸性點集的通集中任何兩點那末 $\overline{xy}$ 屬於通集的任何因子,因此屬於通集. 所以通集也具有凸性. 定理證畢.

含有點集 A 的'最小的'凸性閉集,稱爲 A 之閉的凸包.

有模的綫性空間 R 中 $n+1$ 個點 $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ 在常態的意義是:其中任何三點不在一直綫上,任何四點不在一平面上, … 任何 $k+1$ 個點不落入一個 k 維空間中. 在常態的 $n+1$ 個點 $x_1, \cdots, x_{n+1}$ 之閉的凸包,稱爲一個 n 維的單純結構,稱這些點 $x_1, \cdots, x_{n+1}$ 爲此結構的頂點. 光是一點的話,這是一個零維的單純結構. 一維的單純結構是一直綫段. 兩維的單純結構是一三角形. 三維的單純結構是一四面體.

當 $x_1, \cdots, x_{n+1}$ 在常態時, 其中任何 $k+1$ $(k < n)$ 個點形成一個 k 維單純結構. 稱這樣的 k 維單結構爲原來的 n 維單純結構的一個 k 維境界. 例如以 l_1, l_2, l_3, l_4 爲頂點的三維單純結構(l_1, l_2, l_3, l_4)的二維境界是

$$(l_2, l_3, l_4),\ (l_1, l_3, l_4),\ (l_1, l_2, l_4),\ (l_2, l_3, l_4),$$

一維境界是

$$(l_1, l_2),\ (l_1, l_3),\ (l_1, l_4),\ (l_2, l_3),\ (l_2, l_4),\ (l_3, l_4),$$

0 維境界是 l_1, l_2, l_3, l_4.

定理 3. n 維單純結構$(x_1, \cdots, x_{n+1})$是適合

$$x = \alpha_1 n_1 + \cdots + \alpha_{n+1} x_{n+1}, \tag{1}$$

$$\alpha_\nu \geqslant 0 (\nu = 1, \cdots, n),\ \alpha_1 + \cdots + \alpha_{n+1} = 1$$

的一切點 x 所成之集.

證明 顯然地(1)所表達的點集是一凸的閉集，此集含有 x_1, $x_2, \cdots, x_{n+1}$ 諸點. 另一方面，含有 $x_1, \cdots, x_{n+1}$ 諸點的凸集必須包含(1)所表的 x. 因此，(1)所表示的 x 之全體是含有 $x_1, \cdots, x_{n+1}$ 的最小凸閉集. 定理證畢.

綫性有模空間 R 上所定義的函數 $f(x)$，稱爲泛函數（前面所說的是 R 的元素是函數，現在不一定以函數爲元素）. 當 $x \in R$ 時，$f(x)$ 有一定的數值.

當 $x \in R$, $y \in R$ 時，假如 $f(x)$滿足關係

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)\ (\alpha, \beta \text{ 都是數}),$$

那末我們說 $f(x)$ 是一綫性泛函數. 對於 $\varepsilon > 0$，假如有 $\delta > 0$，當 $r(x_1, x_2) < \delta$ 時

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

成立，稱 $f(x)$是一連續的綫性泛函數.

定理 4. 設 $f(x)$ 是綫性有模空間 R 中的綫性泛函數. (一)假如 $f(x)$ 有一個連續點 $x_0 \in R$，那末它是一個連續汎函數. (二)當 $f(x)$是有界時，$f(x)$ 是一連續汎函數. (三)假如 $f(x)$ 是連續的，那末它是有界.

證明 (一)設 $x_n \in R$, $f(x_n) \to f(x_0)$. 我們要從 $y_n \in R$, $y_n \to y_0$ 導出 $f(y_n) \to f(y_0)$. 事實上

$$f(y_n) = f(y_n - y_0 + x_0 + y_0 - x_0)$$

$$= f(x_0 + (y_n - y_0)) + f(y_0 - x_0)$$
$$\to f(x_0) + f(y_0 - x_0) = f(y_0).$$

假如有常數 N 對於 R 中任何 x 使 $|f(x)| \leq N\|x\|$ 時，稱 $f(x)$ 爲有界.

假如 $f(x)$ 不是有界，那末對於 n 有 x_n 適合

$$|f(x_n)| > n\|x_n\|.$$

置 $y_n = \dfrac{x_n}{n\|x_n\|}$，則 $\|y_n\| = \dfrac{1}{n} \to 0$，但是

$$|f(y_n)| = \frac{1}{n\|x_n\|}|f(x_n)| > 1.$$

由是當 $f(0) = 0$ 時，$f(x)$ 在 $x = 0$ 是不連續的．若 $f(0) \neq 0$，那末置

$$z_n = \frac{2x_n}{n\|x_1\|}f(0) \text{的話，} z_n \to 0$$

由於

$$|f(z_n)| > 2|f(0)|.$$

$f(x)$ 在 $x = 0$ 也是不連續的．由是可知(三)成立.

(二)假如 $f(x)$ 是有界：$|f(x)| < N\|x\|$．那末當 $x_n \to 0$ 時，

$$|f(x_n)| \leq N\|x_n\| \to 0.$$

所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 是連續的，乃是一個連續汎函數．定理證畢.

稱

$$\|f\| = \max_{\substack{x \neq 0 \\ x \in R}} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$$

爲綫性汎函 $f(x)$ 的模.

現在於 n 維的歐幾里得空間 E_n 中定義汎函 $f(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$，要求出 $\|f(x)\|$．這個 $f(x)$ 是 $x = (x_1, \cdots, x_n)$ 與 $a = (a_1, \cdots, a_n)$ 的兩個向量的數量乘積 (x, a)，乃是一個綫性泛函數．事實上，

$$f(\alpha x + \beta y) = (\alpha x + \beta y, a) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

又從 $|f(x)| \leqslant \|x\| \cdot \|a\|$ 知道 $f(x)$ 是有界，因此，$f(x)$ 是連續的．最後，從

$$\|x\| \leqslant \|a\| \text{ 和 } |f(a)| = (a, a) = \|a\|, \text{知道}$$

$$\|f\| = \|a\|.$$

對於綫性有模空間 R 上所能定義的一切綫性汎函數所成之集 $\overline{R}$，我們作如下的規定．當 $f_1 \in \overline{R}$, $f_2 \in \overline{R}$ 時，定 $f = f_1 + f_2$ 爲如下的泛函數：等式 $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ 對於 R 中一切 x 成立．將這種 f 添入 $\overline{R}$．那末 $f \in \overline{R}$, $f \neq 0$ 的話，$\|f\| > 0$, $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$,

$$\|f_1 + f_2\| = \max \frac{|f_1(x) + f_2(x)|}{\|x\|} \leqslant \|f_1\| + \|f_2\|.$$

由是，$\overline{R}$ 成一有模綫性空間，稱 $\overline{R}$ 爲 R 的共軛空間．

定理 5. 綫性有模空間的共軛空間是一巴拿赫空間．

證明 設 $\overline{R}$ 是 R 的共軛空間，我們要證明 $\overline{R}$ 具有完備性．設 $\{f_n\}$ 是 R 上之一列的綫性汎函數，它們具有"基本性質"，就是說：對於 $\varepsilon > 0$，有 N，當 $n > m > N$ 時 $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$．由是

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \|f_n - f_m\| \cdot \|x\| < \varepsilon \|x\|$$

在 R 上成立．所要證明的是 $\lim f_n(x) = f(x)$ 也是 R 上一個綫性汎函數．事實上，

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y) &= \lim f_n(\alpha x + \beta y) \\ &= \lim \alpha f_n(x) + \lim \beta f_n(y) \\ &= \alpha f(x) + \beta f(y), \end{aligned}$$

取 N 適當地大，使 $\|f_n - f_{n+p}\| < 1$ 當 $n > N$ 時對於任何 $p > 0$ 成立．因此從 $\|f_{n+p}\| < \|f_n\| + 1$ 得到 $|f_{n+p}(x)| \leqslant (\|f_n\| + 1) \cdot \|x\|$．令 $p \to \infty$，即得

$$\lim |f_m(x)| = |f(x)| \leqslant (\varepsilon + \|f_n\|) \|x\|.$$

所以 $f(x)$ 是一個有界的綫性泛函數．由模的定義，對於 $\varepsilon > 0$ 有元素 x_ε 適合於

$$\|f_n - f\| < \frac{|f_n(x_\varepsilon) - f(x_\varepsilon)|}{\|x_\varepsilon\|} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= \left|f_n\left(\frac{x_\varepsilon}{\|x_\varepsilon\|}\right) - f\left(\frac{x_\varepsilon}{\|x_\varepsilon\|}\right)\right| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

右端當 $n > N$ 時,小於 ε. 此時 $\|f_n - f\| < \varepsilon$. 由是

$$\lim \|f_n\| = \|f\|.$$

定理證畢.

假如空間 R 中有一系列的點 $e_1, e_2, \cdots$ 具有如下的兩個性質:

第一,對於任何實數 $x_1, x_2, \cdots, \sum_1^n x_\nu e_\nu \neq 0$, 除非 $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0$.

第二, R 中任何點 x, 有實數列 $x_1, x_2, \cdots$ 適合

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots.$$

此時稱 $e_1, e_2, \cdots$ 為 R 的**基礎**. n 維的空間 R_n 具有如下的基礎

$$e_1 = (1, 0, \cdots 0),$$

$$e_2 = (0, 1, \cdots 0),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$e_n = (0, 0, \cdots, 1).$$

設 $f(x)$ 是 R_n 上的綫性泛函數,則當 $x = x_1 l_1 + \cdots + x_n l_n$ 時,

$$f(x) = f_1 x_1 + f_2 x_2 + \cdots + f_n x_n,$$

但 $f_\nu = f(e_\nu)$. 若 R_n 是歐幾里得空間 E_n, 則因

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2},$$

我們得到

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} \leqslant \sqrt{f_1^2 + \cdots + f_n^2}.$$

由於 $f(f_1 e_1 + \cdots + f_n e_n) = f_1^2 + \cdots + f_n^2$, 所以

$$\|f(x)\| = \sqrt{f_1^2 + \cdots + f_n^2}.$$

由是可知 E_n 的共軛空間也是歐幾里得空間, 此空間的基礎是 $f_1, \cdots, f_n$.

設 $x_1, x_2, \cdots$ 都是巴拿赫空間 R 中的點,具有形式 $\sum_1^n c_\nu x_\nu$ 的點的全體成 R 中的一集 M, 我們能證 M 的包 M^0 成一綫性空間. 事實上, 當 $x \in M^0$, $y \in M^0$ 時, 球 $O(x, \varepsilon)$, $O(y, \varepsilon)$分別含有 M 的點 x_ε 和 y_ε. 從

$$\|\alpha x + \beta y - \alpha x_\varepsilon - \alpha y_\varepsilon\| \leqslant |\alpha| \cdot \|x - x_\varepsilon\| + |\beta| \cdot \|y - y_\varepsilon\|$$
$$< \varepsilon(|\alpha| + |\beta|),$$

知道 $\alpha x + \beta y \in M^0$. 稱 M^0 是由$\{x_n\}$產生的子空間.

定理 6. [漢(Hahn)與巴拿赫的定理]. 綫性有模可析空間 R 的綫性子空間 E 上所定義的綫性泛函數 $f(x)$ 必可延展到全空間而保持其模. 就是說 R 上有綫汎函數 $F(x)$適合下面兩個條件

(i) 當 $x \in E$ 時, $F(x) = f(x)$,

(ii) $\|F\|_R = \|f\|_E$.

證明 設 $x_0 \bar{\in} E$,將 x_0 與 E 相結合而得 R 之一子空間 E_1. 空間 E_1 中的任何點 y 都可以寫成

$$y = tx_0 + x, \quad x \in E.$$

假如定理中的 $F(x)$存在,那末

$$F(y) = tF(x_0) + f(x).$$

置 $F(x_0) = -c$, 則得 $F(y) = f(x) - ct$. 我們要證不因空間的擴大而模有所增加. 首先證明我們能選取 c, 使

$$|f(x) - ct| \leqslant \|f\| \cdot \|x + tx_0\|$$

對於 E 中任何 x 成立. 這是必須而且只須

$$f(x) - \|f\| \cdot \|x + tx_0\| \leqslant ct \leqslant f(x) + \|f\| \cdot \|x + tx_0\|$$

對於 $x \in E$ 成立. 此式等價於

$$f(z) - \|f\| \cdot \|x + z\| \leqslant c \leqslant f(z) + \|f\| \cdot \|x_0 + z\|,$$

但 $z \in E$. 設 $z' \in E$, $z'' \in E$, 則從

$$f(z'') - f(z') \leqslant \|f\| \cdot \|z'' - z'\| \leqslant$$
$$\leqslant \|f\| \cdot \|z'' + x_0\| + \|f\| \cdot \|z' + x_0\|,$$

得到

$$f(z'') - \|f\| \cdot \|z'' + x_0\| \leqslant f(z') + \|f\| \cdot \|z' + x_0\|.$$

當 z' 和 z'' 分別在 E 中變動時，設上式左端之上界為 c''，右端之下界為 c'，則 $c'' \leqslant c'$. 現在取如下的 c：$c'' \leqslant c \leqslant c'$，在 E_1 作 $F_1(x) = f(x) - ct$，則 c 就滿足上述條件，而 $\|F_1\| = \|f\|$. 假如 R 是一可析*空間，那末存在在 R 中到處稠密的點列 $x_0, x_1, \cdots$. 順次作綫性空間 $E_1, E_2, \cdots$. E_{n+1} 是將 x_n 與 E_n 結合而成的. 又作相應的綫性汎函數敍列 $F_1, F_2, \cdots$，其模都相等：$\|F_n\| = \|f\|$ $(n=1, 2, \cdots)$. 這樣就獲得 $E + \{x_n\}$ 上的一個綫性泛函數 $F(x)$.

對於 R 中任意一點 x，$\{x_n\}$ 中有子列 $\{y_n\}$ 收斂於 x. 因此 $F(y_n) \to F(x)$. 又從

$$|F(x_n)| \leqslant \|f\| \cdot \|x_n\|$$

得到 $|F(x)| \leqslant \|f\| \cdot \|x\|$. 由是可知 $\|F\| = \|f\|$. 定理證畢.

系　設 R 是一綫性有模空間，M 是一正數，對於 R 中之一定點 x_0，$x_0 \neq 0$. 有綫性泛函 $f(x)$ 適合

$$\|f\| = M \text{ 與 } f(x_0) = M\|x_0\|.$$

證明　事實上，一維空間上的綫性汎函數 $f(tx_0) = tM\|x_0\|$ 的模是 M. 由巴拿赫與漢的定理. 此汎函數 $f(x)(x = tx_0)$ 可以延拓於全空間 R 而不增加其模，證明完畢.

現在研究綫性有模空間 R 的共軛空間的共軛空間的性質. 就是說要研究第二共軛空間 $\bar{\bar{R}}$ 的性質. 設 x_0 是 R 中的一個定點，f 是 $\bar{R}$ 的任一元素(這是 R 上的綫性泛函數). 由 x_0 和 f 所決定的數

$$f(x_0) = \psi_{x_0}(f),$$

適合下面兩個關係：

$$\psi_{x_0}(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha\psi_{x_0}(f_1) + \beta\psi_{x_0}(f_2),$$

* "可析"這個條件，事實上是多餘的，爲簡便起見，光是在可析空間中來證明定理。

$$\|\psi_{x_0}(f)\| \leqslant \|x_0\| \cdot \|f\|.$$

所以 $\psi_{x_0}(f)$ 是在 $\overline{R}$ 上所定義的一個有界綫性泛函數. 我們將 $f(x)$ 寫成比較具有對稱性的形式 (f, x)——類似兩個有向量的數值乘積——固定 $\overline{R}$ 中的 f, 它是 R 上的泛函數; 固定 R 中的 x, 它又是 $\overline{R}$ 上的泛函數.

這樣一來, R 中的元素 x 之模 $\|x\|$, 具有如下的兩種意義: 第一, 將 x 當做有模空間 R 中的元素看, 自然有它的模 $\|x\|$, 第二, 將 x 看做 $\overline{R}$ 上所定義的泛函數, 也有它的模. 記這個模爲 $\|x\|_2$. 我們要證

$$\|x\| = \|x\|_2.$$

設 $f \in \overline{R}$, 則 $|(f, x)| \leqslant \|f\| \cdot \|x\|$, 所以

$$\|x\| \geqslant \max_{f \in \overline{R}} \frac{|f, x|}{\|f\|} = \|x\|_2.$$

另一方面, 由巴拿赫與漢的定理的系, 對於 $x \in R$, 必有綫性泛函數 f_0 適合 $|(f_0, x)| = \|f_0\| \cdot \|x\|$. 由是

$$\|x\| = \max_{f \in \overline{R}} \frac{|(f, x)|}{\|f\|},$$

$$\|x\| = \|x\|_2.$$

我們證明了下述

定理 7. 設 $\overline{R}$ 是綫性有模空間 R 的共軛空間, 那末 R 是 $\overline{R}$ 之共軛空間 $\overline{\overline{R}}$ 的子集: $R \subseteq \overline{\overline{R}}$.

設 R 和 R_1 是兩個有度的空間, 當 $x \in R$ 時, R_1 中有唯一的元素 y, 適合 $y = U(x)$. 且當 $x \in R, x' \in R, y = U(x), y' = U(x')$ 時, 成立着 $r(x, x') = r(y, y')$. 此時稱 $y = U(x)$ 是一個等距變換. 從上面所說, R 等距變換於 $\overline{\overline{R}}$ 中之一子集.

假如 $\overline{\overline{R}} = R$, 那末我們說: 綫性有模空間 R 能回照於自身. 歐幾里得空間 E_n 不但能回照於自身, 並且 E_n 的 $\overline{E}_n$ 已經是 E_n. 空間 l_2 也是如此. 設 $\frac{1}{p}$ 與 $\frac{1}{q}$ 都是正數, 其和等於 1, 則因 $\overline{l}_p = l_q$,

$\bar{l}_q = l_p$ 所以 $l_p = \bar{l}_p$.

現在考慮空間 c, c 是由如下的元素

$$x = (x_1, x_2, \cdots), \ x_n \to 0$$

所成的, $\|x\| = \max|x_n|$. 在 c 上定義着有界汎函數

$$f(x) = \Sigma f_n x_n, f_n = f(l_n),$$

$$l_n = (\overbrace{0, \cdots, 1}^{n}, 0, \cdots).$$

當 $\Sigma|f_n| = a < \infty$ 時,顯然地,

$$\|f\| = \max_x \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leqslant a.$$

此時,取適合的 x,可使 $f(x) = \sum_1^N |f_n|$(N 是一整數). 取 N 甚大可使 $f(x)$ 甚近於 a, 同時可使 $\|x\| = 1$, 由是可知 $\|f\| = a$.

由 $f(x)$ 的有界性,我們易證 $\Sigma|f_n|$ 必須收斂.

點集 $x = (x_1, \cdots, x_n, 0, \cdots)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 在 c 中是到處稠密的, 由於 $x = x_1 l_1 + x_2 l_2 + \cdots + x_n l_n$, 所以

$$f(x) = x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n.$$

由於 $f(x)$ 的連續性,這些數值 $\sum_1^n f_\nu$ 可以唯一地決定 $f(x)$.

因此 $f(x) = \sum_1^\infty f_n x_n$. 就是: c 上所能定義的有界綫性泛函數,限於這種形式. 這种泛函數構成 c 的共軛空間 $\bar{c}$. 假如 $f(x) \in \bar{c}$, 則 $\|f\| = \Sigma|f_n|$,共軛空間 $\bar{c}$ 是由如下的數列

$$(f_1, f_2, \cdots), \ \Sigma|f_n| < \infty,$$

所構成的. 又由

$$x = (x_1, x_2, \cdots), \|x\| = \Sigma|x_n| < \infty,$$

所決定的空間,它的共軛空間是由

$$f = (f_1, f_2, \cdots), \|f\| = \max|f_n| < \infty$$

所構成，記這個空間(有界數列的全體)為 m.

空間 c 與空間 m，決不是經過一個等距變換，可以從這個得到那個的．事實上，當 $x_1, x_2, \cdots$ 都是有理數時，一切點 $(x_1, x_2, \cdots x_n, 0, \cdots)$ $(n=1, 2, \cdots)$ 在 c 中是到處稠密的，因此 c 是一可析空間．但是 m 並不是可析的，c 決不能回照於自身．

8. 元素叙列的弱性收斂(弱斂)與汎函數叙列的弱(性收)斂

設 $\{x_n\}$ 是綫性有模空間 R 中之一元素敍列(點列)．假如 $\{\|x_n\|\}$ 是有界*並且

$$f(x_n) \to f(x_0)$$

對於 $\overline{R}$ 中任何 f 成立，那末說：$\{x_n\}$ 弱斂於 x_0.

定理 1. 設 $\{x_n\}$ 是綫性有模空間 R 中之一有界點列(就是說：$\|x_n\| \leqslant M < \infty$)．假如 Δ 是 $\overline{R}$ 的一個子集 Δ 的綫性包集 (Δ) [當 $f \in \Delta$, $f_1 \in \Delta$ 時，$\alpha f + \beta f_1 \in (\Delta)$] 在 $\overline{R}$ 中到處稠密，那末當

$$f(x_n) \to f(x_0)$$

對於 Δ 中任何 f 成立時，$\{x_n\}$ 弱斂於 x_0.

證明 設 $f \in R$，由假設，(Δ) 中有 $\{f_n(x)\}$ 收斂於 f——就是說，$\|f_n - f\| \to 0$．我們要證 $f(x_n) \to f(x_0)$，從

$$\begin{aligned} |f(x_n) - f(x_0)| &\leqslant |f(x_n) - f_k(x_n)| + \\ &+ |f_k(x_n) - f_k(x_0)| + |f_k(x_0) - f(x_0)| \\ &\leqslant \|f - f_k\| \, \|x_n\| + |f_k(x_n - x_0)| + \|f_k - f\| \cdot \|x_0\|. \end{aligned}$$

由假設，第一項和第三項當 $n \to \infty$ 時趨近於 0．又由於 $f_k \in (\Delta)$，所以 $f_k(x_n - x_0)$ 當 $x \to \infty$ 時趨近於 0．因此首先取 k 甚大，然後取 $n > N$，則得

$$|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon \ (n > N).$$

因此 $f(x_n) \to f(x_0)$．定理證畢．

當 $\|x_n - x_0\| \to 0$ 時，稱 $\{x_n\}$ 强斂於 x_0．由於

---

* 從 $f(x_n) \to f(x_0)$ $(f \in \overline{R})$ 可以導出 $\|x_n\| = O(1)$．這裏，爲簡便計，將 $\|x_n\| = O(1)$ 作为一個條件．

$$|f(x_n) - f(x_0)| \leqslant \|f\| \cdot \|x_n - x_0\|,$$

故當$\{x_n\}$强斂於 x_0 時,它也弱斂於 x_0. 弱斂的點列未必强斂. 例如在 l_2 中,

$$e_n = (0, 0, \cdots, 0, 1, 0 \cdots)(n = 1, 2, \cdots)$$

是一弱斂的點列; 事實上, l_2 上所定義的任一綫性泛函數 $f(x)$, $x = (x_1, \cdots)$,都可以寫成一固定的向量

$$a = (a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots) \in l_2$$

與 x 的數值乘積$(x, a) = \Sigma a_n x_n = f(x)$. 由此

$$f(e_n) = (e_n, a) = a_n.$$

由於 $a_n \to 0$,所以 $f(e_n) \to 0$. 但是$\{e_n\}$並不强斂於任何元素.

應該留意的是:在有限維空間中,强斂和弱斂是同一件事. 事實上,當

$$x_k = (x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \cdots, x_k^{(n)})$$

弱斂於 $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(n)})$時,極限 $\lim f(x)$ 一定存在. 特別取 $f(x) = (x, e_\nu)$ $(\nu = 1, 2, \cdots, n)$,則

$$(x_k, e_\nu) = ((x_k^{(1)}, \cdots, x_k^{(2)}), (\underbrace{\phi, \cdots, 1}_{\nu}, \cdots, 0)) = x_k^{(\nu)}.$$ 因

此,當 $k \to \infty$ 時, $\lim x_k^{(\nu)}$ 都存在. 寫

$$\lim_{k\to\infty} x_k^{(\nu)} = x_0^{(\nu)}, \quad x_0 = (x_0^{(1)}, \cdots, x_0^{(n)}),$$

則

$$r(x, x_n) = \sqrt{(x^{(1)} - x_n^{(1)})^2 + \cdots + (x^{(n)} - x_k^{(n)})^2} \to 0.$$

所以$\{x_n\}$强斂於 x_0. 强斂必弱斂, x_0 必等於 x.

但是 n 不能展到 ∞, 這就是說: 在 l_2 中, 弱斂的確較弱於强斂. 設 $l_1, l_2, \cdots$ 的全體爲 Δ, 則(Δ)在 l_2 中到處稠密. 因此

$$x_k = (x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \cdots) \ (k = 1, 2, \cdots)$$

弱斂的充要條件是一切極限

$$\lim_{k\to\infty}(x_k, e_\nu) = \lim_{k\to\infty} x_k^{(\nu)} \ (\nu = 1, 2, \cdots)$$

都存在. 但是這些極限的存在並不含有$\{x_k\}$的强斂.

設 $\{f_n(x)\}$ 都是綫性有模空間 R 上所定義的綫性泛函，它們的模 $\|f_n\|$ $(n=1,2,\cdots)$ 是一有界數列，假如對於 R 中任何 x，當 $n\to\infty$ 時 $f_n(x)$ 收斂於綫性泛函數 $f(x)$，我們稱 $\{f_n\}$ 弱斂於 $f(x)$．當 $\{f_n(x)\}$ 强斂於 $f(x)$ 時，它必弱斂於 $f(x)$．

例 設有如下的正値連續函數列 $\{g_n(t)\}$：當 $|t|\geqslant\frac{1}{n}$ 時，$g_n(t)$ 等於 0，

$$\int_a^b g_n(t)dt = 1 \quad (n=1,2,\cdots;\ a<0,\ b>0).$$

假如 $\chi(t)$ 在 $[a,b]$ 中是一連續函數，那末

$$\lim_{n\to 0}\int_a^b g_n(t)\chi(t)dt = \chi(0).$$

事實上，左端的積分等於

$$\chi(t_n)\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g_n(t)dt = \chi(t_n),$$

但 $-\frac{1}{n}<t_n<\frac{1}{n}$．由是綫性泛函數

$$f(\chi) = \int_a^b g_n(t)\chi(t)dt$$

的敍列對於 $C[a,b]$ 中任何 $\chi(t)$ 收斂．因此 $\{g_n(t)\}$ 在 $[a,b]$ 上弱斂於一個函數 $\delta(t)$．將上面的極限方程通常寫成

$$\int_a^b \delta(t)\chi(t)dt = \chi(0).$$

更一般的寫法是

$$\int_a^b \chi(t)\delta(t-t_0)dt = \chi(t_0),$$

但 $a<t_0<b_0$ 有時寫此泛函爲 $\delta_{t_0}\chi(t)$，在量子力學中，稱 $\delta(t)$ 爲迪拉克(Dirac)的 δ 函數．一切綫性汎函 $\delta_{t_0}\chi(t)$ 所成之集 Δ 的綫性包集 (Δ) 在 $C[a,b]$ 中是到處稠密的．因此當

$$\delta_{t_0}\chi_n(t)\to\delta_{t_0}\chi(t)$$

對於任何 δ_{t_0} 成立時，$\chi_n(t_\xi)\to\chi(t_\xi)$. 所以弱斂的連續函數列 $\{\chi_n(t)\}$ 是一均匀有界的收斂函數列，但是此事並不包含均勻收斂性. 這是容易舉例說明的：例如

$$\chi_n(t)=\sin t+\frac{\sin 2t}{2}+\cdots+\frac{\sin nt}{n},\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

定理 2. 假如綫性有模空間 R 是可析的那末 R 上的任一有界綫性汎函數叙列必含一個弱斂的子列.

證明 由 R 的可析性，R 中有一到處稠密的元素列 $x_1,x_2,\cdots$. 設 $f_1,f_2,\cdots$ 是一有界的——$\|f_n\|=0(1)$——綫性叙泛函數叙列，則 $f_n(x_1)(n=1,2,\cdots)$是一有界數列. $\{f_n(x)\}$必有一個收斂的子列$\{f_{p_n}(x_1)\}$.

同樣$\{f_{p_n}(x_2)\}$中有一個收斂的子列 $\{f_{q_n}(x_2)\}$, $\{f_{q_n}(x_3)\}$ 中有一個收斂的子列$\{f_{r_n}(x_3)\}$等等. 因此，汎函數叙列

$$f_{p_1}(x),\ f_{q_2}(x),\ f_{r_3}(x),\ \cdots$$

在點列$\{x_n\}$上收斂. 但 $p_1<q_2<r_3<\cdots$. 因此它們在 R 中到處收斂，所以成一弱收斂的子列. 定理證畢.

我們考慮如下的問題：在定理 2 所述的情況，能否於 $\overline{R}$ 中引進一種距離的概念，使 $\overline{R}$ 的任一有界子集具有緻密性? 回答是肯定的，事實上，當 f_1 和 f_2 都屬於 $\overline{R}$ 時；我們定義

$$r(f_1,f_2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|f_1(x_n)-f_2(x_n)|}{2^n\|x_n\|}\tag{1}$$

——$\{x_n\}$在 R 中是處處稠密的——的話

$$r(f_1,f_2)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\|f_1\|+\|f_2\|}{2^n}=(\|f_1\|+\|f_2\|),$$

$\overline{R}$ 就成一個有度的空間，這是容易明白的. 由是可述

系 設 $\overline{R}$ 是可析的綫性有模空間 R 之共軛空間，$\{x_n\}$是 R 中到處稠密的點列，$\overline{R}$ 中以 (1) 爲f_1 和 f_2 的距離，那末 $\overline{R}$ 中的任何有界子列都具有緻密性.

9. 綫性運算子 設 R 和 R' 是兩個巴拿赫空間，X 是 R 中的一個點集．設由映照法 A 將 X 單值地映照於 R'，就是說：當 $x \in X$ 時，R' 有元素 y 對應於 $x: y = Ax$．此時我們說 $y = Ax$ 是 X 上所定義的一個運算子．假如當 $x_1 \in X$，$x_2 \in X$ 時，等式

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A_2 x_2$$

對於任何實數 α_1, α_2 成立，那末我們就說 Ax 是一個綫性運算子．假如有常數 M 使 $\| Ax \| \leqslant M \| x \|$ 對於 X 中一切 x 成立，那末稱 Ax 是一有界的綫性運算子，對於任一正數 ε，假如存在着僅與 ε 有關的正數 δ，當 X 中的兩點 x', x'' 間的距離小於 δ 時，Ax' 與 Ax'' 間的距離小於 ε，那末稱 Ax 是一連續的綫性運算子．前面說過，對於綫性泛函數，有界性與連續性是等價的．此事可以推廣到綫性運算子——綫性泛函數是特種的綫性運算子．

定理 1. 對於綫性運算子，有界性與連續性是等價的．

證明 當綫性運算子 Ax 是有界時，從

$$\| Ax - Ax' \| = O(\| x - x' \|)$$

知道它具有連續性．假如 Ax 是無界，那末對於自然數 n，有 x_n 適合於 $\| Ax_n \| > n \| x_n \|$．置 $x_n / n \| x_n \| = y_n$，則

$$Ay_n = \frac{A(x_n)}{n \| x_n \|}$$

的模大於 1．由連續性，$\lim Ay_n = A(0) = 0$，這是與 $\| Ay_n \| > 1$ 相冲突的，因此 Ax 是有界的．定理證畢．

現在研究將 n 維空間 R_n 映照到 R_m 上的綫性運算性運子 Ax 的一般形式．設 R_n 和 R_m 的基礎分別爲

$$e, \cdots, e_n \text{ 和 } \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m,$$

那末 $Ae_\nu = a_{\nu 1}\varepsilon_1 + a_{\nu 2}\varepsilon_2 + \cdots + a_{\nu m}\varepsilon_m$．因此

$$Ax = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu A e_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu (a_{\nu 1}\varepsilon_1 + \cdots + a_{\nu m}\varepsilon_m) =$$

$$= d_1\varepsilon_1 + d_2\varepsilon_2 + \cdots + d_m\varepsilon_m,$$

但 $d_\mu = a_{1\mu}x_1 + \cdots + a_{n\mu}x_n,\ \mu = 1, 2, \cdots, m$.

對於 Ax 有常數 M 使不等式 $\| Ax \| < M \| x \|$ 對於 X 中一切 x 成立時，稱 Ax 為有界. 記適合於此不等式的 M 之下界為 $\|A\|$，這是綫性運算子 Ax 的模.

定理 2. 假如綫性運算子 Ax 是有界那末

$$\| A \| = \max_{\| x \| = 1} \| Ax \| = \max \frac{\| Ax \|}{\| x \|}.$$

證明 設 $\| A_x \|$ 在 $\| x \| = 1$ 上的最大值為 α. 首先證明 $\| A \| \geqslant \alpha$. 由 α 的定義，對於 $\varepsilon > 0$, X 中必有 x_ε 適合

$$\frac{\| Ax_\varepsilon \|}{\| x_\varepsilon \|} > \alpha - \varepsilon.$$

由是可知 $\| A \| > \alpha - \varepsilon$, $\| A \| \geqslant \alpha$. 但是 $\| A \| > \alpha$ 是不可能的，否則從

$$\frac{\| Ax \|}{\| x \|} \leqslant \alpha = \| A \| - (\| A \| - \alpha) = M (M < \| A \|)$$

得到 $\| A \| \leqslant M$, 即 $\| A \| \leqslant \alpha$ 的矛盾. 定理證畢.

設綫性連續運算子 A_1 和 A_2 都把巴拿赫空間 E 映入於巴拿赫空間 E_1 中，則當 $x \in E$ 時，元素 $A_1x + A_2x = y$ 屬於 E_1, 以此式定運算子 $A_1 + A_2$ 的意義，稱它為 A_1 與 A_2 之和. 當然 $A_1 + A_2$ 也是綫性運算子.

定理 3. 若 $A = A_1 + A_2$ 是 A_1 與 A_2 兩運算子的和，則

$$\| A \| \leqslant \| A_1 \| + \| A_2 \|.$$

證明 由於 $\| Ax \|$ 等於

$$\| A_1x + A_2x \| \leqslant \| A_1x \| + \| A_2x \| \leqslant$$
$$\leqslant (\| A_1 \| + \| A_2 \|) \| x \|,$$

所以 $\| A \| \leqslant \| A_1 \| + \| A_2 \|$. 定理證畢.

定理 4. 設 A_1 與 A_2 分別是巴拿赫空間 E_1 與 E_2 上的綫性連續運算子，那末汎函 $A_2(A_1x)$——簡寫作 A_2A_1——的模小於或等於 $\| A_1 \| \cdot \| A_2 \|$.

證明 事實上 $\|A_1A_2x\|$ 等於

$$\|A_2(A_1x)\| \leqslant \|A_2\| \cdot \|A_1x\| \leqslant \|A_2\| \cdot \|A_1\| \cdot \|x\|.$$

所以 $\|A_1A_2\| \leqslant \|A_1\| \cdot \|A_2\|$. 證明完畢.

設有運算子 T，它將巴拿赫空間 E 映入於巴拿赫空間 E_1 中，就是說，當 $x \in E$ 時，E_1 中有 y 適合 $Tx = y$. 現在假如 E_1 中任一元素 y 有一個也只有一個元素 $x \in E$ 適合方程 $Tx = y$. 這樣決定了 E_1 上的一個運算子，稱爲 T 的逆算子，用記號

$$x = T^{-1}y$$

來表示它. 此時稱 T 是一可逆的運算子.

定理 4. 綫性運算子 T 的逆運算子 T^{-1} 也是綫性的.

證明 我們要證等式 $T^{-1}(\alpha_1y_1 + \alpha_2y_2) = \alpha_1T^{-1}y_1 + \alpha_2T^{-1}y_2$ 對於映像空間中任何兩點 y_1, y_2 成立. 設 $y_1 = Tx_1, y_2 = Tx_2$，則

$$T^{-1}(\alpha_1y_1 + \alpha_2y_2) = \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 = \alpha_1T^{-1}y_1 + \alpha_2T^{-1}y_2.$$

證明完畢.

定理 5. 有界綫性運算子的逆運算算子是有界的.

首先建立兩個引理.

引理 1 設 M 在巴拿赫空間 E 中是一到處稠密的集. 那末對於 E 中的一個元素 $y(y \neq 0)$，M 中的存在元素 $y_n(n = 1, 2, \cdots)$ 適合

$$y = y_1 + y_2 + \cdots, \ \|y_k\| \leqslant \frac{3\|y\|}{2^k}.$$

證明 $\{y_k\}$ 可以用如下的方法作成. 首先取 y_1 適合

$$y_1 \in M, \ \|y - y_1\| < \frac{1}{2}\|y\|.$$

然後從 M 順次取 $y_2, y_3, \cdots$ 如下:

$$\|y - y_1 - y_2 - \cdots - y_k\| \leqslant \frac{\|y\|}{2^k}.$$

這樣選取 $\{y_k\}$ 的可能，是由於 M 在 E 中的稠密性. 由是

$$\|y_k\| \leqslant \|y_k + y_{k-1} + \cdots + y_1 - y\| + \|y - y_1 - y_2 - \cdots - y_{k-1}\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\|y\|}{2^k} + \frac{\|y\|}{2^{k-1}} = \frac{3\|y\|}{2^k}.$$

證明完畢.

引理 2 設巴拿赫空間 E 可以分成可列無限個集 $E = M_1 + M_2 + \cdots$，那末至少有一個 M_n 在某一球中是稠密的.

證明 假設 $M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq \cdots$，這是不妨的. 假如任一 M_n 在任何球中都不稠密，那末任取一球 S_0, S_0 中必有一球 S_1 不含有 M_1 的點，S_1 中有一球 S_2 不含有 M_2 的點，等等. 由是

$$S_0 \supset S_1 \supset S_2 \supset \cdots, \quad S_n M_n = 0.$$

由於 E 是一巴拿赫空間所以 ΠS_n 至少含有一點 x, $x \in E$. 但是 $x \bar{\in} M_n (n = 1, 2, \cdots)$，因此 $x \bar{\in} E$，這是矛盾. 引理證畢.

定理 5 的證明 設 E_1 中適合 $\|T^{-1}y\| \leqslant k\|y\|$ 的一切 y 所成之集爲 M_k，則 $E_1 = \Sigma M_k$. 由引理 2，有一個 M_n 在某一球 S_0 中到處稠密. 設

$$y_0 \in M_n, \quad 0 < \beta < \alpha$$

我們考慮如下的球殼

$$P: \ \beta < \|z - y_0\| < \alpha.$$

將 P 平行移動使其中心符合於坐標的原點，獲得新的球殼 P_0. 現在證明必有 M_{n_0} 在 P_0 中到處稠密. 當 $z \in P$ 時 $z - y_0 \in P_0$，再假設 $z \in M_n$ 的話，

$$\|T^{-1}(z - y_0)\| \leqslant \|T^{-1}z\| + \|T^{-1}y_0\| \leqslant n(\|z\| + \|y_0\|) \leqslant$$
$$\leqslant n(\|z - y_0\| + 2\|y_0\|) \leqslant n_0 \|z - y_0\|.$$

此地

$$n_0 \geqslant n\left\{1 + \frac{2\|y_0\|}{\beta}\right\}.$$

由 M_N 的定義，$z - y_0 \in M_N$. 故當 $z \in M_n$ 時，$z - y_0 \in M_{n_0}$. 由是可知 M_{n_0} 在 P_0 中是到處稠密的. 對於 $y \in E_1$ 取適當的實數 λ 使

$$\beta < \|\lambda y\| < \alpha.$$

因此 $\lambda y \in P_0$. 那末 M_{n_0} 中必有敍列 $\{y_k\}$ 收斂於 λy，即 $\frac{y_k}{\lambda} \to y$. 但

是當 $y_k \in M_{n0}$ 時，y_k/λ 必屬於 M_{n0}，因此 M_{n0} 在 E_1 中是到處稠密的．

由引理 1，對於 $y \in E_1$，M_{n0} 中有 $\{y_n\}$ 適合

$$y = \sum_{1}^{\infty} y_n, \quad \| y_n \| < \frac{3\| y\|}{2^n}.$$

設 $x_k = T^{-1}y_k$，敍列 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n (n = 1, 2, \cdots)$ 必收斂於 E 中之一原素 x. 事實上，從

$$\| x_n \| = \| T^{-1}y_n \| \leqslant n_0 \| y_0 \| < n_0 \frac{3\| y \|}{2^n},$$

得到

$$\| x \| \leqslant \sum_{1}^{\infty} \| x_n \| \leqslant 3\, n_0 \| y \| \Sigma 2^{-n} = 3\, n_0 \| y \|.$$

運算子 T 具有連續性，

$$Tx = \lim_{n\to\infty}(Tx_1 + Tx_2 + \cdots + Tx_n) = y_1 + \cdots + y_n + \cdots = y.$$

由是

$$x = T^{-1}y, \quad \| x \| = \| T^{-1}y \| \leqslant 3\, n_0 \| y \|.$$

這是對於 E_1 中任何 y 成立的，因此，T^{-1} 是一有界算子．定理證畢．

假如 E 上的運算子 T_0 和 T 的"差模"$\| T_0 - T \|$ 小於 ρ，那末稱 T 在 T_0 的"ρ 隣近"．

定理 6. 在可逆運算子 T_0 之 $\rho = \dfrac{A}{\| T_0 \|}$ 隣近的運算子是可逆的．

證明 設 T 和 T_0 都映照 E 於 E_1 中，

$$\| T - T_0 \| < \frac{A}{\| T_0 \|}.$$

設 $y = Tx = T_0x + (T - T_0)x$．則由 T_0 的可逆性，

$$T_0^{-1}(y) = x + T_0^{-1}(T - T_0)x.$$

簡寫運算子 $T^{-1}(T - T_0)$ 爲 U，元素 $T^{-1}(y)$ 爲 z，那末

$$\|U\|<1,\ z\in E.$$

映照 $x'=z-Ax$ 是收縮的，它映照 E 於 E 中，E 中必有唯一的不動點：$x=z-Ax$. 因此對於一定的 y，方程

$$x=T_0^{-1}y-Ax$$

或是 $y=T_0x+(T-T_0)x$ 具有唯一的解. 所以 T 是可逆的. 定理證畢.

定理 7. 設 I 是恆等變換則當綫性運算子 A 的模 $\|A\|$ 小於 1 時，$T=I-A$ 的逆運算子是

$$(I-A)^{-1}=A^0+A^1+A^2+\cdots,$$

但 $A^0=I$.

證明 設 T 映照 E 於 E 中：

$$y=Tx,\ x\in E,\ y\in E.$$

由於 $\|A\|<1$，運算子 $x'=y+Ax$ 將 E 收縮地映入於 E. 因此 E 中有唯一的不動點 $x=y+Ax$. 現在用逐次迫近法，將此 x 求出. 設 $x_0=0$，$x_{n+1}=y+Ax_n$，則

$$x_1=y,\ x_2=y+Ay,\ x_3=y+Ay+A^2y,$$
$$x_n=y+Ay+\cdots+A^{n-1}y.$$

由是

$$\lim_{n\to\infty}x_n=y+Ay+A^2y+\cdots.$$

從 $x_{n+1}=y+Ax_n$ 得到 $x=y+A_n$. 因此，

$$x=\sum_{k\to 0}^{\infty}A^ky,\ (I-A)^{-1}\ y=\sum_0^{\infty}A^ky.$$

由是即得

$$(I-A)^{-1}=\Sigma A^k.$$

證明完畢.

設 $y=Ax$ 映照巴拿赫空間 E 於巴拿赫空間 E_1 中，$g(y)$ 是 E_1 上定義的一個綫性汎函數，就是說 $g(y)\in\overline{E}_1$.

因此 $f(x)=g(Ax)$ 是將 E 映入於 E_1 中之一綫性泛函數：

$f(x) \in \bar{E}$. 空間 $\bar{E}_1$ 中任一 g 對應於 $\bar{E}$ 中之元素 f, 這是映照 $\bar{E}_1$ 於 $\bar{E}$ 中的運算. 記此運算子為 A^*, 則 $f = A^* g$, 稱 A^* 為 A 的共軛運算子.

例 設由 $y = Ax$ 將 R_n 映入 R_m, 但

$$x = (x_1, \cdots, x_m),\ y = (y_1, \cdots, y_m),$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_m \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n$$

$$(i = 1, 2, \cdots, m).$$

寫 $g(y) = g_1 y_1 + g_2 y_2 + \cdots + g_m y_m$, 則

$$f(x) = g(Ax) = \sum_{i=1}^{m} g_i y_i = \sum_{i=1}^{m} g_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j (g_1 a_{1j} + g_2 a_{2j} + \cdots + g_m a_{mj}).$$

因此

$$f_j = g_1 a_{1j} + \cdots + g_m a_{mj}\ (j = 1, \cdots, n).$$

由是

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

定理 8. 設 A, B 都是綫性運算子, k 是一個數, 則

$$(A + B)^* = A^* + B^*, (kA)^* = kA^*.$$

若 A 映照巴拿赫空間 E 於巴拿赫空間 E_1, 則 $\| A^* \| = \| A \|$.

證明 設 $f_1 = g(Ax)$, $f_2 = g(Bx)$, 則

$$f_1 + f_2 = g(Ax + Bx) = g((A + B)x).$$

這就是證明 $A^* + B^* = (A + B)^*$. 又 $(kA)^* = kA^*$ 是顯而易

見的.由於

$$|f(x)| = |g(Ax)| \leqslant \|g\| \cdot \|Ax\| \leqslant \|g\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|,$$

所以 $\|f\| \leqslant \|g\| \ \|A\|$. 這就是 $\|A^*g\| \leqslant \|A\| \ \|g\|$. 因此 $\|A^*\| \leqslant \|A\|$. 設 $x \in E$, 則

$$\frac{Ax}{\|Ax\|} = y_0 \in E_1.$$

由漢與巴拿赫的定理, 有泛函數 g 適合 $g(y_0) = 1$ 和 $\|g\| = 1$. 由是 $g(Ax) = \|Ax\|$. 但是左邊等於

$$|g(Ax)| = |A^*g| \leqslant \|A^*\| \ |g| \leqslant \|A^*\| \ \|g\| \ \|x\|.$$

因此 $\|Ax\| \leqslant \|A^*\| \ \|x\|$, $\|A\| \leqslant \|A^*\|$. 從而

$$\|A\| = \|A^*\|.$$ 定理證畢.

10. 廣義函數 廣義函數是一種特殊的綫性泛函數,這個概念最初由沙波列夫引進*,後來由薛瓦茲†等展開研究.

首先說明空間(D)的意義,(D)中元素是如下的一種函數$\varphi(x)$: $\varphi(x)$在$-\infty < x < \infty$上具有任何次導函數$\varphi'(x), \varphi''(x), \cdots$;但是在某一區間的外部$\varphi(x)$全等於0. (D)中的收斂敍列$\{\varphi_n\}$是適合下面兩個條件的函數列: (i) 有一個區間, 在此區間的外部一切函數φ_n都等於0,(ii)在此區間中,一切導函數列

$$\varphi_1^{(k)},\ \varphi_2^{(k)},\ \cdots,\ \varphi_n^{(k)},\ \cdots$$
$$(k = 0, 1, \cdots; \ \varphi_n^{(0)} = \varphi_n).$$

都均匀收斂.

廣義函數$T(\varphi)$是在(D)上所定義的綫性泛函數,它當$\varphi_n \to \varphi$, $\varphi_n \in D$時, $T(\varphi_n) \to T(\varphi)$. 例如當$f(t)$是一連續函數時,綫性泛函數

$$T(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)dt, \ \varphi \in (D)$$

是一個廣義函數. 這種$T(\varphi)$是與$f(t)$有關係的,兩個相异的連續

---

* 索波列夫 (С. Л. Соболев) 1935.

† 薛瓦茲 (L. Schwarz).

函數$f_1(t)$和$f_2(t)$决定着兩個不同的廣義函數$T(\varphi)$. 事實上,當

$$f(t)=f_1(t)-f_2(t)\neq 0$$

時,說是$f(t)>0$,於(D)中取適當的函數$\varphi(t)$

$$\varphi(t)=0\quad(t\leqslant\alpha\text{ 以及 }t\geqslant\beta)$$

$$=e^{-\frac{1}{(t-\alpha)^2}}\cdot e^{-\frac{1}{(t-\beta)^2}}(\alpha<t<\beta)$$

可使

$$T(\varphi)=\int_\alpha^\beta f(t)\varphi(t)dt>0.$$

廣義函數

$$T(\varphi)=\varphi(0),\ \varphi\in(D),$$

不外乎從前說過的δ函數. δ函數的"導數"是指如下的廣義函數

$$T(\varphi)=-\varphi'(0),\ (\varphi\in(D)).$$

用記號δ'來表示它.

對於$\{\varphi\}\subset(D)$,假如有區間(α,β)和常數敍列$M_0, M_1,\cdots$使當t不屬於(α,β)時,$\varphi(t)=0$,並且

$$|\varphi|<M_0,\ |\varphi'|<M_1,\ |\varphi''|<M_2,\cdots$$

當$\varphi\in\{\varphi\}$時成立,那末稱$\{\varphi\}$是空間(D)中之一**有界集**. 廣義函數列$\{T_n(\varphi)\}$對於(D)中的任一有界集均匀收斂於$T(\varphi)$時,稱$\{T_n(\varphi)\}$**收斂於**$T(\varphi)$. 因此

$$T_n(\varphi)=\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}\frac{n}{2}\varphi(t)dt\quad(n=1,2,\cdots)$$

的話,$\{T_n(\varphi)\}$收斂於$\delta: T(\varphi)=\varphi(0)$.

對於廣義函數$T(\varphi)$,用公式

$$\frac{dT}{dt}(\varphi)=-T(\varphi')$$

定義它的導數,這也是一個廣義函數. 當$f(t)$可以微分時,由分離積分法,得到

$$-T(\varphi) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi'(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\varphi(t)dt.$$

由是可述下面的

定理 1. 廣義函數具有任意次的導數。

定理 2. 廣義函數的收斂敘列可以任意次地舉行分項微分.

證明 設 $T_n \to T$, 則對於(D)中的任一有界集 $\{\varphi\}$, 存在如下的區間 $[\alpha, \beta]$:

$$T_n(\varphi) = \int_{\alpha}^{\beta} f_n(t)\varphi(t)dt.$$

當 $n \to \infty$ 時, $T_n(\varphi)$在$\{\varphi\}$上匀斂於

$$T(\varphi) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)\varphi(t)dt.$$

因此

$$\frac{dT_n}{dt}(\varphi) = -\int_{\alpha}^{\beta} f_n(t)\varphi'(t)dt \to -\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\varphi'(t)dt$$

在$\{\varphi\}$上均匀地成立. 同樣

$$\frac{d^2T_n}{dt}(\varphi) \to (t)^2\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\varphi''(t)dt = \frac{d^2T}{dt}(\varphi),$$

等等,定理證畢.

廣義函數的導數的意義還可以如下的解釋.定義

$$T_h(\varphi(t)) = T(\varphi(t-h)),$$

則

$$\frac{T_h(\varphi(t)) - T(\varphi(t))}{h} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{\varphi(t-h) - \varphi(t)}{h}dt.$$

因此

$$\frac{dT}{dt}(\varphi(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi'(t)dt,$$

$$f(t) = \begin{cases} 1 & (t \geqslant 0) \\ 0 & (t < 0). \end{cases}$$

所定的廣義函數

$$T(\varphi) = \int_0^\infty \varphi(t)dt$$

的導數是

$$\frac{dT}{dt}(\varphi) = -\int_0^\infty \varphi'(t)dt = \varphi(0).$$

這是 δ 函數.

設 $f(t)$ 的不連續點都是尋常的 —— 就是說, $f(t\pm 0)$ 對於 $(-\infty,\infty)$ 中任何 t 都存在. 固定 $t=t_0$, 從 (D) 取出如下的 $\{\varphi_n\}$:

$$\varphi_n(t) = 0,\ t \bar{\in} (t_0-\varepsilon_n, t_0+\varepsilon_n),\ \varepsilon_n \to 0,$$

$$\int_{t_0-\varepsilon_n}^{t_0+\varepsilon_n} \varphi_n(t)dt = 1.$$

稱極限

$$\lim_{n\to\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi_n'(t)dt$$

爲 $f(t)$ 在 $t=t_0$ 的**廣義導數**, 記它做 $Df(t_0)$. 由於

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi_n'(t)dt = \int_{-\varepsilon_n}^{\varepsilon_n} f(t_0+t)\varphi_n'(t_0+t)dt$$

$$= f(t_0+\eta_n)\int_0^{\varepsilon_n} \varphi_n'(t_0+t)dt + f(t_0-\eta_n')\int_{-\varepsilon_n}^{0} \varphi_n'(t_0+t)dt,$$

此地 $0<\eta_n<\varepsilon_n$, $0<\eta_n'<\varepsilon_n$; 並且 $\varphi_n(t_0\pm\varepsilon_n)=0$. 所以 $\varphi_n \to \varphi$ 的話, 我們達到

$$Df(t_0) = [f(t_0+0) - f(t_0-0)]\varphi(t_0).$$

就是說:

$$Df(t_0) = [f(t_0+0) - f(t_0-0)]\delta(t-t_0).$$

假如 $f(t)$ 在它的任何連續點都可以微分, 並且函數具有"連續性", 那末當 t_0 是 $f(t)$ 的一個連續點時, 從

$$-\int_{\infty}^{\infty} f(t)\varphi_n'(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\varphi_n(t)dt$$

$$= \int_{t_0-\varepsilon_n}^{t_0+\varepsilon_n} f'(t)\varphi_n(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} [f'(t_0)+0(1)]\varphi_n(t)dt$$

得到 $Df(t_0) = f'(t_0)$, 此時廣義導數等於普通的導數.

11. 綫性運算方程 設綫性運算子 Ax 將巴拿赫空間 E 映照於 E 中. 對於數值 λ, 假如有 $x \in E$ 適合

$$Ax = \lambda x,$$

那末稱 λ 是綫性運算子 A 的一個固有值. 當 A 是 R_n 上的綫性變换

$$x'_j = a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n (j = 1, 2, \cdots, n)$$

時,方程 $Ax = \lambda x$ 等價於"行列式 $|A - \lambda I|$ 等於 0". 當

$$|A - \lambda I| = 0$$

時,方陣 $A - \lambda I$ 不可以逆行. 一切 λ 使方陣 $A-\lambda I$ 不能逆行的, 成一集,稱此集爲運算子 A 的譜. 使 $A - \lambda I$ 可以逆行的 λ, 稱爲 A 的一個正則值. 當 λ 是一正則值時, $A - \lambda I$ 有逆運算子

$$(A - \lambda I)^{-1} = R_\lambda$$

稱 R_λ 爲 A 的一個助逆運算子.

當 E 不是一個 R_n 的時候, A 的譜中除開一切固有值, 可能還有別的數值. 稱固有值的全體爲 A 的點譜,譜中除了點譜. 稱所餘的部分爲 A 的連續譜.

定理 1. 綫性運算子 A 的譜是一個閉集. A 的正則值, 其全體成一開集. 當

$$|\lambda| > \|A\| \text{ 時},$$

$A - \lambda I$ 是可逆的.

證明 隣近於可逆運算子的運算子是可逆的. 因此,當 $A-\lambda I$ 是可逆時,取 $|\delta|$ 甚小, $A - (\lambda + \delta)I$ 也是可逆的. 這就是說, A 之正則值的全體成一開集, 所以譜是一閉集. $|\lambda| > \|A\|$ 的話, $\Sigma(\lambda^{-1}A)^k$ 收斂. 因此

$$-\frac{1}{\lambda}\sum_{1}^{\infty}\frac{A^k}{\lambda^k} = -\frac{1}{\lambda}\left(I - \frac{A}{\lambda}\right)^{-1} = (A - \lambda I)^{-1} = R\lambda$$

成一助逆運算子. 定理證畢.

系 A 的譜落在以原點爲中心, $\|A\|$ 爲半徑的圓中.

例 在$[0, 1]$中的一切連續函數$x(t)$成一空間c,在c上定義着

$$A(x(t)) = \mu(t)x(t),$$

$\mu(t)$是一固定的連續函數. 從

$$(A - \lambda I)x(t) = (\mu(t) - \lambda)x(t),$$

得到

$$(A - \lambda I)^{-1}x(t) = \frac{x(t)}{\mu(t) - \lambda}.$$

當$\mu(t) \neq \lambda$時,上式成立,因此$\mu(t)$的一切函數值形成A的譜.

設A是映照巴拿赫空間E於E中的一個運算子. 假如有界集的映像必具有緻密性,那末稱A是完全連續的, 因此A是R_n上的運算子的話,它一定是完全連續. 當E不是一個R_n時,E上的A未必是完全連續的.

在適當的條件下,方程,

$$y(s) = \int_a^b K(s, t)x(t)dt, \quad x(t) \in C[a, b] \tag{1}$$

定義$C(a, b)$上的一個完全連續運算子$Ax = y$. 我們證明

定理 2. 假如$K(s, t)$在正方形

$$Q: a \leqslant s \leqslant b, \ a \leqslant t \leqslant b$$

上是一有界函數,它的不連續點全部落在n根連續曲綫

$$t = \varphi_k(s), \ k = 1, 2, \cdots, n \tag{2}$$

上*,並且在任一直綫"$s =$ 常數"上,它只有有限個不連續點*,那末(1)定義一個完全連續運算子.

證明 首先證明$x(t) \in C(a, b)$含有$y(s) \in C[a, b]$.

記$|K(s, t)|$的上界爲M,適合

---

* 這個假設是重要的. 例如:設$a = 0$, $b = 1$. 當$s < \frac{1}{2}$時,$K(s, t) = 1$;當$s \geqslant \frac{1}{2}$時,$K(s, t) = 0$. 則$K(s, t)$在直綫$s = \frac{1}{2}$上沒有連續點, 而(1)將函數$x(t) = 1$變成不連續函數.

$$|t-\varphi_k(s)|<\frac{\varepsilon}{12nM}\ (k=1,2,\cdots,n)$$

的一切點(s,t)成一開集 G, $Q-G=F$ 是一閉集．在閉集 F 上，$K(s,t)$是連續的，因此有 δ 如下：不等式

$$|K(s',t)-K(s'',t)|<\frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

當 $|s'-s''|<\delta$ 時在 F 中成立．現在固 s' 和 s'' 將區間 $a\leqslant t\leqslant b$, 分爲兩組小區間．第一組 σ_1, 是由

$$\varphi_k(s')-\frac{\varepsilon}{12Mn}<t<\varphi_k(s')+\frac{\varepsilon}{12Mn}$$

$$(k=1,2,\cdots,n)$$

$$\varphi_k(s'')-\frac{\varepsilon}{12Mn}<t<\varphi_k(s'')+\frac{\varepsilon}{12Mn}$$

的 $2n$ 個小區間組成，其全長 $|\sigma_1|<2n\dfrac{2\varepsilon}{12Mn}=\dfrac{\varepsilon}{3M}$. 故當 $|x(t_1)|=\max|x(t)|$時，

$$\int_{\sigma_1}|K(s',t)-K(s'',t)|\cdot|x(t)|\,dt<\frac{2\varepsilon}{3}|x(t_1)|dt\leqslant\frac{2\varepsilon}{3}\|x\|.$$

又因

$$\int_{\sigma_2}|K(s',t)-K(s'',t)|\cdot|x(t)|dt\leqslant\frac{\varepsilon}{3(b-a)}|x(t_1)|\times$$

$$\times|b-a|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}\|x\|,$$

所以

$$|y(s')-y(s'')|\leqslant$$

$$\leqslant\int_a^b|K(s',t)-K(s'',t)|\cdot|x(t)|\,dt<\varepsilon\|x\|.$$

由是 $y(s)\in C(a,b)$, 且知 $y(s)$對於均勻有界的 $\{x(t)\}$ 是平等連續的，此時

$$|y(s)|\leqslant M(b-a)\|x\|$$

小於一個常數．定理證畢．

設 $a=0$, $b=1$, 在三角形 $\{t>s,(s,t)\subset Q\}$ 中, $K(s,t)=0$ 的話,則得伏耳得拉的運算子

$$y(s)=\int_0^s K(s,t)x(t)dt.\quad 0\leqslant s\leqslant 1.$$

這也是完全連續的.

定理 3. 設 $A_1, A_2, \cdots$ 都是巴拿赫空間 E 中的完全連續的運算子. 假如有運算子 A 適合

$$\lim_{n\to\infty}\|A_n-A\|=0.$$

那末 A 也是完全連續的.

證明 E 中任取一列有界元素 $x_1, x_2, \cdots$; $\|x\|<C$. 要證 $\{Ax_n\}$ 中有一個收斂的子列. 從 A_1x 的完全連續性, $A_1x_1, A_1x_2, \cdots$ 中有收斂的子列

$$A_1x_{p_1},\ A_1x_{p_2},\ \cdots\ (p_1<p_2<\cdots).$$

又從 A_2x 的完全連續性, $A_2x_{p_n}(n=1,2,\cdots)$ 中,有收斂的子列

$$A_2x_{q_1},\ A_2x_{q_2},\ \cdots\ (q_1<q_2<\cdots,\{q_n\}\subset\{p_n\}).$$

一般地說,從 A_mx 的完全連續性, $A_mx_{p_n}(n=1,2,\cdots)$ 中, 有收斂的子列

$$A_mx_{s_1},\ A_mx_{s_2},\ \cdots\ (s_1<s_2<\cdots).$$

但 $\{p_n\}\supset\{q_n\}\supset\cdots\supset\{r_n\}\supset\{s_n\}\cdots$. 因此在對角綫元素列 $x_{p_1}, x_{q_2}, \cdots, ,x_{r_{m-1}}, x_{s_m}, \cdots$ 上,一切 $A_1, A_2, \cdots$ 都收斂. 記此對角綫元素為 $x_{11}, x_{22}, \cdots$ 則存在着極限

$$\lim_{n\to\infty}A_mx_{nn}=a_m(m=1,2,\cdots).$$

由於 $\|Ax_{nn}-Ax_{pp}\|$ 小於或等於

$$\|Ax_{nn}-A_mx_{nn}\|+\|A_mx_{nn}-A_mx_{pp}\|+$$
$$+\|A_mx_{pp}-Ax_{pp}\|.$$

中間的項,當 $m>p>N(m,\varepsilon)$時, 小於 $\frac{\varepsilon}{2}$. 第一項與第三項之和不大於

$$\|A - A_m\| (\|x_{nn}\| + \|x_{pp}\|) < 2C \|A - A_m\|,$$

取 $m > m_0(\varepsilon)$的話，可以使它小於 $\frac{\varepsilon}{4c}$. 因此，當

$$n > p > N(m_\nu(\varepsilon), \varepsilon)$$

時，$\|Ax_{nn} - Ax_{pp}\| < \varepsilon$. 定理證明完畢.

定理 4. 完全連續運算子的共軛運算子也是完全連續的.

證明 設完全連續運算子 A 映照巴拿赫空間 E 於 E_1 中的 G. 因此 A 的共軛運算子 A^* 映照 $\bar{E}_1$ 於 $\bar{E}$ 中.

設$\{g_n\}$是 $\bar{E}_1$ 中的有界汎函敍列，$\|g_n\| \leqslant M$. 設 $\{y_n\}$ 在 G 中到處稠密，那末利用對角綫的方法，存在子列$\{g_{n_\nu}\}$在 G 上點點收斂. 事實上，當 $y \in G$ 時，有 y_s 適合

$$\|y - y_s\| \leqslant \frac{\varepsilon}{4M}.$$

設 $\mu > \nu$, 則 $|g_{n_\nu}(y) - g_{n_\mu}(y)|$ 小於或等於

$$|g_{n_\nu}(y) - g_{n_\nu}(y_s)| + |g_{n_\nu}(y_s) - g_{n_\mu}(y_s)| +$$
$$+ |g_{n_\mu}(y_s) - g_{n_\mu}(y)|.$$

第一第三兩項之和小於

$$(\|g_{n_\nu}\| + \|g_{n_\mu}\|) \|y - y_s\| < 2M \frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

第二項當 $\mu > \nu > n_0 = n_0(\varepsilon)$ 時，可使它小於 $\frac{\varepsilon}{2}$. 由是

$$|g_{n_\nu}(y) - g_{n_\mu}(y)| < \varepsilon, \ (\mu > \nu > n_0).$$

因之$\{g_{n_\nu}(y)\}$收斂. 現在寫

$$\lim_{\nu\to\infty} g_{n_\nu}(y) = \lim_{\nu\to\infty} g_{n_\nu}(Ax) = f(x) = g(Ax),$$
$$g_{n_\nu}(Ax) = f_\nu(x).$$

我們要證 $\|f_\nu - f\| \to 0$.

設 x_ν 是 E 中如下的元素，$\|x_\nu\| = 1$,

$$|f(x_\nu)-f_\nu(x_\nu)|\geqslant\frac{1}{2}\|f-f_\nu\|.$$

假如 $\|f-f_\nu\|\neq 0(1)$，那末有正數 η 小於

$$\|f-f_\nu\|,\ (\nu=\nu_1,\nu_2,\cdots).$$

因此

$$|f(x_\nu)-f_\nu(x_\nu)|>\frac{\eta}{2},\ (\nu=\nu_1,\nu_2,\cdots).$$

從 $\|x_\nu\|=1$ 知道：$\{x_\nu\}$ 中有子列 x_{ν_k} 使 Ax_{ν_k} 當 $k\to\infty$ 時收斂於 y_0，Ax 是完全連續的. 由於 $\{g_{n_\nu}(y)\}$ 的收斂性，我們可以假設兩不等式

$$\|y_0-x_{\nu_k}\|<\varepsilon \text{ 和 } |g_{(k)}(y_0)-g(y_0)|<\varepsilon$$

當 $k>k_0$ 時都成立. 此地(k)表示 n_{ν_k}. 因此 $|g_{(k)}(Ax_{\nu_k})-g(Ax_{\nu_k})|$ 小於或等於 $|g_{(k)}(Ax_{\nu_k}-y_0)|+|g_{(k)}(y_0)-g(y_0)|+|g(y_0-$ $-Ax_{\nu_k})|\leqslant\varepsilon(M+1+M)$. 這是可以小於 $\frac{\eta}{2}$ 的，取 ε 甚小的話. 由是發生了矛盾. 故必 $\|f_\nu-f\|\to 0$. 由於 $A^*g_{n\nu}=f_\nu$，所以 $\|A^*g_{n\nu}-f\|\to 0$，這就是說，$\{A^*g_{n\nu}\}$ 中存在收斂的子列. 定理證畢.

定理 5. 兩個綫性運算子 A 和 B 之中，假如有一個是有界，還有一個完全連續，那末 AB 與 BA 都是完全連續的.

證明 設 A 是完全連續的，而 B 是有界. 假如 M 是 E 中的一個有界集，那末因 B 的有界性，從

$$\|Bx\|\leqslant K\|x\|\ (K \text{ 是常數}),$$

知道 BM 也是有界. 由於 A 是完全連續，所以 ABM 具有緻密性，這就是說明 AB 是完全連續的.

又 AM 是緻密的，有界運算子 B 是連續的. 所以 BAM 也是緻密的. 定理證畢.

從定理 5 知道，無限維空間上的完全連續運算子 A，决不能具

有有界的逆運算子 A^{-1}. 假如不然, $AA^{-1}=I$ 應該具有完全連續性,事實上,决不可能.

設 E 是一巴拿赫空間,完全連續的綫性運算子 A 將 E 映入於 E 中. 當 $y\in E$ 時,我們考慮如下的綫性運算方程:

$$y=x-Ax.$$

這是弗賴特霍耳母第二種積分方程

$$f(x)=\lambda\int_a^b K(x,y)f(y)dy+\phi(x)$$

的拓廣,因爲我們已經證明過運算子

$$y(t)=\int_a^b K(t,s)x(s)ds$$

是具有完全連續性的. 現在證明下面的

定理 6. 設完全連續的綫性運算子 A 將巴拿赫空間 E 映照於 E. 假如方程 $y=x-Ax$ 對於 E 中任何元素 y 常有解. 那末,除 $x=0$ 而外,方程

$$x-Ax=0$$

决沒有解.

證明 假如方程 $x-Ax=0$ 具有非零的解 x_1,

$$x_1-Ax_1=Tx_1=0,$$

那末方程 $Tx=0$ 的一切解組成 E 的一個子空間 E_1,方程 $T^nx=0$ 的一切解形成 E 的子空間 E_n. 易知

$$E_1\subseteq E_2\subseteq\cdots\subseteq E_n\subseteq\cdots.$$

現在證明 $E_1\subset E_2\subset\cdots$. 事實上,由於 $y=x-Ax$ 常有解,所以順次可得 $x_2,x_3,\cdots$:

$$Tx_2=x_1,\ Tx_1=x_2,\ \cdots,\ Tx_n=x_{n-1}.$$

因此從 $T^nx_n=T^{n-1}x_{n-1}=T_{x_1}=0$, 知道 $x_n\in E_n$. 但是

$$T^{n-1}x_n=T^{n-2}x_{n-1}=\cdots=Tx_2=x_1\neq 0,$$

所以 E_{n-1} 是 E_n 的眞子集. 設 $r(x_{n+1},E_n)=p$, 則 $p>0$. 點集 E_n 中必有元素 x_0 適合 $\|x_{n+1}-x_0\|<2p$. 易知

$$r(x_{n+1}-x_0, E_n) = r(x_{n+1}, E_n) = p.$$

以正數 $\|x_{n+1}\|$ 乘 E_n 中一切元素，所得之集仍爲 E_n，所以從

$$r\left(\frac{x_{n+1}-x_0}{\|x_{n+1}-x_0\|} \cdot \frac{E_n}{\|x_{n+1}-x_0\|}\right) = \frac{p}{\|x_{n+1}-x_0\|} > \frac{1}{2}$$

得到

$$r(y_{n+1}, E_n) > \frac{1}{2}, \quad \|y_{n+1}\| = 1, \quad y_{n+1} \in E_{n+1}.$$

現在證明 $\{Ay_n\}$ 並不含有任何收斂子列．事實上，當 $m > n$ 時，$y_n + Ty_m - Ty_n \in E_{m-1}$，所以

$$\|Ay_m - Ay_n\| = \|y_m - (y_n + Ty_m - Ty_n)\| > \frac{1}{2}.$$

這是與 A 的全連續性不相容的．定理證畢．

系 1 當 $y = x - Ax$ 對於任何 y 常有解時 $I - A$ 是可逆的．

證明 假如對於某 y，方程 $y = x - Ax$ 具有相異兩解 x_1 和 x_2，那末，就有如下的矛盾：

$$A(x_2 - x_1) = x_2 - x_1 \neq 0.$$

系 2 設 A^* 是 A 的共軛運算子，假如 A 是一完全連續的，它映照巴拿赫空間 E 於 E 中，那末，當方程 $h = f - A^*f$ 對於 $\overline{E}$ 中任何汎函 h 可解時，方程 $f - A^*f = 0$ 只有"零解"．

證明 事實上，A 的完全連續性含有 A^* 的完全連續性，巴拿赫空間 E 的共軛空間 $\overline{E}$ 也是巴拿赫空間．從定理 6 知系 2 成立．證明完畢．

假如方程 $y = x - Ax$ 常可解，那末當 $f - A^*f = 0$ 時，

$$f(y) = f(x) - f(Ax) = f(x) - A^*f(x) = 0.$$

這是建立着下述定理中條件的必要性：

定理 7. 方程 $y = x - Ax$ 有解的充要條件是 $f - A^*f = 0$ 含有 $f(y) = 0$．

證明 留下的證明是要從設條件導出方程 $y = x - Ax$ 是可

解的.

當 $f - A^*f = 0$ 時,定義適合 $f(y) = 0$ 的一切 y 所成之集 L_f. 我們要證通集 ΠL_f 中只含有形式 $x - Ax$ 的元素,就是說,不可能寫成 $x - Ax$ 的元素 y_1 不在 ΠL_f 中. 或是說,有如下的 f_1:

$$f_1 - A^*f_1 = 0, \ f_1(y_1) \neq 0.$$

換句話說: $f_1(x - Ax) \equiv 0 \ (x \in E), \ f_1(y_1) \neq 0$.

具有形式 $x - Ax$ 的元素的全體,記它做 G_0. 設 $z \in G_0$. 一切元素 $z + \alpha y_1$ 成一子空間 $\{G_0, y_1\}$. 在 $\{G_0, y_1\}$ 上, 定義如下的泛函 f_1:

$$f_1(z + \alpha y_1) = \alpha.$$

由漢與巴拿赫的定理, 此泛函數 f_1 可以延展到 E 中所有的元素,這個 f_1 就是所要的泛函數.定理證畢.

系 假如方程 $f - A^*f = 0$ 無解——除開 $f = 0$——那末方程 $y = x - Ax$ 恆有解.

定理 8. 方程 $h = f - A^*f$ 有解的充要條件是當 $x - Ax = 0$ 時 $h(x) = 0$.

證明 必要性的證明:當 $h = f - A^*f$ 有解時,

$$h(x) = f(x) - f(Ax) = f(x - Ax).$$

故當 $x - Ax = 0$ 時, $h(x) = 0$.

條件的充足性:假如對於滿足 $x - Ax = 0$ 的 x 必使 $h(x) = 0$, 那末首先在 G_0(其中元素具有形式 $x - Ax = Tx$)上, 由方程

$$f(Tx) = h(x)$$

定義泛函 f. 此 f 是單值的,事實上當 $Tx_1 = Tx_2$ 時, $h(x_1) = h(x_2)$. 又從

$$f(T(x_1 + x_2)) = h(x_1 + x_2) = h(x_1) + h(x_2)$$
$$= f(Tx_1) + f(Tx_2).$$

知道 f 是一個綫性泛函, 這個泛函可以延展到 E 的一切元素. 由是獲得

$$f(\mathring{T}x) = T^*f(x) = h(x).$$

所以方程 $h = f - A^*f$ 有解 f. 定理證畢.

系 假如當 $x \neq 0$ 時 $x - Ax \neq 0$, 那末方程 $f - A^*f = h$ 常有解, 下面的定理是定理 6 的逆.

定理 9. 假如方程 $x - Ax = 0$ 只有一個解 $x=0$, 那末方程 $x - Ax = y$ 恆有解.

證明 由於方程 $x - Ax = 0$ 只有一個解, 所以方程 $f - A^*f = h$ 恆有解. 因之 $f - A^*f = 0$ 只有一個解 $f=0$. 由是方程 $y = x - Ax$ 常有解. 定理證畢.

總上所述, 關於方程 $y = x - Ax$, 只有下面兩種情形:

1) 對於任何 y, 方程有唯一的解, 此時運算子 $I - A$ 是可逆的.

2) 方程 $x - Ax = 0$ 具有非零的解, 此時 $\lambda = 1$ 是 A 的固有值.

以上所述的各種議論, 都可以加之於方程

$$y = x - \lambda Ax \quad (\lambda \text{ 是一個數}).$$

因此當 $I - \lambda A$ 爲不可逆行時, $\frac{1}{\lambda}$ 是 A 的一個固有值. 換句話說: 對於完全連續的運算子而言, 任何數不是它的正則值就是它的固有值, 完全連續的運算子不會有連續譜的.